



MINISTERUL
EDUCAȚIEI, CULTURII
ȘI CERCETĂRII

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник

6

КЛАСС



EDITURA
PRUT



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII

Ион Акири

Андрей Брайков

Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник



EDITURA
PRUT

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației, Culturii și Cercetării.

Manualul școlar a fost realizat în conformitate cu prevederile curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Culturii și Cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Culturii și Cercetării nr. 1343 din 03 decembrie 2020, ca urmare a evaluării calității metodico-științifice.

Школа/лицей _____ Учебник № _____				
Год пользования	Фамилия и имя учащегося	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце года определяется оценками: *отлично, хорошо, удовлетворительно* или *плохо*.

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii *Prut Internațional*.

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această carte este permisă doar cu acordul scris al editurii.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE
Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UST
Olga Șpunteco, profesoară, grad didactic superior

Comisia de evaluare: *Aliona Lașcu*, grad didactic superior, LT „Mihai Eminescu”, Chișinău – coordonator
Dorin Afanas, doctor, conferențiar universitar, UST
Ludmila Baș, grad didactic superior, LT „Constantin Stere”, Soroca
Nina Ungureanu, grad didactic I, LT „Lucian Blaga”, Iargara, Leova
Aliona Pîslaru, grad didactic I, Gimnaziul Pociumbeni, Râșcani

Traducere din limba română: *Antonina Erhan*

Redactor: *Andrei Braicov*

Corector: *Tatiana Șarșov*

Copertă: *Sergiu Stanciu*

Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura se obligă să achite deținătorilor de copyright, care încă nu au fost contactați, costurile de reproducere a imaginilor folosite în prezenta ediție.

© Editura Prut Internațional, 2020

© I. Achiri, A. Braicov, O. Șpunteco, 2020

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia 23, bl. 1 A, Chișinău, MD-2051

Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18; e-mail: office@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Математика: Учебник для 6-го класса / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; комisia de evaluare: Aliona Lașcu (coordonator) [et al.]; Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. – Chișinău: *Prut Internațional*, 2020. – 244 p.

ISBN 978-9975-54-524-2

51(075.3)

A 394

Imprinat la F.E.-P. Tipografia Centrală. Comanda nr. 3205

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОВТОРЕНИЕ И ДОПОЛНЕНИЯ

- 
- §1. Множество натуральных чисел
 - §2. Делимость
 - §3. Решение уравнений на множестве \mathbb{N}



1

2

3

4

5

$a : 10$

... '101 '001 '000 '101, ...

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

$a : 5$

$a : 2$

§1 Множество натуральных чисел

1.1. Множество натуральных чисел. Повторение



Вспомним

Числа 0, 1, 2, ..., 10, ..., 879, ..., 2 020, ... называются **натуральными числами**.

Множество натуральных чисел обозначают через \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Множество натуральных чисел бесконечно.

Множество ненулевых натуральных чисел обозначают через \mathbb{N}^* .

Решаем и поясняем

- 1 Запишите три элемента, принадлежащих множеству M , где M – множество четных натуральных чисел.

Решение:

$$2 \in M; \quad \square \in M; \quad \square \in M.$$

- 2 Задайте множество перечислением его элементов:

а) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 12 \leq x < 16\}$;

б) $B = \{x | x \in \mathbb{N}^*, x \leq 7\}$.

Решение:

$$A = \{12, 13, \square\};$$

Решение:

$$B = \{\square\}.$$

1.2. Действия с натуральными числами. Повторение



Вспомним

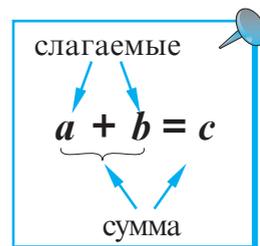
Дима ходит в школу и возвращается из нее по одному и тому же маршруту, двигаясь с одинаковой скоростью. От дома до торгового центра он идет 5 минут, а от торгового центра до школы – 7 минут.

- а) Сколько минут тратит Дима на путь от дома до школы?

Решение:

$$5 + 7 = 12 \text{ (мин)}$$

↑ ↑
слагаемые сумма



Ответ: 12 минут.

б) За сколько минут Дима возвращается из школы домой?

Решение:

$$7 + 5 = 12 \text{ (мин)}$$

Получаем: $5 + 7 = 7 + 5$ →

$$a + b = b + a, a, b \in \mathbb{N}$$

Коммутативность сложения

Ответ: 12 минут.

в) Сколько времени займет дорога от дома до школы, если Дима зайдет в торговый центр на 10 минут, чтобы купить ручку?

Решение:

$$(5 + 10) + 7 = 15 + 7 = 22 \text{ (мин)}$$

$$\text{или } 5 + (10 + 7) = 5 + 17 = 22 \text{ (мин)}$$

Получаем: $(5 + 10) + 7 = 5 + (10 + 7)$ →

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

Ассоциативность сложения

Ответ: 22 минуты.

Обобщаем

Свойства сложения

1. Переместительный закон

$a + b = b + a$, для любых натуральных чисел a и b .

От перестановки мест слагаемых сумма не меняется.

2. Сочетательный закон

$(a + b) + c = a + (b + c)$, для любых натуральных чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$.

При любом сочетании слагаемых сумма не меняется.

3. Нейтральный элемент 0

$a + 0 = 0 + a = a$, для любого натурального числа a .

Прибавление нуля не влияет на результат сложения.

г) На сколько минут меньше Дима потратит на дорогу от дома до торгового центра, чем от торгового центра до школы?

Решение:

$$7 - 5 = \square \text{ (мин)}$$

уменьшаемое вычитаемое разность

Ответ: \square минуты.

$$a - b = c$$

уменьшаемое вычитаемое

разность

д) Найдите расстояние от дома Димы до школы, если он движется со скоростью 80 м/мин.

Решение:

$$80 \cdot 12 = \square \text{ (м)}$$

↙ ↘
↑

множители произведение

Ответ: \square м.



е) С какой скоростью должен идти Дима, чтобы дойти до школы за 10 минут?

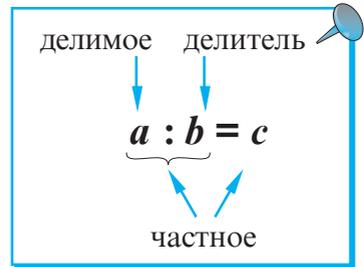
Решение:

$$\square : 10 = \square \text{ (м/мин)}$$

↖ ↗
↑

делимое делитель частное

Ответ: \square м/мин.



РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



1 Перечертите и заполните таблицу:

a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$
6	9		
42	11		
76	1		



Выводы: $a \cdot b = \square \cdot \square$
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = \square$

2 Перечертите и заполните таблицу:

a	b	c	$(a \cdot b) \cdot c$	$a \cdot (b \cdot c)$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b + a \cdot c$
2	7	5				
12	13	4				
6	1	9				



Выводы: $a \cdot (b \cdot c) = \square \cdot \square$
 $a \cdot (b + c) = \square + \square$

Обобщаем

Свойства умножения натуральных чисел

1. Переместительный закон

$a \cdot b = b \cdot a$, для любых натуральных чисел a и b .

От перестановки мест множителей произведение не меняется.

2. Сочетательный закон

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, для любых натуральных чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$.

При любом сочетании множителей произведение не меняется.

3. Нейтральный элемент 1

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, для любого натурального числа a .

Умножение числа на 1 не влияет на результат умножения.

4. Распределительный закон умножения относительно сложения и вычитания

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, для любых натуральных чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, для любых натуральных чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$.

5. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, для любого натурального числа a .

Применяем

Вычислите рациональным способом: а) $103 \cdot 8$; б) $167 \cdot 52 - 167 \cdot 42$.

Решение:

а) $103 \cdot 8 = (100 + 3) \cdot 8 = \square \cdot \square + \square \cdot \square = \square + \square = \square$.

б) $167 \cdot 52 - 167 \cdot 42 = 167 \cdot (\square - \square) = 167 \cdot \square = \square$.

1.3. Возведение в степень

Исследуем и узнаем

Сахар-рафинад упаковывают в коробку слоями. Каждый слой состоит из 4 рядов по 4 куска сахара в каждом ряду. Всего таких слоев в коробке 4. Сколько кусков сахара упаковано в одной коробке?

Решение:

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ (куска).

Ответ: 64 куска.

Вспомним



$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

показатель степени

степень

основание степени

произведение трех множителей

Возьмите на заметку

- ♦ **Степенью** натурального числа a с натуральным показателем $n > 1$ называется произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \text{ где } n > 1 \text{ (читаем „} a \text{ в } n\text{-ой степени“).}$$

$$1^n = 1; \quad a^0 = 1, \text{ если } a \neq 0; \quad a^1 = a; \quad 0^0 \text{ не имеет смысла.}$$

- ♦ **Возведение в степень n** натурального числа – это повторное умножение на n множителей, равных заданному числу.

Применяем

Запишите в виде степени:

а) $5 \cdot 5 = 5^2$ – читают: „5 во второй степени“ или „5 в квадрате“;

б) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ – читают „2 в третьей степени“ или „2 в кубе“;

в) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_7 = 3^{\square}$ – читают „ \square в \square степени“;

г) $\underbrace{9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9}_{10} = \square^{\square}$ – читают „ \square в \square степени“.

• Вычислите:

а) $7 \cdot 4^2 = 7 \cdot 16 = \square$

б) $(7 \cdot 4)^2 = \square^2 = \square$

в) $7 + 4^2 = 7 + \square = \square$



Вспомним

Если выражение не содержит скобок, то действие **возведения в степень** выполняется первым.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

- ✓ Слово *степень* (*potentia*) впервые использовал Рафаело Бомбелли (Rafaelo Bombelli) в XVI-ом веке.
- ✓ Обозначение a^n было введено Рене Декартом (René Descartes) (1596–1650).
- ✓ Степени числа 10 имеют особое значение в математике и в жизни и имеют свои названия: 10^6 – миллион, 10^9 – миллиард (или триллион), 10^{12} – триллион и т. д.

Одно из таких чисел называется Гугол (Googol). *Задание:* Прочитайте в Википедии о том, что это за число и кто его так назвал.

1.4. Свойства степеней

Исследуем и узнаем

$$1 \quad 3^2 \cdot 3^3 = \underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ раза}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ раза}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{(2+3) \text{ раза}} = 3^{2+3}.$$

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ раза}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ раза}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{(4+2) \text{ раза}} = 5^{4+2}.$$

Применяем. Вычислите: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{\square} + \square = 2^{\square} = \square$.

$$2 \quad 2^5 : 2^3 = 32 : 8 = 4 = 2^2 = 2^{5-3}.$$

$$3^5 : 3^2 = 243 : 9 = 27 = 3^3 = 3^{5-2}.$$

Применяем. Вычислите: $7^6 : 7^4 = 7^{\square} - \square = \square = 7^{\square} = \square$.

$$3 \quad (5^3)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) =$$

$$= (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 =$$

$$= 5^{2+2+2} = 5^{3 \cdot 2} = 5^6 = 15\,625.$$

$$(2^2)^4 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^8 = 2^{2 \cdot 4} = 256.$$

Применяем. Вычислите: $(3^3)^5 = 3^{\square} \cdot \square = 3^{\square} = \square$.

$$4 \quad (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1\,000 = 8 \cdot 125 = 2^3 \cdot 5^3.$$

$$(10 \cdot 4)^2 = 40^2 = 1\,600 = 100 \cdot 16 = 10^2 \cdot 4^2.$$

Применяем. Вычислите: $(4 \cdot 2)^2 = \square^2 \cdot \square^2 = \square \cdot \square = \square$.

Возьмите на заметку

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
для любых ненулевых натуральных чисел a, m, n .

$a^m : a^n = a^{m-n}$, для любых ненулевых натуральных чисел a, m, n , и $m > n$.

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,
для любых ненулевых натуральных чисел a, m, n .

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,
для любых ненулевых натуральных чисел a, b, n .

Обобщаем

Справедливы следующие правила вычисления степеней:

- ① При умножении степеней с одинаковыми основаниями записываем основание и складываем показатели степеней: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- ② При делении степеней с одинаковыми основаниями записываем основание и вычитаем показатели степеней: $a^m : a^n = a^{m-n}$.
- ③ При возведении степени в степень записываем основание и перемножаем показатели степеней: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- ④ При возведении произведения в степень возводим в эту степень каждый множитель: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Упражнения и задачи



- Запишите четыре элемента, принадлежащих множеству:
 - A – множество двузначных натуральных чисел;
 - B – множество натуральных чисел, которые делятся на 5;
 - C – множество натуральных чисел, которые при делении на 10 дают в остатке 3.
- Задайте множество перечислением его элементов и найдите его кардинал:
 - A – множество однозначных натуральных чисел;
 - $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x < 6\}$;
 - $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 9\}$.

- Из элементов множества $M = \left\{ \frac{1}{2}; 3,5; 0; 0,1; 52; \frac{3}{4}; 7; 11 \right\}$ составьте множество A , которое содержит только натуральные числа из множества M .
Найдите кардинал множества A .

- Расстояние от Кишинева до Комрата по автомобильному шоссе составляет 99 км, а от Комрата до Кагула – 82 км.



- Сколько километров проехал автомобиль, если он ехал из Кишинева в Кагул через Комрат?
 - На сколько километров меньше проехал автомобиль на обратном пути, когда поехал из Кагула в Кишинев, не заезжая в Комрат, если расстояние от Кагула до Кишинева 168 км.
- Конституция Республики Молдова была принята 27.08.1994 года. Сколько полных лет живет наша страна по этой Конституции?
 - Спортивную площадку для волейбола нужно оградить сеткой. Длина площадки прямоугольной формы 18 м, а ширина в 2 раза меньше. Сколько метров сетки нужно купить?
 - Вычислите наиболее удобным способом:
 - $(12 + 99) + 101$;
 - $57 + (43 + 156)$;
 - $(324 + 529) + 676$;
 - $12 \cdot 13 + 13 \cdot 18$;
 - $37 \cdot 26 + 33 \cdot 26$;
 - $154 \cdot 56 - 46 \cdot 154$.
 - Зыпишите в виде степени:
 - $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{7 \text{ множителей}}$;
 - $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{20 \text{ множителей}}$;
 - $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{100 \text{ множителей}}$.

- Перечертите и заполните таблицу:

Степень	3^7			5^{12}	
Основание степени		5	7		
Показатель степени		4	10		100



10. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



Перечертите и заполните таблицу:

а)

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2											
a^3											

б)

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2										



Совет

Выучите наизусть результаты из этих таблиц. Они помогут при изучении математики.

11. Воспользуйтесь составленными в задании 10 таблицами и вычислите:

- а) $147 - 12^2$; б) $13^2 + 11^2$; в) $(2^2 + 13)^2$; г) $10^3 + 10^2$;
 д) $5 \cdot 4^3 - 150$; е) $17^2 - 7^2$; ж) $750 : 5^3$; з) $15^2 - 5^3$.

12. Вычислите:

- а) $(2 \cdot 6)^2$; б) $3^3 \cdot 5^2$; в) $4^2 : 2^4$; г) $(8^2)^2$; д) $(1^3)^5$;
 е) $7^3 - 5^3$; ж) $3 \cdot 3^4$; з) $(2^3)^2 \cdot 4$; и) $125 : 5^2$; к) $6^6 : (2^5 \cdot 3^5)$.

13. В троллейбусе ехало 67 пассажиров. На первой остановке вышло 19 пассажиров, а зашло 23 пассажира, на второй остановке вышло 32 пассажира, а зашло 12. Сколько пассажиров стало в троллейбусе после двух остановок?



14. Вычислите по образцу:

Образец:

$$36 \cdot 25 = 9 \cdot (4 \cdot 25) = 9 \cdot 100 = 900.$$

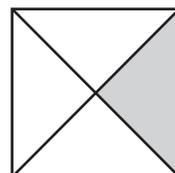
- а) $150 \cdot 42$; б) $112 \cdot 12$; в) $18 \cdot 35$.

15. Вычислите, используя дистрибутивность умножения:

- а) $102 \cdot 13$; б) $201 \cdot 24$; в) $105 \cdot 36$;
 г) $127 \cdot 23 + 127 \cdot 77$; д) $352 \cdot 92 + 352 \cdot 208$.

16. Что больше: сумма 11 слагаемых, каждое из которых равно 12, или сумма 12 слагаемых, каждое из которых равно 11? Объясните ответ.

17. Квадрат с периметром 48 см разрезали на 4 равных треугольника, как показано на рисунке. Найдите площадь одного треугольника



18. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



Вычислите наиболее рациональным способом:

- а) $417 \cdot 38 + (583 \cdot 11 + 583 \cdot 27)$; б) $12 \cdot 17 + 35 \cdot 13 + 17 \cdot 23$;
в) $(37 \cdot 26 + 58 \cdot 34) + 21 \cdot 26$; г) $((2^2)^3 \cdot 74 + 102 \cdot 10) + 64 \cdot 26$.

19. Представьте число в виде степени с основанием 2:

- а) 8; б) 64; в) 1024; г) 256; д) $(4^3)^4$; е) 16^5 ; ж) $32^2 \cdot 8^3$.

20. Найдите: а) куб суммы чисел 5 и 6;

б) сумму кубов чисел 5 и 6;

в) квадрат разности чисел 33 и 17;

г) разность квадратов чисел 33 и 17.

21. Вычислите, используя свойства степени:

- а) $5^3 \cdot 4^3$; б) $(2^6)^2 : 2^9$; в) $(15^3 \cdot 15^7) : 15^9$; г) $(3^2)^5 : (3^4 \cdot 3^3)$;
д) $(10^2)^3 : 10^4$; е) $(4^{12} \cdot 3^{12}) : (4 \cdot 3)^9$; ж) $(7^2)^5 : 7^8 \cdot 10$.

22. Вычислите:

- а) $2^6 \cdot 5^6 : 10^5$; б) $(15^2)^5 : (3^9 \cdot 5^8)$; в) $(25 \cdot 4)^{10} : (2^{19} \cdot 5^{19})$;
г) $(7^2)^5 : 49^3 \cdot 5^0$; д) $225 \cdot 15^5 \cdot 0^{12}$; е) $1^{200} \cdot (5 \cdot 6)^5 : 30^3$;
ж) $4^{12} \cdot 8^8 : 16^{10}$; з) $9^5 \cdot 27^4 : 3^{20}$; и) $5^5 \cdot 25^{10} : 125^7$.

23. Сравните:

- а) 2^5 ● 5^2 ; б) 3^4 ● 4^3 .



24. Чтобы пронумеровать страницы книги, использовали 183 цифры. Сколько страниц в книге?

25. Пять кошек ловят пять мышек за пять минут. Сколько мышек поймут 10 кошек за 10 минут?

26. Найдите последнюю цифру числа: а) 2021^{15} ; б) 56^{100} ; в) 3^{20} .

27. 1) Исследуйте и впишите пропущенные числа:

$$1 + 3 = 4 = 2^2;$$

$$1 + 3 + 5 = \blacksquare = \blacksquare^2;$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = \blacksquare = \blacksquare^2;$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \blacksquare = \blacksquare^2.$$

2) Сформулируйте закономерность, которую вы подметили.

3) Используя эту закономерность, найдите сумму первых двадцати нечетных чисел.

4) Найдите сумму всех нечетных натуральных чисел от 1 до 99.

§2 Делимость

2.1. Делитель. Кратное



Вспомним

1 Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф хотят купить яблоки. Общая масса яблок в обоих ящиках одинаковая. Какой ящик надо выбрать пороссятам, чтобы каждому из них досталось одинаковое количество яблок?



15 яблок

①

Решение:

15 яблок можно поделить поровну между 3 пороссятами.

Обозначаем:

$$15 : 3 \text{ или } 3 | 15$$

Читаем:

15 *кратно* 3
3 *делит* 15



20 яблок

②

20 яблок нельзя поделить поровну между 3 пороссятами.

Обозначаем:

$$20 \not\div 3 \text{ или } 3 \nmid 20$$

Читаем:

20 *не кратно* 3
3 *не делит* 20



Вспомним

- Натуральное число a **делится** на натуральное число b , если существует натуральное число c такое, что $a = b \cdot c$.

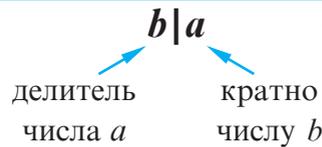
Обозначаем: $a : b$.

Говорят: b **делитель** числа a , или b **делит** число a .

Обозначаем: $b | a$.

- Натуральное число a **кратно** натуральному числу b , если a делится без остатка на b .

Очевидно, что если b делит a , то a кратно b .



Применяем и объясняем

2 Сколько делителей и сколько кратных у числа 12?

Решение:

Так как 12 делится на 1, 2, 3, 4, 6 и 12, то число 12 имеет шесть делителей. Каждое из чисел 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ... делится без остатка на 12.

Заметим, что любое число вида $12 \cdot n$, где $n \in \mathbb{N}$, делится без остатка на 12. Следовательно, число 12 имеет бесконечно много кратных.

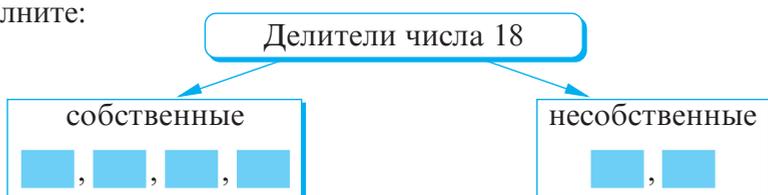
Ответ: 6 делителей и бесконечно много кратных.

Возьмите на заметку

- ♦ Множество делителей натурального числа n конечно и обозначается D_n .
- ♦ Множество кратных натурального числа n бесконечно и обозначается M_n .
Значит, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, \dots\}$.

Замечание. Любое натуральное число n делится на 1 и на n . Числа 1 и n называются **несобственными делителями** числа n , остальные делители этого числа называются **собственными**.

- Заполните:



2.2. Признаки делимости

1 Для каждой корзины выберите соответствующие числа.

Числа: 12, 30, 21, 80, 56, 100, 370, 48, 35, 79, 64, 95.

Корзины:

- Числа, которые делятся на 2
- Числа, которые делятся на 5
- Числа, которые делятся на 10

Вспомним

- Натуральное число **делится на 2** тогда и только тогда, когда его запись оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8.
- Натуральное число **делится на 5** тогда и только тогда, когда его запись оканчивается цифрой 0 или 5.
- Натуральное число **делится на 10** тогда и только тогда, когда его запись оканчивается цифрой 0.

Исследуем и узнаем

2 Какой цифрой может оканчиваться запись числа, делящегося на 3?

Решение:

Рассмотрим несколько чисел, кратных числу 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

Ответ: Любой цифрой.

3 Рассмотрите и заполните пропуски:

81, 268, 873, 100, 108, 78, 95

Числа, делящиеся на 3

81

Числа, сумма цифр
которых делится на 3

81

- Сделайте вывод.
- Решите задачу 3, исследуя делимость на 9. Сделайте вывод.

Возьмите на заметку

- ♦ Натуральное число **делится на 3** тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.
- ♦ Натуральное число **делится на 9** тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9.

Применяем и объясняем

Используя признаки делимости, выберите числа, которые делятся на:

а) 3; б) 9.

384

567

421

8883

3456

1234

288

234

Образец:

$168 : 3$, так как
 $1 + 6 + 8 = 15$,
а $15 : 3$.

4 Истинно или Ложно?

- Все числа, делящиеся на 9, делятся на 3.
- Все числа, делящиеся на 3, делятся на 9.
- Некоторые числа, делящиеся на 3, делятся и на 9.



2.3. Простые числа. Составные числа.

Разложение чисел на простые множители

1 Рассмотрите числа. Помогите Наф-Нафу выбрать числа, которые не имеют собственных делителей (то есть числа, которые делятся только сами на себя и на 1):

53

42

38

27

485

43

39

71

81

19

Решение:

Числа 53, 71, 43, 19 делятся только сами на себя и на 1.

Такие числа называют **простыми числами**.

Каждое из чисел 42, 38, 81, 27, 39 имеет более 2 делителей. Например, 42 делится на 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Такие числа называют **составными числами**.





Возьмите на заметку

- ♦ Натуральное число n называется **простым числом**, если оно имеет только два делителя: 1 и n .
- ♦ Натуральное число n называется **составным числом**, если оно имеет более двух делителей.

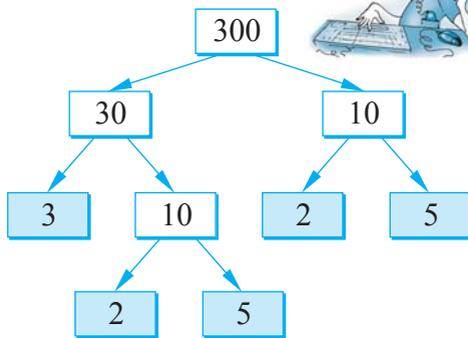
Замечание. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам, так как оно делится только на 1.

Применяем и объясняем

• Дополните последовательность такими числами, чтобы получить ряд первых десяти простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, , , .

2 Обратите внимание, как Всезнайка и Многознайка разложили на простые множители число 300.

1 способ



$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$



2 способ

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	



① Число, записанное слева, делим на самое маленькое возможное простое число и под делимым записываем полученное частное.

② Повторяем шаг ① до тех пор, пока не получим в частном 1.

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Задания для понимания

- Разложите на простые множители число: а) 420; б) 1200.

ИЗ ИСТОРИИ

Эратосфен из Кирены (Cyrene) (276–194 до н.э.) был древнегреческим математиком, поэтом, спортсменом, географом и астрономом. Он изобрел способ нахождения простых чисел, названный *решетом Эратосфена*. Способ состоит в удалении составных чисел из последовательности натуральных чисел, записанных в порядке возрастания начиная с 1: первое число, отличное от 1, а именно 2, является простым числом; четные числа, кратные 2, являются составными числами и удаляются. Первое неудаленное число после 2 – это 3, и оно простое, а все числа, кратные 3, являются составными числами и также удаляются. Следующее оставшееся число – 5, оно простое, а все числа, кратные 5, удаляются и т. д.



2.4. Наибольший общий делитель

Исследуем и узнаем

1 В период зимних праздников один из магазинов приготовил одинаковые подарки, состоящие из конфет „Метеорит“ и „До-ре-ми“. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить из 120 конфет „Метеорит“ и 144 конфет „До-ре-ми“?

Решение:

Каждое из чисел 120 и 144 должно делиться на число подарков. Поэтому выпишем все делители каждого из чисел.

$$D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 60, 120\}.$$

$$D_{144} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72, 144\}.$$

Видим, что наибольшим числом, которое делит числа 120 и 144, является 24. Значит, можно составить не больше 24 подарков.

Говорим, что число 24 является *наибольшим общим делителем* чисел 120 и 144.

Записываем: 24 – наибольший общий делитель для чисел 120 и 144.

Обозначаем: $(120, 144) = 24$.

Ответ: 24 подарка.

Возьмите на заметку

- ◆ **Наибольшим общим делителем (НОД)** натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b . *Обозначаем:* (a, b) .
- ◆ Если $(a, b) = 1$, то числа a и b называют **взаимно простыми**.

2 Найдите НОД чисел 450 и 1050.

Решение:

1 Разложим на простые множители каждое число:

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\longrightarrow 450 = 2 \cdot \underline{\underline{3^2}} \cdot \underline{\underline{5^2}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\longrightarrow 1050 = 2 \cdot \underline{\underline{3}} \cdot \underline{\underline{5^2}} \cdot 7$$

2 Найдём произведение общих простых делителей с наименьшими показателями степени.

$$(450, 1050) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150.$$

Возьмите на заметку

Чтобы найти наибольший общий делитель (НОД):

- 1 разложим заданные числа на простые множители и найдем (подчеркнем) все общие простые множители из полученных разложений;
- 2 находим произведение общих простых множителей с наименьшими показателями степени.

Используя это правило, можно найти наибольший общий множитель трех и более чисел.

Например, $72 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$, $84 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 7 \cdot \underline{3}$, $180 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 5$.

Значит, $(72, 84, 180) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Если числа не имеют общих простых делителей, то их наибольший общий делитель равен 1. Например, $(9, 11) = 1$.

Если натуральное число делится без остатка на другое число, то меньшее число и является наибольшим общим делителем этих чисел.

Например, $48 : 24 = 2$, поэтому $(48, 24) = 24$.

Замечание. Если b делит a , то $(a, b) = (b, a) = b$.

2.5. Наименьшее общее кратное

Исследуем и узнаем

1 Какое наименьшее количество уток может быть в стае, если на пруд они идут по 8 в ряду, а назад возвращаются по 6 в ряду?

Решение:

Число уток должно делиться на 6 и на 8.

Запишем несколько чисел, кратных 6 и 8.

$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$,

$M_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$.

Заметим, что наименьшим числом, кратным числам 6 и 8, является 24.

Значит, в стае не меньше 24 уток.

Ответ: 24 утки.

Говорим, что число 24 является *наименьшим общим кратным* чисел 6 и 8.

Записываем: 24 – наименьшее общее кратное для чисел 6 и 8.

Обозначаем: $[6, 8] = 24$.



Возьмите на заметку

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b называется наименьшее ненулевое натуральное число, которое делится на числа a и b .

Обозначаем: $[a, b]$.

2 Найдите НОК чисел 144 и 150.

Решение:

① Разложим на простые множители каждое число.

$$\begin{array}{l|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \longrightarrow 144 = \underline{2^4} \cdot \underline{3^2}$$

$$\begin{array}{l|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \longrightarrow 150 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5^2}$$

② Найдем произведение всех простых делителей данных чисел с наибольшими показателями степени:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3\,600, \text{ или } [144, 150] = 3\,600.$$

Ответ: $[144, 150] = 3\,600$.



Возьмите на заметку

Чтобы найти наименьшее общее кратное (НОК):

- ① разложим заданные числа на простые множители;
- ② находим произведение простых множителей, которые имеют наибольшие показатели степеней и присутствуют хотя бы в одном из разложений. Чтобы определить эти множители, разложение одного из чисел дополняется теми множителями из разложения другого числа, которые отсутствуют в разложении первого числа.

Если одно число делится на другое число, то большее число является наименьшим общим кратным этих чисел. Например, $[48, 24] = 48$, поскольку $48 : 24$.

Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел. Например, $[9, 11] = 9 \cdot 11 = 99$.

Можем найти наименьшее общее кратное не только двух чисел, но и нескольких чисел, используя приведенное выше правило.

3 Найдите НОК чисел 24, 63 и 40.

Решение:

Разложим на простые множители каждое из чисел:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

$$\text{Тогда } [24, 63, 40] = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,520.$$

Ответ: $[24, 63, 40] = 2\,520$.

Замечание. Можно показать, что $[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$ для любых ненулевых чисел.

Действительно, $(144, 150) = 6$ и $\frac{144 \cdot 150}{6} = 3600$.

$(144, 150)$

$[144, 150]$

Запомните!

$$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$$

Упражнения и задачи

1. Выберите устно числа, которые делятся на: а) 2; б) 5; в) 10.

421

500

36

970

4000

2615

360

995

59

45

70225

2. Запишите все двузначные натуральные числа:

а) которые делятся на 2 и на 5;

б) которые делятся на 10;

в) которые делятся на 5, но не делятся на 10.

3. Найдите частное и остаток от деления:

а) $2456 : 5$;

б) $3149 : 2$;

в) $2783 : 10$;

г) $1234 : 3$;

д) $43210 : 9$.

4. Найдите числа меньше 30, каждое из которых равно сумме всех своих делителей, не считая самого числа.

5. Применив соответствующий признак делимости, выберите числа, которые делятся на: а) 3; б) 9.

436

199

11211

2880

6666

7728

91917

46438

5423

6485

6. Найдите собственные делители числа: а) 36; б) 48; в) 126; г) 416; д) 500.

7. Найдите все двузначные числа, кратные: а) 21; б) 18; в) 35; г) 19.

8. Выберите простые числа:

177

311

137

267

123

211

163

9. Разложите на простые множители числа:

а) 36;

б) 80;

в) 100;

г) 136;

д) 240.

10. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 12 и 20;

б) 27 и 72;

в) 60 и 64;

г) 96 и 36;

д) 360 и 840;

е) 84 и 112.

11. Сократите дробь: а) $\frac{315}{320}$; б) $\frac{48}{124}$; в) $\frac{360}{420}$; г) $\frac{312}{390}$.

12. Найдите наименьшее общее кратное чисел:
 а) 5 и 8; б) 45 и 9; в) 27 и 45; г) 12 и 18; д) 33 и 39; е) 64 и 48.
13. Не выполняя деление, найдите остаток от деления числа 123456789 на:
 а) 2; б) 5; в) 10; г) 3; д) 9.
14. Найдите все числа вида:
 а) $\overline{123a}$, делящиеся на 3;
 б) $\overline{25ab}$, делящиеся на 9;
 в) $\overline{63bc}$, делящиеся и на 9, и на 10.

Образец: $\overline{ab} = 10a + b$;
 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

15. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! 

Найдите три числа, запись которых состоит:

- а) из цифр 1 и 0 и которые делятся на 3;
 б) из цифр 2 и 3 и которые делятся на 3;
 в) из цифры 3 и которые делятся на 9;
 г) из цифр 1 и 4 и которые делятся на 9.

16. Истинно или Ложно?

- а) Произведение двух нечетных чисел является нечетным числом.
 б) Квадрат четного числа – нечетное число.
 в) Куб нечетного числа – четное число.
 г) Куб четного числа – четное число.



17. Две маршрутки отправляются в 6:00 с одной и той же остановки. Первая маршрутка возвращается на эту остановку через каждые 45 минут, а вторая – через каждый час. Во сколько снова встретятся эти две маршрутки на той же остановке?

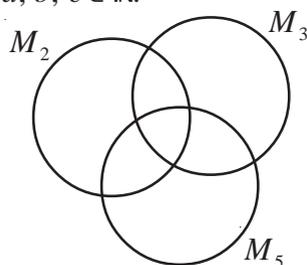
18. Чему равен остаток от деления числа n на 6, если число $n + 4$ кратно 6?

19. Истинно или Ложно?

- а) Сумма двух четных чисел является четным числом.
 б) Разность двух нечетных чисел является нечетным числом.
 в) Если $c | a$ и $c | b$, то $c | (a + b)$, для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$.
 г) Если натуральное число делится на 5, то оно делится и на 10.
 д) Если натуральное число делится на 2 и на 5, то оно делится и на 10.
 е) Если $c | (a + b)$, то $c | a$ и $c | b$, для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$.



20. Перечертите диаграммы и впишите в соответствующие места числа:
 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 25, 30.



21. Найдите натуральные числа m и n , зная, что:
 а) $m + n = 24$ и $(m, n) = 8$; б) $m + n = 45$ и $(m, n) = 9$.
22. Найдите значения x , кратные числу 7, для которых выполняется неравенство $45 < x < 98$.
23. В конце урока учитель математики собрал тетради для проверочных работ и тетради для домашних заданий. Всего 55 тетрадей. Все ли ученики отдали учителю обе тетради?
24. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! 
 Напишите вместо * такие числа, чтобы число $5*1*$ делилось:
 а) на 3; б) на 9.
 Найдите все возможные решения.
25. Напишите три пары взаимно простых чисел. Найдите наименьшее общее кратное для каждой пары чисел.
26. Каким должно быть наименьшее количество метров сетки в рулоне, чтобы можно было продавать без остатков по 3 м или по 5 м?
27. Найдите двузначные числа, кратные 22.
28. Маленькая коробочка вмещает 24 шоколадные конфеты, а большая коробочка – 40 шоколадных конфет. Найдите наименьшее количество конфет, которые можно упаковать как в маленькие, так и в большие коробочки.
29. В соревнованиях по спортивной гимнастике участвовали одинаковые по составу команды. Всего было 145 мальчиков и 87 девочек. Во всех командах было одинаковое количество мальчиков и одинаковое количество девочек.
 а) Узнайте, сколько команд участвовало в соревнованиях.
 б) Сколько мальчиков и сколько девочек было в каждой команде?
30. Лия и Лиза упаковывают 24 апельсина и 18 груш в пакеты, содержащие одинаковое количество фруктов.
 а) Можно ли сформировать 9 пакетов? б) А 8?
 в) В какое наибольшее количество пакетов можно упаковать эти фрукты?

-
31. 10 мая одновременно из одного порта вышли три теплохода. Первый теплоход возвращается в порт через каждые 4 недели, второй – через каждые 6 недель, третий – через каждые 3 недели. Какого числа они снова встретятся в этом порту?
32. Найдите наименьшее натуральное число, которое поочередно при делении на 7, 8, 9 дает в остатке 5, 6, 7 соответственно.
33. Применяя *решето Эратосфена*, найдите все простые числа до 90.

§ 3 Решение уравнений на множестве \mathbb{N}

3.1. Математические выражения

Исследуем и узнаем

• Цифры, буквы, знаки арифметических действий и скобки составляют „математический алфавит“, которым записывают **математические выражения**.

числовые выражения

$$\boxed{835} \quad \boxed{23 - 15} \quad \boxed{9 \cdot (25 + 36)}$$

буквенные выражения

$$\boxed{x} \quad \boxed{x - 2} \quad \boxed{(a - b) : c}$$

• Для упрощения записи принято опускать знак умножения в некоторых буквенных выражениях.

$$\boxed{a \cdot b} \rightarrow \boxed{ab}$$

$$\boxed{4 \cdot x} \rightarrow \boxed{4x}$$

$$\boxed{a \cdot 2} \rightarrow \boxed{2a}$$

$$\boxed{x \cdot 7 \cdot y} \rightarrow \boxed{7xy}$$

Возьмите на заметку. Численный множитель пишут перед множителями, записанными буквами.

$$\boxed{(a + 5) \cdot 2} \rightarrow \boxed{2(a + 5)}$$

$$\boxed{n \cdot (6 - m) \cdot 4} \rightarrow \boxed{4n(6 - m)}$$

• Поясните, почему принято опускать множитель, равный 1.

$$\boxed{1 \cdot x} \rightarrow \boxed{x}$$

$$\boxed{a \cdot 1} \rightarrow \boxed{a}$$

$$\boxed{b \cdot 1 \cdot c \cdot 5} \rightarrow \boxed{5bc}$$

Задания для понимания

1. В каких из следующих выражений можно опустить знаки умножения? Запишите эти выражения в упрощенном виде.

а) $4 \cdot 8$	б) $n \cdot 6$	в) $x \cdot (y + 5) \cdot 2$	г) $m \cdot n \cdot 2 \cdot 1$
$4 \cdot x$	$3 \cdot a \cdot b$	$5 \cdot 7 \cdot 10$	$a \cdot 2 \cdot (3 + b)$

2. Выявите опущенные знаки умножения и прочитайте выражения:

а) $10n$;	б) $2 + 3x$;	в) $5a + 8b$;	г) $3abc$;
mn ;	$2a - 6$;	$7(3 + a)$;	$4(2ab - 1)$.

3. Преобразуйте выражения, используя свойства арифметических действий.

а) $5a + 4a$;	д) $2b + 5b + 9b$;
б) $10x - 6x$;	е) $12x - 3x - x$;
в) $3m + m$;	ж) $4z + z - 2z$;
г) $8n - n$;	з) $15a - 3a + a$.

$$\text{Образцы: } 2x + 3x = (2 + 3) \cdot x = 5x \\ 7a - 4a = (7 - 4) \cdot a = 3a$$

4. Ручка стоит x леев, а пенал стоит y леев. Поясните, что в данном контексте могут означать выражения:

а) $x + y$;	б) $2x$;	в) $9y - 3x$;	г) $100 - 4x$;
$y - x$;	$5y$;	$100 : x$;	$100 - 2y$;
$y : x$;	$4x + 7y$;	$100 - y$;	$100 - (x + y)$.

5. Во дворе a мальчиков. Запишите математическим выражением количество девочек, зная, что их:

- а) на 4 больше, чем мальчиков;
- б) на 4 меньше, чем мальчиков;
- в) в 4 раза больше, чем мальчиков;
- г) в 4 раза меньше, чем мальчиков.

Применяем и объясняем

• Выполнив действия в числовом выражении, получим число – **значение выражения**.

• Буквенное выражение можно преобразовать в числовое выражение, заменив буквы цифрами.

Значением выражения $2 \cdot 4 + 3$ является число 11.

Для $a = 3$ и $b = 5$ значением выражения $a + b$ является число 8.

• Найдите значение выражения:

- а) $4x$, для $x = 12$;
- б) $z : 15$, для $z = 30375$;
- в) $2a + 5$, для $a = 25$;
- г) $10y - y : 10$, для $y = 1\,000\,000$;
- д) $3(a + b)$, для $a = 6$, $b = 14$;
- е) $5x - 6y$, для $x = 15$, $y = 11$;
- ж) $n^2 + m^3$, для $n = 13$, $m = 3$;
- з) $2c(d^2 + 4)$, для $c = 25$, $d = 16$.

3.2. Уравнения

Исследуем и узнаем

• Два числовых выражения, значения которых равны, образуют **истинное (верное) равенство**.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 + 8 = 15 - 5 & \\ \hline \text{левая часть уравнения} & \text{правая часть уравнения} \\ \hline \end{array}$$

• **Уравнение с одним неизвестным** – это равенство, которое содержит одно неизвестное (букву).

$$\boxed{2 + x = 15 - 5} \quad \boxed{15 = 5a} \quad \boxed{3m = m + 12}$$

• **Решить уравнение** – означает найти его решения или доказать, что решений нет.

$$\boxed{x = 3 \text{ является решением уравнения } 2x = 6, \text{ так как } 2 \cdot 3 = 6 \text{ является истинным равенством.}}$$

• Значение неизвестного, для которого уравнение превращается в истинное равенство, называется **решением уравнения**.

• Выполните подстановку и выявите уравнения, для которых число 5 является решением:

а) $4 + x = 81 : 9$;

б) $5a = 40$;

в) $2(z - 5) = 0$;

г) $4n + 1 = 46$.

Решаем и поясняем

Пример 1

$$\begin{array}{l} \text{Ум.} \quad \text{В.} \quad \text{Р.} \\ \boxed{2a} - \boxed{5} = \boxed{63} \end{array}$$

$$2a = 63 + 5$$

$$2a = 68$$

$$a = 68 : 2$$

$$a = 34$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 34 - 5 = 63 \text{ (И)} \\ 63 = 63 \end{array}$$

Левая часть уравнения – это разность, так как вычитание является последним выполняемым действием.

Чтобы найти неизвестное уменьшаемое ($2a$), прибавим вычитаемое 5 к остатку 63.

Получаем простое уравнение, левая часть которого является произведением, а неизвестное a – это один из множителей.

Выполним проверку.

• Решите уравнения и поясните:

а) $4z - 6 = 194$;

б) $35 + 5a = 95$;

в) $8b + 26 = 58$;

г) $3(2 + x) = 9$;

д) $(15 - x) : 3 = 5$;

е) $42 : (y + 4) = 6$.

Пример 2

$$2x + 5x = 100 - 2 \cdot 15$$

$$7x = 70$$

$$x = 70 : 7$$

$$x = 10$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 100 - 2 \cdot 15 \text{ (И)} \\ 70 = 70 \end{array}$$

Приводим части уравнения к более простой форме.

Левая часть уравнения – произведение $7x$, а неизвестное x – один из множителей.

Чтобы найти множитель x , делим произведение 70 на известный множитель 7.

Получаем число 10.

Выполняем проверку.

• Решите уравнения и поясните:

а) $4z - z = 24 + 5 \cdot 12$;

б) $8y + 7y = 1000 : 8 \cdot 3$;

в) $35 + 16 + a = 200 - 48$;

г) $b - (21 + 2 \cdot 16) = 308 : 4$.

Пример 3. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $3x+1=10$.

Решение:

$3x+1 = 10$ ← Левая часть уравнения – сумма $3x+1$, с одним неизвестным.
 Левая часть уравнения Правая часть уравнения

$3x = 10 - 1$ ← Чтобы найти неизвестное число, вычтем из суммы известное слагаемое.

$3x = 9$ ← Левая часть – произведение $3x$, а неизвестное число x является одним из множителей.

$x = 9 : 3$ ← Чтобы найти неизвестный множитель x , разделим произведение 9 на известный множитель 3.

$x = 3 \in \mathbb{N}$ ← Получим число 3 и проверим, принадлежит ли оно множеству \mathbb{N} (так как уравнение решается на множестве натуральных чисел).

$3 \cdot 3 + 1 = 10$ (И) ← Проверим, превращается ли уравнение в истинное равенство при подстановке полученного числа.
 $10 = 10$

Ответ: $S = \{3\}$. ← Записываем ответ.



Возьмите на заметку

- ◆ Уравнением с одним неизвестным называется равенство, содержащее одно неизвестное.
- ◆ Значение неизвестного, при котором уравнение превращается в истинное равенство, называется **решением уравнения**.
- ◆ **Решить уравнение** – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.
- ◆ Множество решений уравнения обозначается через S .
- ◆ Если уравнение не имеет решений, то $S = \emptyset$.

Уравнение имеет решение на \mathbb{N} .

Уравнение не имеет решений на \mathbb{N} .



Применяем

1. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $4a-3=18$.

Решение:

$4a-3 = 18$ ← Левая часть уравнения – разность.

$4a = 18+3$ ← Чтобы найти уменьшаемое, складываем

$4a = 21$ ← Левая часть уравнения – , а неизвестное число a является одним из множителей.

$a = 21 : 4$ ← Чтобы найти неизвестный множитель a , разделим произведение на известный множитель.

$a = 5,25 \notin \mathbb{N}$ ← Получим число $5,25$, которое не принадлежит множеству \mathbb{N} .

Вывод ← Уравнение не имеет решений на множестве \mathbb{N} .

Ответ: $S = \emptyset$. ← Записываем ответ.

2. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $16 : (2z) = 8$.

Решение:

$16 : (2z) = 8$ ← Левая часть уравнения – частное.

$2z = 16 : 8$ ← Чтобы найти , разделим на .

$2z = 2$ ← Чтобы найти , разделим на .

$z = 1 \in \mathbb{N}$ ← Получим значение неизвестного и проверим, принадлежит ли оно множеству \mathbb{N} .

$16 : (2 \cdot 1) = 8$ (И) ← Проверим, превращается ли уравнение в истинное равенство при подстановке полученного значения.
 $8 = 8$

Ответ: $S =$. ← Записываем ответ.

3. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение $6x - 18 = 0$.

Решение:

$6x - 18 = 0$ ← Левая часть уравнения – это разность.

$6x = 18 + 0$ ← Чтобы найти уменьшаемое, складываем
или $6x = 18$ с .

$x = 18 : 6$ ← Чтобы найти неизвестный множитель , разделим на .

$x = 3 \in \mathbb{N}$ ← Получим число 3 и проверим, принадлежит ли оно множеству \mathbb{N} .

$6 \cdot 3 - 18 = 0$ (И) ← Проверим, превращается ли уравнение при подстановке полученного значения в истинное равенство.
 $0 = 0$

Ответ: $S = \{3\}$. ← Записываем ответ.

3.3. Решение задач уравнением

Решаем и поясняем

- На станции из автобуса вышло 18 пассажиров и зашло 12. Сколько пассажиров было вначале в автобусе, если теперь их 26?

Решение уравнением

Обозначим буквой то, что спрашивается в задаче.
Запишем условие задачи математическими выражениями.

Составим уравнение.

Записываем ответ.

Пусть x – исходное число пассажиров.

Число пассажиров после остановки на станции выражается как

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x - 8 + 12 & = & 26 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 22$$

Ответ: 22 пассажира.

- Анна купила 4 ручки, а Игорь – 7 ручек по той же цене. Игорь потратил на 15 леев больше, чем Анна. Сколько стоит ручка?

Решение уравнением

Обозначим буквой то, что спрашивается в задаче.
Запишем условие задачи математическими выражениями.

Составим уравнение.

Записываем ответ.

Пусть x – цена ручек.

Анна потратила $4x$, а Игорь потратил $7x$.

Игорь потратил больше, чем Анна, на

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7x - 4x & = & 15 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \square$$

Ответ: \square леев.

- В классе 30 учеников. Сколько девочек, если мальчиков на 2 меньше?

Решение уравнением

Обозначим буквой то, что спрашивается в задаче.
Запишем условие задачи математическими выражениями.

Составим уравнение.

Записываем ответ.

Пусть x – число девочек.

Известно, что мальчиков на 2 меньше, чем девочек. Значит, число мальчиков выражается как $x - 2$.

Общее количество учеников выражается как $x + x - 2$ и равняется 30.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x + x - 2 & = & 30 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \square$$

Ответ: \square девочек.

Учимся решать

Решите задачи уравнением.

а) Сколько пассажиров было в поезде, если на станции вышла половина из них, вошло 15 человек, и стало – 163?

б) Пребывание на солнце в знойный полдень – это риск для здоровья. В один из дней Дан загорал утром на пляже 2 с половиной часа и затем ушел. Через 5 часов он вернулся на пляж и загорал 1 час 45 минут. Ушел с пляжа в 6 часов вечера. Во сколько Дан пришел утром на пляж?



в) Стоимость 18 портфелей одинаковой цены составляет 1 980 леев. Сколько стоит один портфель?

г) Иван купил 26 тетрадей в клетку и 22 тетради в линейку по одинаковой цене. Он оплатил покупку купюрой в 100 леев и получил 4 лея сдачи. Сколько стоит тетрадь?



д) За 2 недели члены экологического клуба смастерили 139 кормушек для птиц. Сколько кормушек смастерили за первую неделю, если за вторую смастерили на 33 больше?

е) На протяжении гандбольного матча было забито 48 голов. Определите финальный счет игры, если известно, что вторая команда забила в 3 раза меньше голов, чем первая.

Упражнения и задачи



1. Даны математические выражения: $2x$; $35 - z$; 0 ; $5a - b$; $7^3 \cdot 2 + 3$; $5^3 + y$; $3(5 + 2 \cdot 4)$; $8ab$; $5(12 + 3z)$; x^2z ; $18 - 3 \cdot 5$. Выпишите:

а) числовые выражения;

б) буквенные выражения.

2. Найдите значение выражения:

а) $2(x - 4)$ при $x = 5$;

б) $3 : z$ при $z = 6$;

в) $3x + 1$ при $x = 0,5$;

г) $4x$ при $x = \frac{1}{2}$;

д) $5(a + b)$ при $a = 2$, $b = 1,2$;

е) $7a + b$ при $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}$.

3. Выполните подстановку и выявите уравнения, для которых является решением число: 1) 4; 2) 10.

а) $3 + x = 28 : 4$;

б) $5(x + 2) = 32$;

в) $2a - 3 = 17$;

г) $120 : z = 12$;

д) $8y + 6 = 42 - 4$;

е) $20 + 3t = 100 : 2$.

4. Составьте уравнения, используя данные из таблиц, и решите полученные уравнения.

а)

Слагаемое	384	?
Слагаемое	?	192
Сумма	500	410

б)

Множитель	Множитель	Произведение
48	?	720
?	12	2472

в)

Уменьшаемое	1 340	?
Вычитаемое	?	2 106
Разность	134	904

г)

Делимое	Делитель	Частное	Остаток
384	?	16	0
129	7	?	3

5. Поставьте в соответствие каждому уравнению его решение:

$$x + 5 = 8$$

$$12x = 60$$

$$3y - 12 = 0$$

$$a - 10 = 2$$

$$120 : z = 40$$

4

5

3

12

10

6. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение и выполните проверку:

а) $x + 18 = 24$;

б) $a + 35 = 20$;

в) $8z = 160$;

г) $5y = 18$;

д) $x : 12 = 96$;

е) $t : 6 = 100$;

ж) $9x - 1 = 0$;

з) $4x - 20 = 0$.

7. В мешке x кг сахара. Поясните, что в данном контексте могут означать выражения:

а) $x - 5$, $x + 5$;

б) $10x$, $x : 10$;

в) $100 : x$, $100 - x$.

8. Первый токарь изготавливает a деталей в час, а второй – b деталей в час. Вычислите, сколько деталей они изготавливают вместе за 8 часов, если $a = 35$ и $b = 32$.

9. В зернохранилище было x тонн зерна. На y машинах было вывезено по 3 т зерна. Сколько зерна осталось в хранилище, если $x = 28$ и $y = 4$?

10. Решите задачи уравнениями.

а) Саша купил 4 фломастера, а Маша – 6 фломастеров по той же цене. Ребята оплатили покупку купюрой в 50 леев. Сколько стоит один фломастер?

б) Дана решила 17 кроссвордов из сборника. Сколько нерешенных кроссвордов осталось, если в сборнике 12 страниц, а на каждой странице 2 кроссворда?

в) Воодушевившись рассказом Лисы, Волк начал строить планы: „Буду держать хвост в проруби, пока не наловлю столько рыбы, чтобы хватило и еще осталось. Продам на базаре четверть всех пойманных рыб и засолю 18 рыбин – ровно половину того, что продам“. Сколько рыб планировал поймать Волк?

11. Приведите каждое выражение к более простому виду, затем найдите его значение:

- а) $4x + 26x - 7x + 2x$, для $x = 14$; б) $41a - 8a - 13a + 13a$, для $a = 101$;
 в) $19x + 24x - 16 + x$, для $x = 11$; г) $22 - 5x - x - 4$, для $x = 0$;
 д) $3a \cdot 2b$, для $a = 5$ и $b = 10$; е) $12x \cdot 4y \cdot 3$, для $x = 2$ и $y = 3$.

12. Пусть a – это количество банок, а b – количество литров сока. Поясните, что в данном контексте может означать выражение:

- а) $b : a$; б) $b : a - 1$.

13. Составьте уравнение по каждой цепочке действий, затем решите:

а) $\boxed{a} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{} \xrightarrow{+ 3} \boxed{30}$ б) $\boxed{b} \xrightarrow{+ 3} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{30}$

в) $\boxed{c} \xrightarrow{- 3} \boxed{} \xrightarrow{: 3} \boxed{} \xrightarrow{+ 3} \boxed{30}$

14. Перечертите и заполните таблицу:

x	8	0	3^3	$\frac{1}{2}$	10	3,5	1	$\frac{3}{4}$
$3(4x - 1)$	93							
$16x^2 + 10$								



15. На кондитерской фабрике было x коробок и y конфет. В каждую коробку помещается не более 20 конфет. Объясните, что может означать в этом случае выражение:

- а) $20x$; б) $y : x$.

16. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение:

- а) $9x + 28 = 2755$; в) $3(x + 7) = 75$; д) $111 + 2x + 29 = 10^3$;
 $510 + 14x = 762$; $14(12 - x) = 70$; $5x + 52 - 31 = 30^2 - 19$;
 б) $5y - 97 = 943$; г) $(82 + y) : 6 = 17$; е) $5(y - 2) + 3 = 38$;
 $410 - 7y = 151$; $(y - 33) : 9 = 305$; $9 + 2(14 - y) = 15$.

17. Решите задачи уравнениями.

- а) Возраст матери на 3 года больше утроенного возраста Влада. Сколько лет мальчику, если его матери 36 лет?
 б) Аня купила 6 черных и 8 синих ручек по одинаковой цене. Сколько стоит ручка, если Аня оплатила покупку купюрой в 100 леев и получила сдачу 16 леев.
 в) Сумма числа, его предыдущего и последующего чисел равна 147. Какое это число?

18. Используя данные таблицы, составьте уравнения, затем решите их на множестве \mathbb{N} :

а) Слагаемое	215	?	24,06
Слагаемое	?	2011	6,84
Сумма	729	3405	?

б) Уменьшаемое	688	?	144,28
Вычитаемое	?	2012	68,28
Разность	12	20	?

в) Множитель	14	?	42,5
Множитель	?	41	14
Произведение	350	451	?

г) Делимое	688	?	68,4
Делитель	?	15	10
Частное	43	420	?

19. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! 

Составьте уравнение по каждой цепочке действий, затем решите его на множестве \mathbb{N} :

а) $x \xrightarrow{\cdot 6} \square \xrightarrow{-2} 124$

б) $t \xrightarrow{+5} \square \xrightarrow{\cdot 4} 100$

в) $z \xrightarrow{-10} \square \xrightarrow{:2} 55$

г) $a \xrightarrow{:8} \square \xrightarrow{\cdot 10} 160$

20. Сереже 7 лет, а его брату Максиму 1 год. Сколько лет будет Сереже, когда его возраст будет в два раза больше возраста Максима?



21. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение:

а) $3(1 - 2x) + 2^3 = 32$;

б) $(2^2 \cdot 15) : (3y + 2) = 12$;

в) $3^3 \cdot 2^3 - 3x = 12$;

г) $4^{16} : 4^{12} - 5x = 1$.

22. Решите задачи уравнениями.



а) Автосалон за год продал 68 автомобилей марки BMW и марки Ford. Автомобилей марки BMW продали на 12 больше, чем автомобилей марки Ford. Сколько автомобилей марки BMW было продано?

б) В домашней библиотеке Миши всего 124 книги на русском и английском языках. Книг на русском языке в 3 раза больше, чем на английском. Сколько книг на русском языке в домашней библиотеке Миши?

в) Сколько пассажиров было в поезде, если на станции вышла половина пассажиров, зашло 28 человек и в поезде стало 124 пассажира?

23. Решите задачи уравнениями.

а) В саду растут яблони и груши, всего 49 деревьев. Яблонь на 5 больше, чем груш. Сколько яблонь в саду?

б) На пастбище в 3 раза больше овец, чем коз, а вместе – 52 животных. Сколько коз?

в) Галстук в 3 раза дешевле рубашки, а рубашка на 160 леев дороже, чем галстук. Сколько стоит галстук?

г) Вместе у курицы, утки и гусыни 45 птенцов. У утки на 5 птенцов больше, чем у гусыни, а у курицы в 2 раза больше птенцов, чем у гусыни. Сколько гусят?

24. **РАБОТАЕМ В ГРУППАХ!**  Проект *Натуральные числа в моей жизни*. Класс делится на группы по 6-8 учащихся. Каждая группа должна представить плакаты/таблицы с примерами приложения натуральных чисел: а) в семейной жизни; б) в школе; в) на дне рождения; г) на экскурсии.

25. Рассмотрим пять последовательных натуральных чисел. Зная, что среднее число является самым большим четным трехзначным числом, найдите сумму этих пяти чисел.

26. Найдите последующее числа a , если:

а) $a = 121 : 11 + 5 \cdot (625 : 25 - 10) + 3^3 + 2^2$;

б) $a = 3 \cdot (400 : 40 - 10) + 4^2 \cdot 5^2 - 100$.

27. Найдите предыдущее числа a , если:

а) $a = 4 \cdot \{60 : 30 + 4 \cdot [100 - 3 \cdot (70 : 7 + 14)]\} - 10$;

б) $a = 25 + 25 \cdot (100 : 4 + 10) - 2 \cdot [70 - (100 - 50)]$.

28. Альбом стоит x леев. Поясните, что в данном контексте может означать выражение:

а) $x + 20$; б) $x - 20$; в) $20x$;

г) $200 : x$; д) $2x + 5$.

29. На пастбище паслись 100 овец и коз. Если на пастбище придет в три раза больше коз, чем было изначально, и уйдет 10 овец, то на пастбище будет столько же овец, сколько коз. Сколько овец и сколько коз было вначале?



30. Пасхальный кулич стоит как пять хлебных батончиков, а кулич и три батона стоят 48 леев. Сколько стоит хлебный батон? А пасхальный кулич?

31. Найдите три последовательных натуральных числа, если их сумма равна 336.



Задания для осмысления

1. Какие числа называются натуральными?
2. Какие действия над натуральными числами вы изучили?
3. Какими свойствами обладает сложение натуральных чисел?
4. Какими свойствами обладает умножение натуральных чисел?
5. Что такое степень натурального числа с натуральным показателем?
6. Какими свойствами обладает степень числа?
7. Какие правила помогают при вычислении степеней?
8. Что такое делитель числа? А кратное числа?
9. Какие делители называются собственными, а какие несобственными делителями числа?
10. Существует ли такое число, которое и кратно некоторому числу и является его делителем?
11. При каком условии число делится на 2? А на 3? На 5? На 9? На 10?
12. Какие числа называются простыми? А какие составными?
13. Существуют ли простые четные числа?
14. Какое число называют общим делителем двух чисел? А какое число называют общим кратным этих чисел?
15. Как найти наибольший общий делитель двух чисел? А наименьшее общее кратное?
16. Что такое уравнение с одним неизвестным?
17. Что такое решение уравнения?
18. Что значит решить уравнение на множестве \mathbb{N} ?
19. Приведите пример уравнения, которое не имеет решений на множестве \mathbb{N} .
20. Составьте по одному уравнению каждого из изученных видов и решите их.
21. Составьте задачи, которые решаются уравнениями, используя данные из повседневной жизни.



ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. Дано множество:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 60 < x < 70 \text{ и } x : 3\}$.
 а) *Истинно* или *Ложно*? **1**
 „Натуральное число кратно 3 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 3“.
 б) Задайте множество A перечислением его элементов. **3**
 в) Выберите одно четное число и одно нечетное число среди элементов множества A и найдите их НОД. **7**
2. Макс и его дедушка вместе собрали 100 кг слив. Сливы распределили по 12 кг в каждый из ящиков, имеющих у дедушки, и осталось еще 16 кг.
 а) Впишите натуральное число: **1**
 $\square^4 = 16$.
 б) Определите, сколько ящиков было у дедушки. **6**
 в) Найдите сумму денег, которую получит дедушка после продажи всех ящиков со сливами по цене 8 леев/кг. **3**
3. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение: **6**
 $9x - 2^2 \cdot 6^2 = 315$.

II вариант

1. Дано множество:
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 80 < x < 100 \text{ и } x : 9\}$.
 а) *Истинно* или *Ложно*? **1**
 „Натуральное число кратно 9 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 9“.
 б) Задайте множество B перечислением его элементов. **3**
 в) Выберите одно четное число и одно нечетное число среди элементов множества B и найдите их НОК. **7**
2. Дана и ее бабушка вместе собрали 106 кг огурцов. Огурцы распределили по 14 кг в каждый из ящиков, имеющих у бабушки, и осталось еще 8 кг.
 а) Впишите натуральное число: **1**
 $\square^3 = 8$.
 б) Определите, сколько ящиков было у бабушки. **6**
 в) Найдите сумму денег, которую получит бабушка после продажи всех ящиков с огурцами по цене 7 леев/кг. **3**
3. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение: **6**
 $2^4 \cdot 3^4 - 5x = 21$.

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

- 
- §1. Множество целых чисел
 - §2. Сравнение и упорядочивание целых чисел
 - §3. Сложение целых чисел
 - §4. Вычитание целых чисел
 - §5. Умножение целых чисел
 - §6. Деление целых чисел
 - §7. Степень целого числа с натуральным показателем. Порядок выполнения действий
 - §8. Решение уравнений на множестве Z

1

2

3

4

5



§1 Множество целых чисел

1.1. Целые числа

Исследуем и узнаем

1 ...И опустил медведь свой хвост в пруд, захотел и он поймать много рыбы. Прождал так медведь всю ночь, думая о предстоящей трапезе. К утру температура воздуха достигла 10°C .

Примерз ли у медведя хвост?

Решение:

Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать, что показывает термометр:



О температуре 10°C тепла говорят: 10°C выше нуля (или плюс 10°C) и записывают: $+10^{\circ}\text{C}$.

Эта температура **положительная**.

О температуре 10°C холода говорят: 10°C ниже нуля (или минус 10°C) и записывают: -10°C .

Эта температура **отрицательная**.

2 Рассмотрите рисунки и определите, каким словом необходимо дополнить предложение, чтобы получить истинное высказывание:



Зимой, как правило, температура воздуха в Молдове .



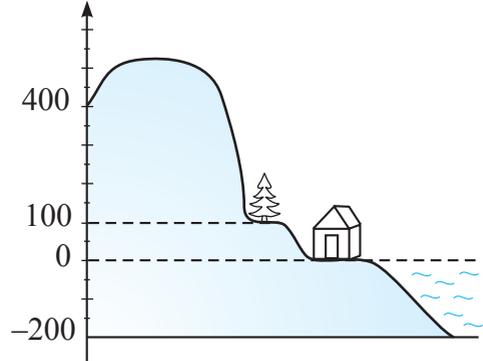
Летом, как правило, температура воздуха в Молдове .

Замечаем

Положительные и отрицательные числа используются в географии при обозначении расположения объектов относительно уровня моря.

В банковских операциях, как правило, доходы обозначают положительными числами, а расходы – отрицательными числами.

Если перед целым числом стоит знак „-“, то говорим, что целое число – **отрицательное**.



Если перед целым числом стоит знак „+“, то говорим, что целое число – **положительное**.

Отрицательные целые числа:
..., -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1

Нуль



Положительные целые числа:
+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, ...

ни положительное,
ни отрицательное число

Знак „+“ перед положительным числом можно опустить.

Возьмите на заметку

Целые отрицательные числа, 0 и целые положительные числа образуют **множество целых чисел**. Множество целых чисел обозначается через \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

Множество \mathbb{Z}^* называется **множеством целых ненулевых чисел**.

Из истории

Долгое время отрицательные числа не использовались в вычислениях. Их считали „ложными“ числами и говорили, что они „меньше, чем ничего (ноль)“. Первыми, кто стал ассоциировать положительные числа с имуществом, а отрицательные – с долгами, были индусы. Китайцы для написания чисел использовали цвета: красный – для положительных чисел, черный – для отрицательных.

В Европе отрицательные числа получили признание как действительно существующие лишь в первой половине XVIII века.

В наше время отрицательные числа являются частью повседневной жизни.

1.2. Числовая ось. Противоположные числа

Исследуем и узнаем

1 Диана, прочитав в одной из книг об античных математиках, узнала, что Птоломей жил во II веке, Пифагор – в VI веке до н.э., а Эвклид – в III веке до н.э. Она захотела узнать, кто жил раньше. Для этого Диана расположила указанные века на хронологической оси (лента времени).

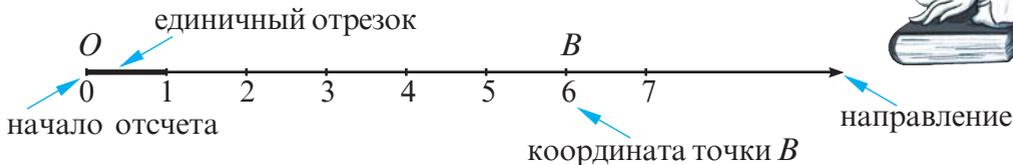


Ответ: .

Замечаем

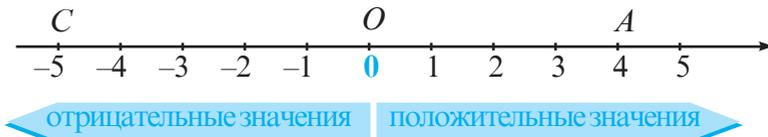
На хронологической оси отмечено начало отсчета (рождение Христа), направление и единичный отрезок (век).

В V классе я построил такую числовую ось.



Дополним числовую ось, построенную в V классе, отметив слева от точки O числа $-1, -2, -3, \dots$

Числовая ось



Возьмите на заметку

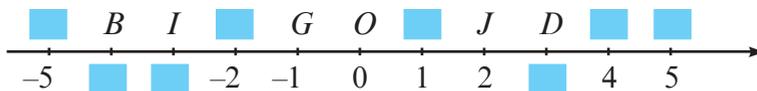
Прямую с выбранными на ней началом отсчета, направлением и единичным отрезком называют **числовой осью** (или **координатной прямой**).

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА



- 1 Постройте числовую ось.
- 2 Отметьте на ней точки:
 $A(-2)$, $B(-4)$, $C(1)$, $D(3)$, $E(4)$, $F(-5)$, $G(-1)$, $H(5)$, $I(-3)$, $J(2)$.
- 3 Назовите пары точек, равноудаленных от начала отсчета.
В чем отличие координат точек каждой пары?

Решение:



Пары точек, равноудаленных от начала отсчета:

$F(-5)$ и \square , $B(-4)$ и \square , \square и $D(3)$, \square и $J(2)$, \square и \square .

Координаты каждой пары отличаются знаком.

Числа 1 и -1 называются **противоположными**.

Противоположными числами являются: -5 и 5 ; \square и \square ; \square и \square ;

\square и \square ; \square и \square .

Возьмите на заметку

- ♦ Для каждого целого ненулевого числа a числа a и $-a$ называются **противоположными**. Противоположные числа отличаются друг от друга только знаками.
Противоположным числу a является число $-a$, а противоположным числу $-a$ является число a .
Число 0 противоположно самому себе.
- ♦ Множество целых чисел состоит из нуля, множества ненулевых натуральных чисел и чисел, противоположных им.

Примеры:

Если $a = 2$, то $-a = -2$.

Если $a = -5$, то $-a = -(-5) = 5$.

Применяем

- 3 Используя результаты практической работы, назовите число, противоположное числу: 11, 17, -12 , -23 , 1411, -695 .

1.3. Модуль целого числа

1 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА



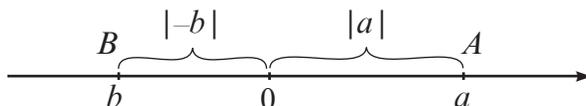
- ① Постройте числовую ось.
- ② Отметьте на ней точки $A(-4)$, $B(3)$, $C(-5)$, $D(5)$.
- ③ Найдите расстояния OA , OB , OC и OD , где O – начало отсчета.
- ④ Перечертите таблицу в тетрадь и заполните ее по образцу.

Точка	Координата	Отрезок	Длина отрезка (Расстояние от заданной точки до точки O)
A	-4	OA	4
B			
C			
D			



Возьмите на заметку

Расстояние от начала отсчета (точки O) до точки $A(a)$, $a \in \mathbb{Z}$, называется **модулем** (или **абсолютным значением** числа a) и обозначается через $|a|$.



Применяем

- 2 Используя результаты практической работы, вычислите:

$$|-4| = 4$$

$$|5| = \blacksquare$$

$$|-21| = \blacksquare$$

$$|3| = \blacksquare$$

$$|-8| = 8$$

$$|2005| = \blacksquare$$

$$|-5| = \blacksquare$$

$$|17| = 17$$

$$|0| = \blacksquare$$

- 3 Даны целые противоположные числа:

а) -5 и 5 ;

б) -80 и 80 ;

в) 18 и -18 .

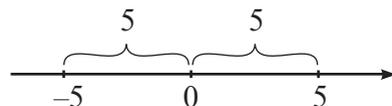
Найдите модули этих чисел. Что вы заметили?

Решение:

а) $|-5| = 5$, и $|5| = 5$. Значит, $|-5| = |5|$.

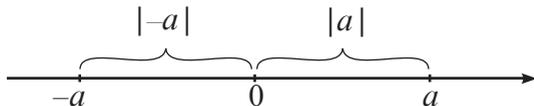
б) $|-80| = \blacksquare$, и $|80| = \blacksquare$. Значит, \blacksquare .

в) $|18| = \blacksquare$, и $|-18| = \blacksquare$. Значит, \blacksquare .



Возьмите на заметку

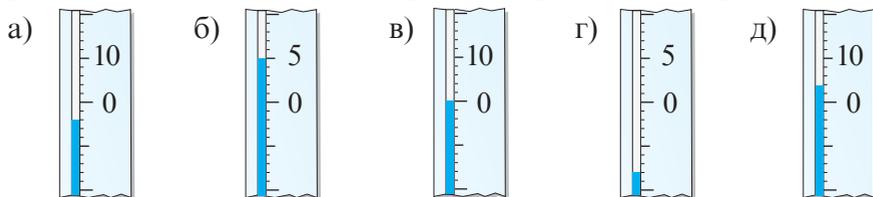
- ◆ Абсолютное значение (или модуль) любого целого числа является неотрицательным числом.
- ◆ Для любого целого числа a : $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0; \\ 0, & \text{если } a = 0; \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$
- ◆ Модули противоположных чисел равны: $|-a| = |a|$



Упражнения и задачи



1. Прочтите целые числа:
-3000, -100, -24, -12, -2, 0, 12, 78, 2005, 30007.
2. Запишите с помощью цифр целые числа:
„минус девяносто девять“, „плюс пятнадцать“, „минус две тысячи пятьдесят“, „минус шесть миллионов“, „плюс двадцать миллиардов“.
3. Среди чисел -11, 28, -33, 0, 69, -101, 202, -205, 44, -78, 27, 303, 0, 1012, -600, 99 укажите числа:
а) отрицательные; б) положительные;
в) неотрицательные; г) неположительные.
4. Прочтите показания термометров, изображенных на рисунке:



5. Запишите, используя знаки „+“ и „-“:
а) извещения метеорологической службы:
1) 5 градусов тепла; 2) 3 градуса холода;
б) изменение уровня воды в реке Прут:
1) уменьшился на 5 см; 2) увеличился на 12 см;
в) прибыль и долг:
1) прибыль 20 000 леев; 2) долг 750 леев.
6. Андрей потратил все деньги со счета смартфона. Оператор мобильной связи предоставил ему ссуду в размере 20 леев. Сколько денег будет на счету смартфона после того, как Андрей потратит кредит?



7. Определите устно. *Истинно* или *Ложно*?



а) $-5 \notin \mathbb{Z}$;

б) $17 \notin \mathbb{Z}$;

в) $28 \in \mathbb{N}$;

г) $4\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}^*$;

д) $0 \in \mathbb{Z}^*$;

е) $-1 \notin \mathbb{N}$.

8. Постройте в тетради вертикальную прямую и отметьте на ней точку O . Отметьте на этой прямой точки A, B, C, D , если:

а) точка A на 8 клеток выше точки O ;

б) точка D на 5 клеток ниже точки O ;

в) точка C на 6 клеток ниже точки A ;

г) точка D на 4 клетки выше точки B .

9. Рассмотрите домашний термометр для измерения температуры тела. Какую температуру он показывает: положительную или отрицательную? Обоснуйте ответ.

10. Нарисуйте шкалу термометра и отметьте на ней температуру:

а) -5°C ;

б) $+6^\circ\text{C}$;

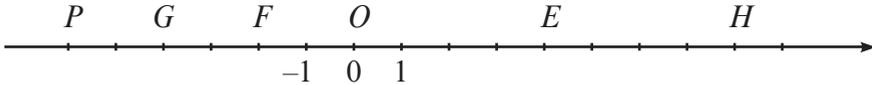
в) -4°C ;

г) $+2^\circ\text{C}$;

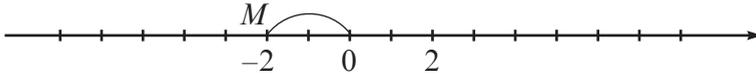
д) -1°C .

11. а) Отметьте на числовой оси целые числа: $-6, 7, 8, -8, 9, -10$.

б) Рассмотрите числовую ось и определите координаты точек E, F, G, H, P .



12. Определите координаты точек, в которых будет располагаться точка $M(-2)$ при ее смещении по оси:



а) на 2 единицы влево;

б) на 2 единицы вправо;

в) на 5 единиц влево;

г) на 5 единиц вправо;

д) на 9 единиц вправо;

е) на 10 единиц влево.

13. Запишите целые числа, которые от начала отсчета на числовой оси расположены на расстоянии:

а) 11 единиц; б) 65 единиц; в) 78 единиц; г) 100 единиц.

14. Отметьте на числовой оси точки: $A(-7), B(-9), C(10), D(6)$.

15. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! Назовите три целых числа, расположенных на числовой оси:



а) правее числа 15;

б) левее числа -13 ;

в) правее числа -18 ;

г) левее числа -5 ;

д) между числами -3 и 5 ;

е) между числами -1 и 8 .

16. Запишите числа, противоположные целым числам:

а) $-65, 18, -22, -30, 11, 100, -2011, 0$;

б) $100, -81, -36, 48, -99, 0, 33, -2012$.

17. Определите устно. *Истинно* или *Ложно*?



а) Противоположным числом 17 является -17 .

б) Противоположным числом -5 является -5 .

в) Противоположным числом 8 является -3 .

г) Противоположным числом -25 является 25.

18. На каком расстоянии от пункта O находится автомобиль, если он доехал до пункта: а) A ; б) B ?



19. Перечертите и заполните таблицу:

a	5	-8		72	0		
$-a$			-3			-23	7

20. Найдите расстояние от точки отсчета до точки:

а) $A(20)$; б) $B(-8)$; в) $C(-123)$; г) $D(129)$;

д) $O(0)$; е) $F(-79)$; ж) $G(2023)$; з) $H(-411)$.

21. Найдите абсолютную величину числа:

а) 19; б) -33 ; в) -87 ; г) 104;

д) -1222 ; е) 69; ж) -215 ; з) -98 .

22. Дополните:

а) если $a \in \{-11, -9, -5, 6, 29, 388\}$, то $|a| \in \{ \quad \}$;

б) если $a \in \{33, -9, -55, 44, -66, 77, -88\}$, то $|a| \in \{ \quad \}$.

23. Отметьте на числовой оси точки, модуль которых равен:

а) 6; б) 7; в) 0; г) 8; д) 5.

24. Велосипедист начал свой путь от дорожного указателя 68 км. Он ехал со скоростью 15 км/ч. Рядом с каким дорожным указателем велосипедист сможет оказаться через 2 часа? Сколько решений имеет задача?



25. Запишите элементы множества:

- а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x < 5\}$; б) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 7\}$;
в) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 8\}$; г) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 6\}$.

26. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Из повседневной жизни приведите примеры применения положительных и отрицательных чисел.

27. Назовите целые числа, расположенные на числовой оси между числами:

- а) 10,5 и 29,1; б) -5 и 12,4; в) -35 и -21;
г) 11,2 и 31,8; д) -8 и 10,04; е) -46 и -31.

28. Запишите все натуральные числа меньше 9 и числа, противоположные им.

29. В каком направлении и на сколько единиц надо переместить предмет из точки:

- а) $A(-5)$ до точки $B(3)$; б) $C(6)$ до точки $D(-2)$?

30. После перемещения предмета из точки A в отрицательном направлении на 4 единицы он оказался в точке $B(-2)$. Найдите координаты точки A .

31. После перемещения некоторого предмета из точки C в положительном направлении на 7 единиц он попал в точку $D(3)$. Найдите координаты точки C .

32. Дополните:

- а) если $m \in \{0, -2, 5, -10\}$, то $-m \in \{ \quad \}$;
б) если $k \in \{-3, 2, -7, 11\}$, то $-k \in \{ \quad \}$;
в) если $a \in \{-9, 3, -1, 8\}$, то $-(-a) \in \{ \quad \}$.

33. Укажите устно число, чтобы получить верное равенство:

- а) $-(-35) = \quad$; б) $17 = \quad$;
в) $-(-201) = \quad$; г) $126 = \quad$.

34. Найдите a , если:

- а) $|x| = 15$; б) $|x| = 123$; в) $|x| = 0$; г) $|x| = 63$; д) $|x| = 2012$.

35. Найдите число:

- а) положительное, модуль которого равен:
1) 48; 2) 55; 3) 101; 4) 465;
б) отрицательное, модуль которого равен:
1) 35; 2) 511; 3) 696; 4) 1001.

36. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



Впишите один из знаков сравнения

($<$, $=$ или $>$).

а) $|-7| \bullet |8|$;

в) $|-11| \bullet 10$;

д) $|-102| \bullet |-98|$;



б) $|25| \bullet |-13|$;

г) $|-66| \bullet |66|$;

е) $|15| \bullet |-35|$.

37. Вычислите:

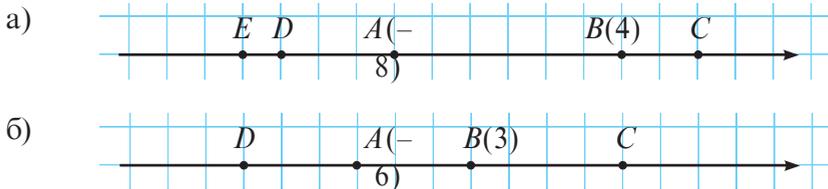
а) $|-18| + |17| - |-30| \cdot 0$;

б) $|28| - |-14| + |-55| \cdot 0$;

в) $|68| : |-2| + |29| - |-15|$;

г) $|-102| : |-3| + |91| - |-69|$.

38. Перечертите рисунок и отметьте начало отсчета. Найдите координаты точек C , D , E .



39. Найдите число a , если:

а) $-(-a) = 12$;

б) $-a = -(17)$;

в) $a = -\{-[-(-25)]\}$.

40. Отметьте на числовой оси целые числа x , удовлетворяющие условию:

а) $|x| \leq 5$;

б) $|x| \leq 6$;

в) $|x| < 7$;

г) $|x| < 8$.

41. Запишите три целых значения x , удовлетворяющие условию:

а) $x < 0$ и $|x| < 7$;

б) $x > 0$ и $|x| \leq 5$.

42. Запишите элементы множества:

а) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$;

б) $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 1\}$;

в) $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$;

г) $D = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 4\}$.

43. Найдите $|x|$, если расстояние между точками $B(x)$ и $C(-x)$ равно 8 единицам измерения.

44. Истинно или Ложно?



1) Если $a < 0$, то $|a| = a$.

2) Если $|a| = -a$, то $a = 0$.

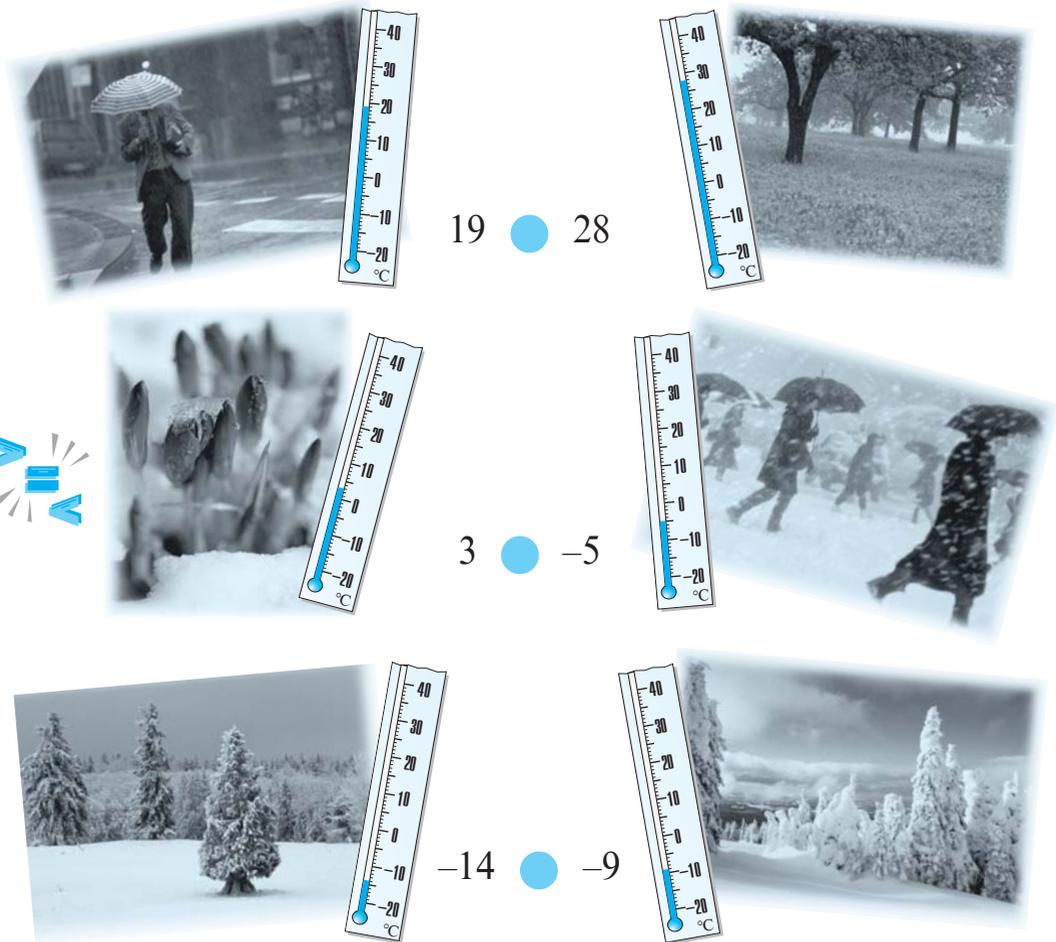
3) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.

4) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

§ 2 Сравнение и упорядочивание целых чисел

Исследуем и узнаем

1 Рассмотрите рисунки и поставьте необходимый знак сравнения:



19 \bullet 28

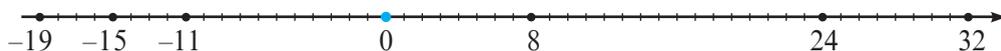
3 \bullet -5

-14 \bullet -9

2 Сравните целые числа: а) 32 и 24; б) 8 и -15; в) -19 и -11.

Решение:

Отметим заданные числа на числовой оси:



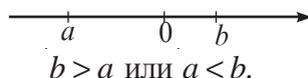
а) Число 32 расположено правее числа 24. Значит, 32 \bullet 24.

б) Число 8 расположено правее числа -13. Значит, 8 \bullet -13.

в) Число -19 расположено числа -11. Значит, -19 \bullet -11.

Возьмите на заметку

♦ Из двух чисел, изображенных на числовой оси, больше то, которое расположено правее другого.



♦ Любое отрицательное целое число меньше любого положительного целого числа.

♦ Ноль меньше любого положительного целого числа:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

♦ Ноль больше любого отрицательного целого числа:

$$\dots -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0.$$

3 Сравните:

а) $17 \bullet 15$, $|17| \bullet |15|$;

б) $100 \bullet 200$, $|100| \bullet |200|$;

в) $-7 \bullet -4$, $|-7| \bullet |-4|$;

г) $-98 \bullet -5$, $|-98| \bullet |-5|$.



Возьмите на заметку

Из двух положительных целых чисел больше то, модуль которого больше.
Из двух отрицательных целых чисел больше то, модуль которого меньше.

Упражнения и задачи



1. Отметьте на числовой оси числа 6, 2, -4, -8, 10, 3, -5 и определите:

а) числа, больше 0;

б) числа, меньше 0;

в) наибольшее число;

г) наименьшее число.

2. Запишите в виде неравенства высказывание:

а) Число 111 – положительное.

б) Число -200 – отрицательное.

в) Число x – положительное.

г) Число y – неотрицательное.

3. Впишите один из знаков сравнения (<, = или >):

а) $25 \bullet 17$;

б) $-19 \bullet 6$;

в) $-15 \bullet -4$;

г) $-7 \bullet 0$;

д) $11 \bullet -(-11)$;

е) $-24 \bullet -23$;

ж) $16 \bullet -1$;

з) $8 \bullet -(-8)$.



4. Запишите в порядке возрастания числа:

а) 31, -27, -1, 0, 14, -17, 63, -3;

б) 44, -33, 22, -11, 0, 19, 54, -4.

5. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  В Бельцах и Кагуле измеряли температуру воздуха в декабре. Результаты указаны в таблице:

Город \ Дата	1	5	10	15	20	25
Кагул	0 °С	-5 °С	-10 °С	-12 °С	-16 °С	-19 °С
Бельцы	-2 °С	-8 °С	-10 °С	-15 °С	-18 °С	-17 °С

а) Сравните температуру воздуха в Бельцах и Кагуле за эти дни. В каком городе было теплее?

б) Какой из дней был самым холодным в этих городах? А самым теплым?



6. Определите, между какими соседними целыми числами заключено число:

- а) -5; б) -17; в) 7;
г) 22; д) 0,5; е) 18,25.

Образец:
а) Между -6 и -4.
Пишем: $-6 < -5 < -4$.

7. Определите устно, какая из температур выше:

- а) $a = 10^\circ\text{C}$, $b = 15^\circ\text{C}$; б) $a = 21^\circ\text{C}$, $b = 19^\circ\text{C}$;
в) $a = 18^\circ\text{C}$, $b = -14^\circ\text{C}$; г) $a = 12^\circ\text{C}$, $b = -5^\circ\text{C}$.

8. Впишите подходящую цифру:

- а) $-6481 < -648\blacksquare$; б) $-4\blacksquare78 > -4278$;
в) $1608 < 160\blacksquare$; г) $45\blacksquare6 > 4546$.

9. Запишите пять последовательных целых чисел:

- а) меньше 1; б) меньше -2;
в) меньше -6; г) больше -4.

10. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Запишите в порядке возрастания числа:

- а) -24, 16, $-|-18|$, $-(-15)$, $|63|$, -19, 21;
б) -48, 32, $|-61|$, $-|23|$, $|35|$, $-(-17)$, -61.

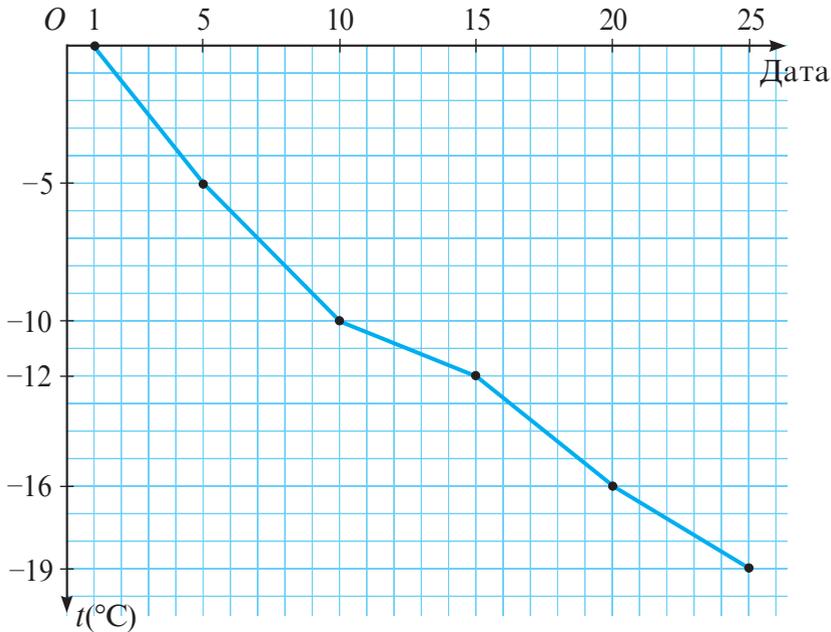
11. РАБОТАЕМ В ГРУППАХ!



Проект *Ось исторических событий*

из античной эпохи. Класс делится на группы по 6-8 учащихся. Каждая группа, изучив соответствующие аспекты истории, должна представить плакат с осью исторических событий из античной эпохи.

12. Дима изобразил температуру, зарегистрированную в Кагуле (см. таблицу задания 5), с помощью следующей схемы:



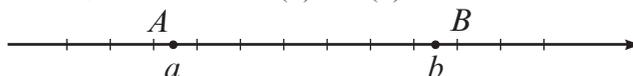
Учитывая, что температура постоянно понижалась, определите, в какие дни могла быть следующая температура: а) -4°C ; б) -14°C . Изобразите с помощью диаграммы температуру, зарегистрированную в Бельцах (см. таблицу задания 5).

13. Для каких целых чисел a верно неравенство $a + |a| > 0$?
14. Известно, что целые числа m и n являются отрицательными. Сравните числа:

- а) $-m$ и n ; б) $-|n|$ и n ; в) $|m|$ и m ;
 г) $|n|$ и m ; д) $-n$ и $|n|$; е) $|m|$ и $-m$.



15. На числовой оси даны точки $A(a)$ и $B(b)$.



Можно ли определить:

- а) какое из чисел a и b больше; б) модуль какого из чисел a и b больше?

§3 Сложение целых чисел

3.1. Сложение целых чисел с одинаковыми знаками

Исследуем и узнаем

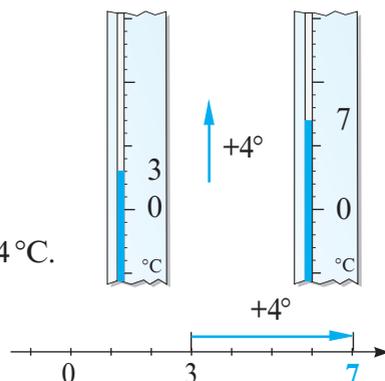
1 Утром температура воздуха была $+3^{\circ}\text{C}$. Какой стала температура воздуха в полдень, если она поднялась на 4°C ?

Решение:

Обозначим повышение температуры через $+4^{\circ}\text{C}$.

Получим: $(+3) + (+4) = 3 + 4 = 7$.

Ответ: $+7^{\circ}\text{C}$.



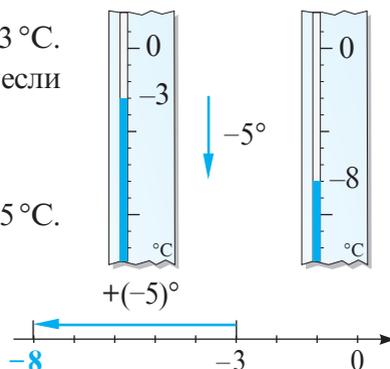
2 Вечером температура воздуха была -3°C . Какой стала температура воздуха к полуночи, если она понизилась на 5°C ?

Решение:

Обозначим понижение температуры через -5°C .

Получим: $-3 + (-5) = \blacksquare$.

Ответ: $\blacksquare^{\circ}\text{C}$.



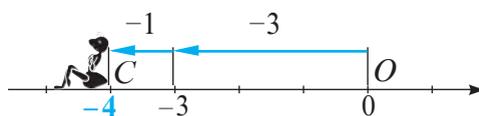
3 Муравей переместился по числовой оси из точки O в отрицательном направлении сначала на 3 единицы, затем еще на единицу и оказался в точке C .

Найдите координаты точки C .

Решение:

$-3 + (\blacksquare) = \blacksquare$.

Ответ: $C(\blacksquare)$.



Можно решить и так:

$$\begin{aligned} -3 + (-1) &= \\ &= -(|-3| + |-1|) = \\ &= -(3 + 1) = -4. \end{aligned}$$



Возьмите на заметку

Чтобы сложить два целых числа с одинаковыми знаками, надо:

- ① сложить их модули;
- ② поставить перед полученным числом общий знак.

3.2. Сложение целых чисел с разными знаками

Исследуем и узнаем

1 Коля и Саша играли в компьютерные игры. У Коли 7 выигрышей и 8 проигрышей, а у Саши – 6 выигрышей и 4 проигрыша. Кто выиграл, если каждый проигрыш аннулирует один выигрыш?

Решение:

Обозначим число выигрышей через положительные числа, а число проигрышей через отрицательные.

Число проигрышей у Коли на единицу больше, чем выигрышей.

Получим: $(+7) + (-8) = -1$.

Число выигрышей у Саши на 2 больше, чем проигрышей:

Получим: $(6) + (-4) = \blacksquare$.

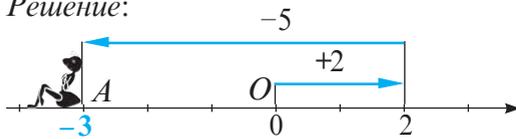
Ответ: \blacksquare .



2 Муравей переместился по числовой оси из точки O в положительном направлении сначала на 2 единицы, затем еще на 5 единиц в отрицательном направлении и оказался в точке A .

Найдите координаты точки A .

Решение:



$$+2 + (-5) = -3.$$

Ответ: -3 .

Я решил так:

$$+2 + (-5) = -(|-5| - |+2|) = - (5 - 2) = -3$$

$$+8 + (-2) = +(8 - 2) = +6$$

$$-7 + (+3) = -(7 - 3) = -4$$



Возьмите на заметку

Чтобы сложить два целых числа с разными знаками, надо:

- 1 из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
- 2 поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

• Объясните, почему $+3 + (-3) = 0$.

Возьмите на заметку

Сумма двух противоположных целых чисел равна нулю:

$$a + (-a) = 0, \text{ для любого } a \in \mathbb{Z}.$$

3.3. Свойства сложения целых чисел

Исследуем и узнаем

1 а) Рассмотрите таблицу. Подставьте вместо a и b целые числа и проверьте истинность выводов, записанных в таблице.

a	b	$a + b$	$b + a$	Вывод
-6	4	$-6 + (+4) = -2$	$+4 + (-6) = -2$	$a + b = b + a, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$
-4	0	$-4 + 0 = -4$	$0 + (-4) = -4$	$a + 0 = 0 + a = a, a \in \mathbb{Z}$

б) Рассмотрите таблицу. Подставьте вместо a, b и c целые числа и проверьте истинность вывода, записанного в таблице.

a	b	c	$a + (b + c)$	$(a + b) + c$	Вывод
-2	+7	-3	$-2 + (+7 + (-3)) =$ $= -2 + (+4) = 2$	$(-2 + (+7)) + (-3) =$ $= 5 + (-3) = 2$	$a + (b + c) = (a + b) + c,$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Свойства сложения целых чисел

1° Сложение целых чисел коммутативно:

$$a + b = b + a \text{ для любых } a, b \in \mathbb{Z}.$$

2° Сложение целых чисел ассоциативно:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

3° Целое число 0 является нейтральным элементом сложения целых чисел:

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ для любого } a \in \mathbb{Z}.$$

4° Для каждого целого числа a есть только одно противоположное ему число $-a$, $-a \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$a + (-a) = -a + a = 0 \text{ для любого } a \in \mathbb{Z}.$$

Применяем

2 Вычислите $((-2) + (-3)) + 3$.

Решение:

$$\underbrace{((-2) + (-3)) + 3}_{\text{свойство 2°}} = (-2) + (-3 + 3) = -2 + 0 = -2.$$

свойство 2°

Упражнения и задачи



1. Выполните с помощью числовой оси сложение:

а) $+3 + (+7)$;

б) $-2 + (-6)$;

в) $-1 + (-8)$;

г) $+6 + (+1)$;

д) $-4 + (-9)$;

е) $-8 + (-2)$.

2. Вычислите:

а) $-11 + (-120)$;

б) $-18 + (-17)$;

в) $+13 + (+34)$;

г) $-15 + (-27)$;

д) $+56 + (+27)$;

е) $-32 + (-181)$.

3. Вечером температура воздуха была -6°C . Какой стала температура воздуха утром, если в течение ночи она понизилась на 5°C ?

4. Запишите число в виде суммы двух целых чисел:

а) -100 ;

б) -29 ;

в) -13 ;

г) -999 .

?	?
?	?

5. Впишите в таблицу 4 числа так, чтобы сумма любых двух чисел была отрицательной.

6. Впишите такое число, чтобы получить верное равенство:

а) $(-4) + \square = -6$;

б) $\square + (-2) = -12$;

в) $-3 + \square = -11$;

г) $\square + (-7) = -20$.

7. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Отметьте на числовой оси точку $A(-4)$. Затем отметьте точку:

а) $B(b)$, где $b = -4 + 2$;

б) $C(c)$, где $c = -4 + 5$;

в) $D(d)$, где $d = -4 + (-1)$;

г) $M(m)$, где $m = -4 + 4$.

8. Вычислите устно:

а) $-8 + 2$;

б) $12 + (-14)$;

в) $-16 + 15$;

г) $-6 + 17$;

д) $21 + (-9)$;

е) $-121 + 98$;

ж) $137 + (-112)$;

з) $-291 + 290$.

9. Запишите в виде суммы двух целых чисел с разными знаками число:

а) -2 ; б) 3 ; в) -5 ; г) 0 ; д) 7 ; е) -1 .

10. Считается, что Рим был основан в 753 году до нашей эры. Сколько лет городу Риму?



11. Впишите соответствующее целое число:

а) $2 + \square = -7$;

б) $\square + (-3) = -1$;

в) $-3 + \square = 3$;

г) $0 + \square = -6$;

д) $-8 + \square = 0$;

е) $-11 + \square = -11$.

12. Перечертите и заполните таблицу:

a	-10	5	-17	0	-8	-20	-13
b	12	-7	17	-3	-4	19	-10
$a + b$							



12. Вычислите:

- а) $89 + (-62)$; б) $-89 + (-62)$; в) $-89 + 62$; г) $27 + (-43)$;
 д) $-136 + (-49)$; е) $-186 + 236$; ж) $-98 + (-59)$; з) $-43 + (-57)$;
 и) $-64 + 75$; к) $-139 + 123$; л) $45 + (-105)$; м) $-82 + (-69)$.

14. Найдите значение выражения $x + y$, если:

- а) $x = 171$, $y = 112$; б) $x = -213$, $y = -67$; в) $x = -47$, $y = -133$;
 г) $x = -59$, $y = -241$; д) $x = 18$, $y = -28$; е) $x = -81$, $y = 81$.

15. Вычислите:

- а) $(-4) + (-5) + (-6) + 2 + 3 + 4$;
 б) $(-7) + (-8) + (-4) + 15 + 4$;
 в) $17 + (-12) + 18 + (-13) + 19 + (-14)$;
 г) $28 + (-10) + (-14) + (-28) + 100 + (-99)$;
 д) $(-21) + 17 + 21 + (-61) + 50 + (-49) + 60$.

16. Сравните устно:

- а) $-99 + 100$ 0; б) $-20 + 17$ 0;
 в) $82 + (-89) + 8$ 0; г) $-114 + 114$ 0.



17. Вычислите, применив свойства сложения:

- а) $-14 + (-16 + 20)$; б) $(-18 + (-11)) + (-12)$;
 в) $19 + (-13) + 3 + (-19)$; г) $-28 + (-17) + (-12) + 17$;
 д) $-20 + 36 + (-35) + 20$; е) $18 + (-28) + 19$.

18. Найдите значение выражения $a + (-38) + (-65) + b$, если:

- а) $a = 28$, $b = -25$; б) $a = -85$, $b = -12$;
 в) $a = -5$, $b = 30$; г) $a = -15$, $b = 40$.

19. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



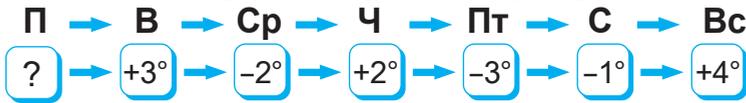
Дополните таблицу тремя различными числами так, чтобы сумма любых двух чисел была отрицательной.

7	?
?	?

20. Впишите соответствующее число:

- а) $627 + \square = 0$; б) $217 + 325 + \square = 325$;
 в) $\square + 215 + \square = 215$; г) $\square + 2000 + \square = 300$.

21. В течение недели Марина измеряла температуру воздуха:



- а) Узнайте, какая была температура в понедельник, если в предыдущее воскресенье было $+5^\circ$ и похолодало на 2° .
 б) На сколько градусов понизилась температура в пятницу по сравнению с четвергом?
 в) На сколько градусов повысилась температура в воскресенье по сравнению с субботой?
 г) А в четверг по сравнению со средой?
 д) На сколько градусов понизилась температура в среду по сравнению со вторником?

22. Миша получил a леев, а затем еще b леев. Сколько всего получил Миша, если:

а) $a = 70$, $b = 130$; б) $a = 350$, $b = 60$;
 в) $a = 1\,100$, $b = 2\,020$; г) $a = 132$, $b = 458$?

23. Ирина получила сумму денег, а затем потратила некоторую сумму денег. Сколько денег у Ирины, если она: а) получила 150 леев, а затем потратила 80 леев; б) получила 90 леев, а затем потратила 110 леев; в) получила 410 леев, а затем потратила 560 леев?

24. Влад потратил сумму денег, а затем получил некоторую сумму денег. Сколько денег у Влада, если он: а) потратил 85 леев, а затем получил 98 леев; б) потратил 125 леев, а затем получил 125 леев; в) потратил 2 020 леев, а затем получил 1 880 леев?

25. Найдите сумму всех целых чисел от -99 до 100 .

26. а) Перечертите и заполните таблицу:
 б) Проанализируйте полученные результаты и определите, в каких случаях $|a+b| = |a| + |b|$.
 в) Какими должны быть целые числа a и b , чтобы $|a+b| < |a| + |b|$?

a	5	10	-20	-3
b	4	-8	7	-12
$a + b$				
$ a + b $				
$ a + b $				



27. При каких условиях равенство $x + y + z + t = 0$ является верным, если x и z – противоположные целые числа?
28. Найдите сумму наибольшего положительного целого числа, состоящего из трех различных цифр и наименьшего отрицательного числа, состоящего из:
- а) 3 различных цифр; б) 5 различных цифр; в) 6 различных цифр.

§4 Вычитание целых чисел

4.1. Вычитание целых чисел

Исследуем и узнаем

1 Коля попросил своего младшего брата Мишу выполнить вычитание: $4 - 7$. Миша удивился и ответил, что не существует такого числа, которое бы равнялось разности $4 - 7$.

Коля объяснил Мише, что действительно не существует такого натурального числа, но его легко можно найти среди целых чисел.

• Рассмотрев решение следующей задачи, вы поймете, как Коля объяснил Мише выполнение вычитания $4 - 7$.

$$4 - 7 = ?$$



2 Вечером температура воздуха была 4°C . Какой стала температура воздуха утром, если она понизилась на 7°C ?

Решение:

1 способ

Пусть x – искомое значение температуры.

Так как температура понизилась на 7°C , то она стала меньше на 7°C , значит, $4 - 7 = x$, где $4 = x + 7$.

$$x = -3, \text{ так как } -3 + 7 = 4.$$

Таким образом, $4 - 7 = -3$.

Ответ: -3°C .

Разностью двух целых чисел a и b

называется такое целое число

$$c = a - b, \text{ что } a = c + b.$$

$$a - b = c$$

уменьшаемое

вычитаемое

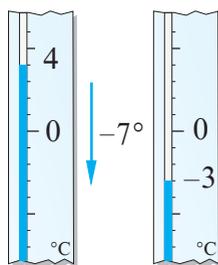
разность (остаток)

2 способ

Обозначим понижение температуры через -7°C .

Получим:

$$4 + (-7) = -3.$$



$$4 - 7 = 4 + (-7) = -3.$$



3 За бортом космического корабля работает космонавт. Часть скафандра, куда попадают солнечные лучи, имеет температуру $+140^{\circ}\text{C}$, а теневая часть -130°C . Найдите разность между температурами.



Решение:

$140 - (-130) = x$. Найдем число x такое, что $x + (-130) = 140$.

$x = \square$, так как $\square + (-130) = 140$.

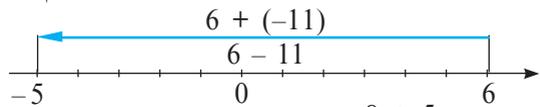
Ответ: $\square^{\circ}\text{C}$.



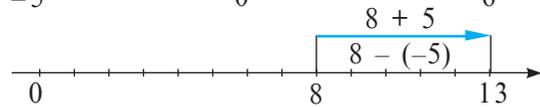
$$140 - (-130) = 140 + 130 = 270$$

• Рассмотрите и объясните следующие вычитания:

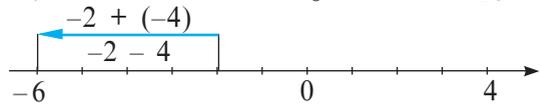
$$6 - 11 = 6 + (-11) = -5;$$



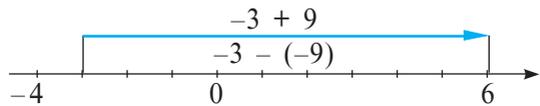
$$8 - (-5) = 8 + 5 = 13;$$



$$-2 - 4 = -2 + (-4) = -6;$$



$$-3 - (-9) = -3 + 9 = 6.$$



Возьмите на заметку

Чтобы из данного целого числа вычесть другое целое число, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

4.2. Расстояние между двумя точками на числовой оси (дополнительно)

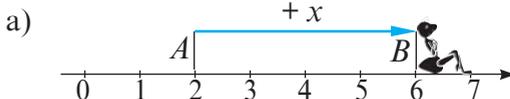
Исследуем и узнаем

1 Муравей переместился по числовой оси из точки $A(a)$ в точку $B(b)$. Найдите, какое расстояние преодолел муравей, если:

- а) $a = 2$, $b = 6$; б) $a = -2$, $b = 5$; в) $a = -1$, $b = -4$.

Решение:

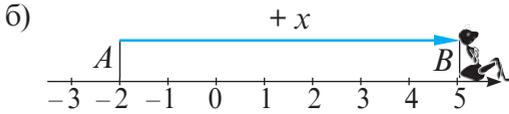
Обозначим расстояние через $AB = x$.



$$2 + x = 6$$

$$x = 4$$

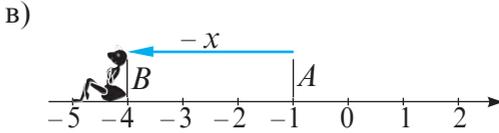
$$AB = 6 - 2 = 4$$



$$-2 + x = 5$$

$$x = \square$$

$$AB = 5 - \square = \square + \square = \square$$



$$-1 + (-x) = -4$$

$$x = \square$$

$$AB = -1 - \square = \square + \square = \square$$

Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на числовой оси вычисляется по формуле: $AB = |a - b|$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

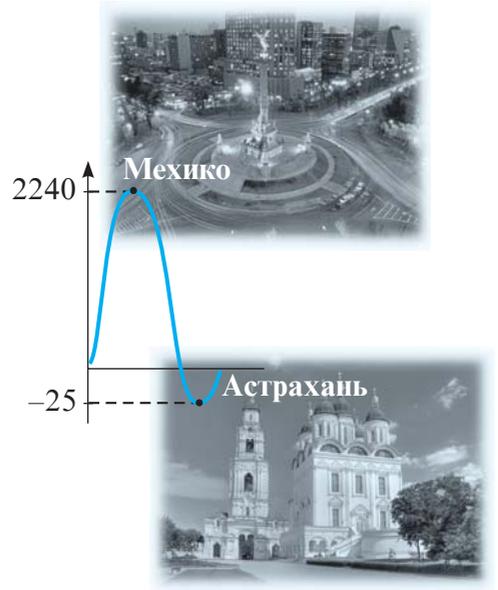
Применяем

2 Город Астрахань расположен ниже уровня моря на 25 м, а город Мехико – на высоте 2 240 м над уровнем моря. На сколько метров выше уровня города Астрахань расположен город Мехико?

Решение:

$$2240 - (-25) = 2240 + 25 = 2265 \text{ (м).}$$

Ответ: 2265 м.



Упражнения и задачи



1. Продолжите:

- а) $-1 - 5 = -1 + (-5) = \dots$;
 в) $7 - (-10) = 7 + 10 = \dots$;
 д) $-15 - 15 = -15 + \dots = \dots$;
 ж) $24 - (-9) = 24 + \dots = \dots$;



- б) $2 - 9 = 2 + (-9) = \dots$;
 г) $-4 - (-3) = -4 + 3 = \dots$;
 е) $11 - 18 = 11 + \dots = \dots$;
 з) $-15 - (-23) = -15 + \dots = \dots$

2. Выполните действия:

- | | | |
|------------------|----------------|--------------------|
| а) $-13 - 6$; | б) $40 - 52$; | в) $-17 - (-17)$; |
| г) $-16 - 9$; | д) $12 - 26$; | е) $8 - (-31)$; |
| ж) $0 - (-13)$; | з) $0 - 22$; | и) $34 - (-12)$. |

3. Впишите пропущенное число:

а) $0 - \square = -8$;

б) $10 - \square = -2$;

в) $\square - 4 = -1$;

г) $\square - 10 = -7$;

д) $-3 - \square = 6$;

е) $9 - \square = 15$;

ж) $0 - \square = 7$;

з) $\square - (-3) = -4$;

и) $\square - (-12) = 14$.

4. На чемпионате мира по футболу результаты команд сравнивают по разнице забитых и пропущенных мячей. Перечертите и заполните таблицу:

Страна	Забито мячей	Пропущено мячей	Разность забитых и пропущенных мячей
Бразилия	5	1	
Швейцария	5	4	
Сербия	2	4	
Коста-Рика	2	5	



5. Найдите расстояние AB между точками $A(a)$ и $B(b)$, если:

а) $a = -5, b = 3$;

б) $a = 1, b = 10$;

в) $a = -7, b = -8$.

6. Самая низкая температура на Земле (-89°C) была зарегистрирована в Антарктиде, а самая высокая (58°C) – в Африке. Найдите

разность между самой высокой и самой низкой температурами на Земле.



7. Вычислите:

а) $-12 - 8 + 7$;

б) $9 - 16 - 3$;

в) $25 - 28 - 7$;

г) $-7 - 15 - 21$;

д) $6 - 14 + 8$;

е) $-9 - 7 + 11$.

8. Найдите значение числового выражения:

а) $-3 - 8 + 12 - 4 + 11$;

б) $4 - 5 + 11 - 9 - 4$;

в) $9 - 2 - 8 + 4 - 21$;

г) $-16 - 7 + 32 - 21 + 17$;

д) $-16 + 9 + 27 - 11 - 8$.

9. Найдите значение выражения $x - y + z$, если:

- а) $x = -3$, $y = -7$, $z = -12$; б) $x = 9$, $y = 12$, $z = -8$;
 в) $x = -21$, $y = -6$, $z = 17$.

10. Впишите один из знаков (+ или -):

- а) $72 \bigcirc (-53) = 125$; б) $96 \bigcirc 81 = -45$;
 в) $-37 \bigcirc (-64) = -101$; г) $-49 \bigcirc 17 = -32$;
 д) $-61 \bigcirc 9 = -70$; е) $74 \bigcirc (-26) = 100$.



11. Какая из точек, B или C , расположена на числовой оси дальше от точки $A(-12)$, если: а) $B(-6)$, $C(-16)$; б) $B(3)$, $C(-27)$?

12. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! Перечертите и заполните таблицу:

a	b	$a - b$	$b - a$	$ a - b $	$ b - a $
-6	-9				
12	19				
-10	4				
5	-11				



13. Вечером температура воздуха была:

- а) -30°C ; б) 2°C ; в) 0°C ; г) 5°C .

За ночь она снизилась на 5°C . Какую температуру показывал градусник утром?

14. Может ли разность двух чисел быть больше их суммы?

Обоснуйте ответ, приведя примеры.

15. Перечертите и заполните таблицу:

a	b	Взаимное расположение точек	Знак разности $a - b$	Неравенство
-6	-9		+	$-5 > -12$
12	19			$-9 < b$
-10	4		+	
5	-11			



16. Даны числа $A(-12)$, $B(-4)$ на числовой оси. Найдите координаты точки C и длину отрезка AC , если точка B – середина этого отрезка.

§5 Умножение целых чисел

5.1. Умножение целых чисел

Исследуем и узнаем

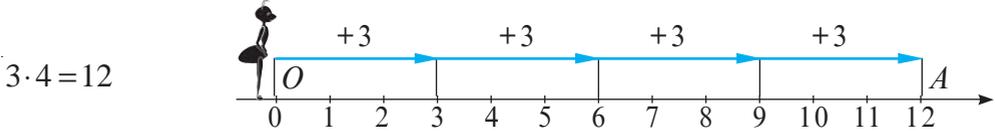
1 Муравей перемещается по числовой оси со скоростью 3 единицы в минуту. Сейчас он находится в начале отсчета.

- а) В какую точку переместится муравей через 4 минуты?
 б) В какой точке находился муравей 4 минуты назад?

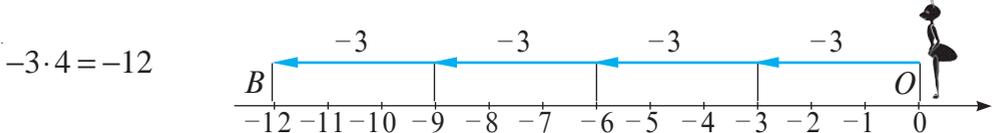
Решение:

а) Пусть скорость муравья в положительном направлении равна 3 единицам/мин, а в отрицательном равна -3 единицам/мин.

1 Если муравей перемещается в положительном направлении, то получим:

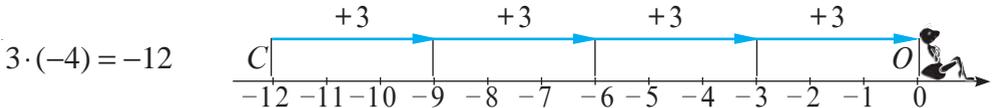


2 Если муравей перемещается в отрицательном направлении, то получим:

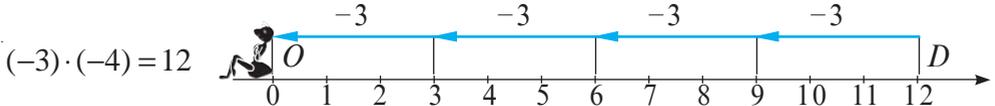


б) Обозначим 4 минуты назад через -4 .

1 Если муравей перемещается в положительном направлении, то получим:



2 Если муравей перемещается в отрицательном направлении, то получим:



Ответ: а) 1 A(12); 2 B(-12); б) 1 C(-12); 2 D(12).

Возьмите на заметку

Чтобы перемножить два целых числа с разными знаками, надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак минус (-).

Чтобы перемножить два целых числа с одинаковыми знаками, надо перемножить их модули.

$$-7 \cdot 8 = -|7| \cdot |8| = -56;$$

$$9 \cdot (-5) = -|9| \cdot |-5| = -45.$$

$$+5 \cdot (+4) = |+5| \cdot |+4| = 20;$$

$$-6 \cdot (-4) = |-6| \cdot |-4| = 24.$$

Зависимость знака произведения двух целых ненулевых чисел от знаков множителей можно вывести при помощи таблицы знаков:



Знак числа a	Знак числа b	Знак числа $a \cdot b$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+



2 Рассмотрите приведенные примеры и проверьте сделанные выводы при помощи других примеров.

$$\begin{aligned} -8 \cdot 1 &= -8 \\ 3 \cdot 1 &= 3 \end{aligned}$$

При умножении целого числа на 1 получим это же число.

$$\begin{aligned} -1 \cdot 5 &= -5 \\ -7 \cdot (-1) &= 7 \end{aligned}$$

При умножении целого числа на (-1) получим число, противоположное данному.

$$\begin{aligned} -3 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot (-9) &= 0 \end{aligned}$$

Умножение любого целого числа на нуль дает в результате 0.

5.2. Свойства умножения

$\begin{aligned} 6 \cdot (-2) &= -12 \\ -2 \cdot 6 &= -12 \\ 6 \cdot (-2) &= -2 \cdot 6 \end{aligned}$	<p>1° Коммутативность: $a \cdot b = b \cdot a$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.</p>
$\begin{aligned} -15 \cdot (4 \cdot 7) &= -420 \\ (-15 \cdot 4) \cdot 7 &= -420 \\ -15 \cdot (4 \cdot 7) &= (-15 \cdot 4) \cdot 7 \end{aligned}$	<p>2° Ассоциативность: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$.</p>
$\begin{aligned} 7 \cdot (-2 + 12) &= 70 \\ 7 \cdot (-2) + 7 \cdot 12 &= 70 \\ 7 \cdot (-2 + 12) &= 7 \cdot (-2) + 7 \cdot 12 \end{aligned}$	<p>3° Дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, для любых $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$.</p>
$\begin{aligned} -19 \cdot 1 &= -19 \\ 1 \cdot (-46) &= -46 \end{aligned}$	<p>4° Число 1 – нейтральный элемент умножения: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, для любого $a \in \mathbb{Z}$.</p>

• Подставьте вместо букв a , b и c любые целые числа и проверьте истинность свойств.

Применяем

Вычислите: а) $(-4) \cdot 53 \cdot (-25)$; б) $7 \cdot (-93) + 7 \cdot 92$.

Решение:

а) $(-4) \cdot 53 \cdot (-25) = 53 \cdot (-4) \cdot (-25) = 53 \cdot 4 \cdot 25 = 53 \cdot 100 = 5300$.
свойство 1°

б) $7 \cdot (-93) + 7 \cdot 92 = 7 \cdot (-93 + 92) = 7 \cdot (-1) = -7$.
свойство 3°

Упражнения и задачи



1. Уровень воды в Днестре меняется каждый день на 2 см. Сегодня четверг и уровень воды составляет 424 см.
а) Каким будет уровень воды в воскресенье, если вода поднимается?
б) Каким был уровень воды в понедельник, если уровень понизился?

2. Вычислите устно:

а) $6 \cdot (-9)$; б) $(-15) \cdot 7$; в) $(-4) \cdot (-11)$;
г) $-1 \cdot 17$; д) $(-12) \cdot 0$; е) $-6 \cdot (-9)$;
ж) $0 \cdot (-27)$; з) $(-14) \cdot (-3)$; и) $21 \cdot (-6)$.

3. Перечертите и заполните таблицу:

a	8	-7	-4	-52	-1	-12	-6
b	-3	9	-31	0	-75	3	-15
$a \cdot b$							



4. Запишите число в виде произведения двух целых чисел:

а) -28; б) -12; в) -7; г) 0; д) -1.

5. Определите знак произведения (+ или -) и впишите один из знаков сравнения ($>$, $<$ или $=$):

а) $(-12) \cdot (-57) \cdot (-81)$ ● 0; б) $(-48) \cdot (+21) \cdot (-36)$ ● 0;
в) $(-15) \cdot (+15) \cdot (-25)$ ● 0; г) $(-521) \cdot (-152) \cdot 0$ ● 0.



6. Найдите устно $-15a$, если:

а) $a = -2$; б) $a = -1$; в) $a = 0$; г) $a = 7$.

7. Вычислите:

а) $20 \cdot 18 \cdot (-5)$;

б) $(-2) \cdot (-35) \cdot (-8)$;

в) $(-54) \cdot (-82) \cdot 0$;

г) $(-24) \cdot 8 \cdot (-5)$.

8. Найдите произведение:

а) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;

б) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$.

9. Вычислите, используя общий множитель:

а) $3 \cdot (-55) + 3 \cdot 50$;

б) $(-8) \cdot 60 + (-8) \cdot 40$;

в) $10 \cdot 300 + 10 \cdot (-200)$;

г) $(-28) \cdot (-40) + (-28) \cdot 20$.



10. Не выполняя действий, определите знак произведения:

а) $(-5 - 6 - 7 - 8 - 9) \cdot (-55)$;

б) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot (-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6)$.

11. Запишите число -24 в виде произведения:

а) двух множителей;

б) трех множителей;

в) четырех множителей.

12. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание:

а) $-32 \cdot \blacksquare = 96$;

б) $\blacksquare \cdot (-7) = 84$;

в) $\blacksquare \cdot 13 = -65$;

г) $-9 \cdot \blacksquare = -108$.

13. Применяя свойства умножения, вычислите наиболее рациональным способом:

а) $(-21) \cdot (-8) \cdot 3 \cdot (-25)$;

б) $(-5) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (-4)$;

в) $(-13) \cdot 52 + 48 \cdot (-13)$;

г) $29 \cdot (-125) - 29 \cdot (-124)$.

14. Найдите значение выражения:

а) $-3m + 5$, если $m = 7$;

б) $2 - 5n$, если $n = -6$;

в) $4ab + 2$, если $a = 3$, $b = -1$;

г) $143 - 15xy$, если $x = -12$, $y = 0$.

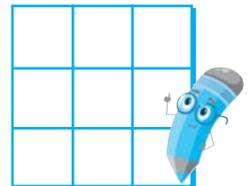


15. Найдите произведение всех целых чисел от -20 до 15 .

16. Сумма двух ненулевых целых чисел равна нулю.

Какой знак будет у произведения этих чисел?

17. Впишите числа $-1, 2, -3, -4, 5, -6, -7, 8, -9$ так, чтобы произведение чисел по любой горизонтали, вертикали и диагонали было положительным.



18. Применяя свойство дистрибутивности умножения относительно сложения и вычитания, вычислите наиболее рациональным способом:

а) $-99 \cdot 12$;

б) $-19 \cdot 101$;

в) $-15 \cdot (-99)$;

г) $1001 \cdot (-38)$;

д) $-999 \cdot (-17)$;

е) $-101 \cdot 143$.

§ 6 Деление целых чисел

Исследуем и узнаем

1 Температура воздуха в предгорье равна 0°C . При подъеме на гору на каждом километре она понижается на 2°C . На какую высоту поднялся альпинист, если температура воздуха составляет -6°C ?

Решение:

Обозначим понижение температуры на 2°C через -2°C .

Вычислим: $-6 : (-2) = 3$, так как $3 \cdot (-2) = -6$.

Ответ: 3 км.



2 Рассмотрите примеры и проверьте сделанные выводы при помощи других примеров.

Разделить целое число -6 на целое число -2 означает найти такое число, которое при умножении на -2 даст -6 .

делимое делитель частное
 $-18 : (-6) = +3,$
 так как $+3 \cdot (-6) = -18$

$+24 : (-4) = -6,$
 так как $-6 \cdot (-4) = +24$
 $-21 : (+7) = -3,$
 так как $-3 \cdot 7 = -21$

Частное двух целых чисел с одинаковыми знаками является положительным числом.

Частное двух целых чисел с разными знаками является отрицательным числом.

Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя.

$$|-18 : (-6)| = |-18| : |-6| = |+3|$$

$$|+24| : |-4| = |-6|$$

$$|a : b| = |a| : |b|, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

$$|-21| : |+7| = |-3|$$

Знак частного в зависимости от знака делимого и делителя можно вывести при помощи таблицы знаков.

• Сравните с таблицей знаков произведения двух целых чисел (стр. 64).

Знак числа a	Знак числа b	Знак числа $a : b$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

3 Рассмотрите примеры и проверьте сделанные выводы при помощи других примеров.

$$\begin{aligned} -6 : 1 &= -6 \\ 5 : 1 &= 5 \end{aligned}$$

При делении целого числа на 1 получим это же число, то есть делимое.

$$\begin{aligned} -3 : (-1) &= 3 \\ 7 : (-1) &= -7 \end{aligned}$$

При делении целого числа на -1 получим число, противоположное данному.

$$\begin{aligned} 0 : 5 &= 0 \\ 0 : (-8) &= 0 \end{aligned}$$

При делении нуля на любое ненулевое целое число получим 0.

Деление на нуль не имеет смысла.

$$~~a : 0~~$$

Упражнения и задачи



1. Вычислите и выполните проверку умножением.

а) $-15 : 3$;

б) $21 : (-7)$;

в) $-24 : (-8)$;

г) $0 : (-4)$.

2. Выполните действие:

а) $78 : (-6)$;

б) $-52 : (-13)$;

в) $-84 : 12$;

г) $96 : (-8)$;

д) $57 : (-3)$;

е) $-108 : 4$;

ж) $0 : (-32)$;

з) $-51 : (-1)$;

и) $-121 : 11$.

3. Перечертите и заполните таблицу:

a	-41	0	-64	-17	125	-63
b	41	-37	-16	-1	-5	-3
$a : b$						



4. Найдите значение $-48 : a$, если:

а) $a = -3$;

б) $a = 12$;

в) $a = -8$;

г) $a = 6$.

5. Найдите устно значение $a : (-3)$, если:

а) $a = -27$;

б) $a = 36$;

в) $a = 0$;

г) $a = -108$.

6. Вычислите:

а) $(23 - 32) : (-3)$;

б) $(-12 + 36) : (-8)$;

в) $(-15 - 29) : 11$;

г) $(-7 - (-21)) : (-7)$.

7. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Перечертите и заполните таблицу:

a	17	-13		53		
b	-3		-3		-1	-26
$a \cdot b$		65	-39	-53	1	0



8. В холодильной камере в 8:00 часов температура была 0°C . Но с каждым часом температура понижается на 3°C . Какое время покажут часы, когда температура будет -12°C ?

9. Вычислите:

а) $(-29 \cdot 4) : 4$;

б) $(31 \cdot (-6)) : 31$;

в) $(-7 \cdot 25) : (-7)$;

г) $(-3 \cdot (-10)) : 10$.

10. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Перечертите и заполните таблицу.
Сделайте вывод.

a	-68	57	-116	0
b	-17	-3	29	-19
$ a : b $				
$ a : b $				



11. Подставьте вместо a , b и c ненулевые целые числа и определите, какие из следующих равенств ложны:

а) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$;

б) $(a \cdot b) : c = (a \cdot c) : b$;

в) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$;

г) $(a : b) : c = a : (b : c)$.

12. Подставьте вместо \bullet одно из арифметических действий (+; -; :; \cdot):

а) $1 \bullet 2 \bullet 3 = -1$;

б) $-1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 = 1$;

в) $-1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 = -1$.



7.1. Степень целого числа с натуральным показателем

Исследуем и узнаем

Умножение ненулевых натуральных чисел можно записать в виде степени:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ множителя}} = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = (+3)^4$$

4 множителя

Читаем:

„3 в четвертой степени“, или „3 в четвертой“.

$$11^3 = \underbrace{11 \cdot 11 \cdot 11}_{3 \text{ множителя}}$$

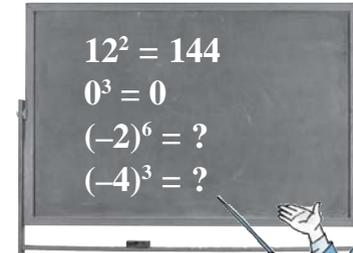
3 множителя

Читаем:

„11 в третьей степени“, или „11 в кубе“.

А умножение равных отрицательных чисел?

$$\underbrace{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}_{6 \text{ множителей}} = (-5)^6$$



$$12^2 = 144$$

$$0^3 = 0$$

$$(-2)^6 = ?$$

$$(-4)^3 = ?$$

Умножение равных множителей – это действие **возведения в степень**:

$(-5)^6$ – это степень с основанием -5 и показателем 6.

Читаем: „ -5 в шестой степени“, или „ -5 в шестой“.

Обобщаем

Степень целого числа с натуральным показателем

① Для любого ненулевого целого числа a и натурального числа n :

$$\bullet a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ для } n > 1.$$

n множителей

$$\bullet a^1 = a.$$

$$\bullet a^0 = 1, a \neq 0.$$

$\bullet 0^n$ – не имеет смысла.

② $0^n = 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Поясняем

Для $a, n \in \mathbb{N}^*$:

$$1) (+a)^n = +a^n = a^n$$

$$2) (-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n - \text{четное} \\ -a^n, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$(+10)^4 = 10^4.$$

$$(-5)^2 = 25 = 5^2.$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8 = -2^3.$$

7.2. Свойства степени целого числа с натуральным показателем

Исследуем и узнаем

Проверьте, верны ли равенства.

а) $(-5)^2 \cdot (-5)^3 = (-5)^{2+3}$;

б) $(-6)^4 : (-6)^2 = (-6)^{4-2}$;

в) $[(-3)^2]^3 = (-3)^{2 \cdot 3}$;

г) $[3 \cdot (-5)]^2 = 3^2 \cdot (-5)^2$.

Правила вычисления степеней натуральных чисел приемлемы и для целых чисел?



Решение:

а) $(-5)^2 \cdot (-5)^3 = 25 \cdot (-125) = -3125$; $(-5)^{2+3} = (-5)^5 = -3125$.

Значит, $(-5)^2 \cdot (-5)^3 = (-5)^{2+3}$.

б) $(-6)^4 : (-6)^2 = 1296 : 36 = 36$; $(-6)^{4-2} = (-6)^2 = 36$.

Значит, $(-6)^4 : (-6)^2 = (-6)^{4-2}$.

в) $[(-3)^2]^3 = 9^3 = 729$; $(-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6 = 729$.

Значит, $[(-3)^2]^3 = (-3)^{2 \cdot 3}$.

г) $[3 \cdot (-5)]^2 = (-15)^2 = 225$; $3^2 \cdot (-5)^2 = 9 \cdot 25 = 225$.

Значит, $[3 \cdot (-5)]^2 = 3^2 \cdot (-5)^2$.

Итак, правила вычисления степеней натуральных чисел применяются и для вычисления степеней целых чисел.

Обобщаем

Для любых $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями записываем основание и складываем показатели степеней.

② $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m > n$

При делении степеней с одинаковыми основаниями записываем основание и вычитаем показатели степеней.

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

При возведении степени в степень записываем основание и перемножаем показатели степеней.

④ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

При возведении произведения в степень возводим в эту степень каждый множитель.

Применяем

Вычислите:

а) $[(-5)^8 \cdot (-25)^3] : (-5)^{10}$; б) $(2^{20} \cdot 4^5) : (-8)^{10}$; в) $[(-4)^3]^2 + 16^4 : (-16)^2$.

Решение:

$$\text{а) } [(-5)^8 \cdot (-25)^3] : (-5)^{10} = \{(-5)^8 \cdot [(-5)^2]^3\} : (-5)^{10} = \\ = [(-5)^8 \cdot (-5)^6] : (-5)^{10} = (-5)^{14} : (-5)^{10} = (-5)^{14-10} = (-5)^4 = 625;$$

$$\text{б) } (2^{20} \cdot 4^5) : (-8)^{10} = [2^{20} \cdot (2^2)^5] : [(-1) \cdot 8]^{10} = \\ = 2^{20+5} : [(-1)^{10} \cdot (2^3)^{10}] = 2^{25} : 2^{30} = 2^{-5};$$

$$\text{в) } [(-4)^3]^2 + 16^4 : (-16)^2 = (-4)^6 + 16^4 : 16^2 = 4^6 + 16^2 = 4^6 + 4^4.$$

7.3. Порядок выполнения действий

Решаем и поясняем

Вычислите: $60 - 8 \cdot 50 + 2 \cdot 12^3$.

Решение: $60 - 8 \cdot 50 + 2 \cdot 12^3 =$

$$= 60 - 8 \cdot 50 + 2 \cdot 1728 =$$

$$= 60 - 400 + 2 \cdot 1728 =$$

$$= 60 - 400 + 3456 =$$

$$= -340 + 3456 =$$

$$= 3116.$$

Обратите внимание на порядок выполнения действий.

Что знаем? Что узнаем?

- Сложение и вычитание – это действия первого порядка.
- Умножение и деление – это действия второго порядка.
- Возведение в степень – это действие третьего порядка.

$$\rightarrow 30 + 60 - 15 = 75$$

$$\rightarrow 7 \cdot 10 : 14 = 5$$

$$\rightarrow 45 + 2 \cdot 3 - 14^2 = -145$$

Возьмите на заметку

- ♦ В выражении со скобками в первую очередь выполняются действия в скобках.
- ♦ В выражениях без скобок действия одного порядка выполняются в порядке их следования в записи.
- ♦ Если в выражении без скобок встречаются действия разных порядков, то сначала выполняются действия III порядка, затем II порядка и в последнюю очередь – I порядка.

В математическом выражении могут быть:

- квадратные скобки []
- круглые скобки ()
- фигурные скобки { }

• Вычислите:

$$\overset{\textcircled{4}}{18} - [\overset{\textcircled{3}}{6} - \overset{\textcircled{2}}{5} \cdot (\overset{\textcircled{1}}{20} - \overset{\textcircled{5}}{18})] - 2010.$$

Сначала выполняем действия в круглых скобках, потом в квадратных скобках, затем в фигурных скобках.

Упражнения и задачи



1. 16 участников слета математиков разделили на 4 группы по 4 ученика в каждой группе. У каждого ученика было по 4 набора с 4 геометрическими фигурами. Сколько всего геометрических фигур было?

2. Вычислите устно.

а) Для каждой степени определите основание степени и показатель степени:

$$4^5; (-3)^{28}; 0^4; 3^{10}; a^b; x^5; 16^y; 3^{2012}; (-2)^x; 1^{999}; 42^1; 18; (-16)^4; 4^0.$$

б) Есть ли среди них степени с одинаковыми основаниями? А с одинаковыми показателями?

3. Выполните действие:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 458^0; & \text{б) } (-15)^4; & \text{в) } (-1)^{2011}; & \text{г) } 1^{2999}; \\ \text{д) } (-7)^3; & \text{е) } (-60)^2; & \text{ж) } 10^4; & \text{з) } (-10)^7. \end{array}$$

4. а) Перечертите и заполните таблицу:

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
-1					
1					
-2					
2					
-3					
3					
-4					
4					



б) Какие закономерности вы подметили?

5. Вычислите устно:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 1^3; & \text{б) } (-1)^3; & \text{в) } 1^4; \\ \text{г) } (-1)^4; & \text{д) } (-1)^{111}; & \text{е) } (-1)^{2020}. \end{array}$$

6. Запишите:

- а) число 4 в виде степени с основанием -2 ;
- б) число 9 в виде степени с основанием -3 ;
- в) число 8 в виде степени с показателем 3;
- г) число 16 в виде степени с показателем 2;
- д) число -64 в виде степени с показателем 3.

7. Сравните: а) 2^5 ● $(-2)^5$; б) 6^2 ● $(-3)^4$;
в) $(-3)^4$ ● $(-9)^2$; г) 14^5 ● $(-2)^5$.



8. Запишите результат в виде степеней отрицательных чисел:

- а) $2^5 \cdot 2^7$; б) $(-5)^2 \cdot (-5)^5$; в) $(-3) \cdot (-3)^6$; г) $8^2 \cdot 8^5 \cdot 8^7$;
- д) $2^3 \cdot 5^3$; е) $(-3)^6 : (-3)^4$; ж) $10^{14} : 10^{12}$; з) $[(-3)^3]^4$;
- и) $[(-1)^{11}]^4$; к) $[(-5)^2]^{10}$; л) $(-4)^8 \cdot (-5)^8$; м) $(2^5)^6$.

9. Выполните действие:

- а) $6 \cdot (-3) + 15 - 8^2$; б) $12 : (-3) - 6 + (-10)^3$;
- в) $(-5)^5 \cdot [6 - 2 \cdot (-18)]$; г) $\{6 - (4 \cdot [(-2) - 10])\} + 8^2$.

10. Вычислите: а) $144 : (-12) + 7 \cdot (-2)^3 + 2\ 010$;
б) $(-88) : (-4) - 125 : (-5)^2 - 380$;
в) $\{6 - [282 \cdot (-1) - (44 : 11 - 18)]\} - 644$;
г) $25^2 : (-5)^2 - \{42 + 3 \cdot [6 - (3^3 \cdot 5 + 11)]\}$.

11. Народная русская задача:

*Шли семь старцев,
У каждого старца по семь костылей,
На каждом костыле по семь сучков,
На каждом сучке по семь кошелей,
В каждом кошеле по семь пирогов,
В каждом пироге по семь ягод.*

Сколько всего ягод?

12. Вычислите:

- а) $[6 \cdot (-2) \cdot (-3)]^2$; б) $(-3)^{10} : (-3)^5 \cdot (-3)^4$;
- в) $(-10)^5 : [(-2)^3 : 5^3]$; г) $[(-10)^3]^4 \cdot 10^6 : (-10)^{10}$.

13. Расставьте квадратные и круглые скобки так, чтобы получить верное равенство:

- а) $24 : (-4) - 68 + (-4)^3 - 20 = -30$. б) $16 \cdot (-2)^3 - 44 - 78 - 30 = -124$.

14. Покажите, что последней цифрой квадрата некоторого числа может быть 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

15. Запишите числа, квадраты которых расположены между 11 и 101.

16. Впишите соответствующее число:

а) $4^3 = \blacksquare$; б) $(-9)^4 = \blacksquare$; в) $5^5 = \blacksquare$; г) $(-6)^3 = \blacksquare$.

17. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Расположите:

а) в порядке возрастания числа:

-41 ; 12 ; -7 ; $(-3)^4$; -5^3 ; $(-3)^5$; 0 ; 25 ; $(2^3)^2$; $[(-3)^2]^3$;

б) в порядке убывания числа:

-1 ; $2\ 011$; -78 ; $(-4)^3$; $(-2)^6$; 2 ; -3^0 ; 14 ; $[(-1)^{14}]^{2020}$; $[(-2)^3]^2$.

18. Запишите пропущенное натуральное число:

а) $2^3 \cdot 2^6 = 2^{\blacksquare}$; б) $(-5)^3 \cdot (-5)^4 = (-5)^{\blacksquare}$; в) $3^{\blacksquare} : 3^{11} = 3$;

г) $7^7 \cdot 7 = 7^{\blacksquare}$; д) $(-3)^3 \cdot (-3)^{\blacksquare} = (-3)^7$;

е) $(-4)^5 : (-4)^2 = (-4)^{\blacksquare}$; ж) $(-2)^{25} : (-2)^{\blacksquare} = (-2)^{17}$.

19. Вычислите, используя свойства степеней:

а) $10^{12} : 10^9$; б) $(-12)^{18} : (-12)^{16}$; в) $(-7)^8 : (-7)^7$;

г) $2^7 : 2^3$; д) $5^3 \cdot (-2)^3$; е) $(-3)^2 \cdot 4^2$;

ж) $(-2)^3 \cdot (-3)^3$; з) $(-10)^7 : (-10)^5$.

20. Вычислите:

а) $78 - (-8 + 12 - 22) + 5 \cdot (-4)^2$; б) $10 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (16 - 20 - 30)$;

в) $-15 - [2 \cdot (-35 - 45) - 40] - 10^3$; г) $8^2 \cdot (-5)^2 - 20 \cdot [16 + (-20)] + 100$.

21. Не используя знаки математических действий, запишите наибольшее возможное число при помощи:

а) трех цифр 2; б) трех цифр 3.

22. Составьте числовое выражение, используя скобки так, чтобы при вычислении значения этого выражения действия выполнялись в следующем порядке:

а) сложение, деление, умножение и возведение в степень;

б) возведение в степень, деление, вычитание и опять деление;

в) вычитание, умножение, возведение в степень и опять вычитание.

23. Решите на множестве \mathbb{N} уравнение:

а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = -1$; в) $x^3 = -8$.

§8 Решение уравнений на множестве \mathbb{Z}

Исследуем и узнаем

1 Учительница попросила Мишу решить уравнение $4x+12=0$ на множестве \mathbb{N} , затем на множестве \mathbb{Z} .

Поможем Мише решить данное уравнение.

Решение:

На множестве \mathbb{N} :

$$4x+12=0$$

$$4x=0-12$$

$$4x=-12$$

$$x=-3 \notin \mathbb{N}$$

Ответ: $S = \emptyset$.

На множестве \mathbb{Z} :

$$4x+12=0$$

$$4x=0-12$$

$$4x=-12$$

$$x=-3 \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $4 \cdot (-3) + 12 = 0$ (И)

Ответ: $S = \{-3\}$.

Уравнение
не имеет
решений на \mathbb{N} .

Уравнение
имеет
решения на \mathbb{Z} .



Что знаем? Что узнаем?

Решить уравнение на числовом множестве означает найти решение данного уравнения, которое принадлежит заданному множеству.

Решаем и поясняем

2 Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x - 75 = -25$;

б) $x : (-8) = 9$;

в) $(-625) : x = 25$;

г) $81 \cdot x = -324$;

д) $3x - 81 = 6$;

е) $-2x + 92 = 4$.

Решение:

а) $x - 75 = -25$

$$x = -25 + 75$$

$$x = 50 \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $50 - 75 = -25$ (И)

Ответ: $S = \{50\}$.

б) $x : (-8) = 9$

$$x = 9 \cdot (-8)$$

$$x = -72 \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $(-72) : (-8) = 9$ (И)

Ответ: $S = \{-72\}$.

в) $(-625) : x = 25$

$$x = (-625) : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $\square : \square = \square$

Ответ: $S = \{\square\}$.

г) $81 \cdot x = -324$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

Проверка: $\square \cdot \square = \square$

Ответ: $S = \{\square\}$.

$$\text{д) } 3x - 81 = 6$$

$$3x = 6 + \square$$

$$3x = \square$$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Проверка: } \square - \square = \square$$

$$\text{Ответ: } S = \{\square\}.$$

$$\text{е) } -2x + 92 = 4$$

$$-2x = 4 - \square$$

$$-2x = \square$$

$$x = \square : \square$$

$$x = \square \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Проверка: } \square + \square = \square$$

$$\text{Ответ: } S = \{\square\}.$$

Применяем и объясняем

3 Решите уравнение $2x + 5 = -1$ на множестве $A = \{-5, -3, 0, 1\}$.

Решение:

Для $x = -5$ имеем $2 \cdot (-5) + 5 = -1$ — *Ложно*.

Значит, число -5 не является решением этого уравнения.

Для $x = -3$ имеем $2 \cdot (-3) + 5 = -1$ — *Истинно*.

Значит, число -3 является решением этого уравнения.

Для $x = 0$ имеем $2 \cdot \square + 5 = -1$ — \square .

Значит, число 0 \square решением этого уравнения.

Для $x = 1$ имеем $2 \cdot \square + 5 = -1$ — \square .

Значит, число 1 \square решением этого уравнения.

$$\text{Ответ: } S = \{\square\}.$$

Упражнения и задачи



1. Определите, какой из элементов множества $A = \{-5, -2, -1, 0, 4, 10\}$ является решением уравнения:

а) $-x - 4 = 1$;

б) $2x - 6 = -6$;

в) $(-200) : x = -20$;

г) $x \cdot (-15) = 30$;

д) $1 - 3x = x + 1$;

е) $10 + 2x = 0$.

2. Решите задачу с помощью уравнения. Сколько было марок у Иры, если известно, что она отдала Марии 15 марок и у нее осталось 44?

3. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x - 2 = -5$;

б) $y - 25 = 60$;

в) $z - 100 = -2012$.

4. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x + 70 = -100$; б) $y + 8 = 2\,000$; в) $z + 29 = -718$.

5. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $3 \cdot x = 81$; б) $(-11) \cdot y = 121$; в) $(-35) \cdot z = -210$.

6. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x : (-2)^3 = -20$; б) $y : 38 = 10^2$; в) $z : (-19) = -18$.

7. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $3x + 72 = 0$; б) $-8y + 2^3 \cdot 10^3 = 0$;
в) $22z + 440 = 0$; г) $2x + 7^2 = -11$;
д) $13 - 5x = 8$; е) $7x + 38 = 10$.

8. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Составьте и решите уравнение:

- а) из числа x вычитаем 13 и получаем -6 ;
- б) к числу -26 прибавляем $3x$ и получаем -5 ;
- в) разделим число x на -8 и получим 3 ;
- г) умножим число 12 на x и получим -36 .

9. Запишите и решите уравнение, используя данные задачи.

- а) Катя задумала число, умножила его на 2, затем отняла от результата 15 и в итоге получила 11. Какое число задумала Катя?
- б) Витя задумал число, разделил его на 3, к результату прибавил 4 и в итоге получил 25. Какое число задумал Витя?

10. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Впишите такое целое число, чтобы полученное уравнение имело указанное множество решений:

а) $\blacksquare x - 70 = 0$; $S = \{5\}$; б) $(-5)y - \blacksquare = 8$; $S = \{0\}$;
в) $\blacksquare : z = 84$; $S = \{-3\}$; г) $x : \blacksquare = 25$; $S = \{-100\}$.

11. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $3 \cdot (x + 7) = 12$; б) $-2 \cdot (x + 9) = -28$;
в) $5 \cdot (3 - 2x) = -10$; г) $2x : |-5| = 8$;
д) $32 : (-2x) = 1$; е) $7 \cdot (2 - x) = |-42|$.

12. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $7x - 12 = |(-4)^2|$; б) $5 : z = |-5^0|$; в) $y : (-12) = |(-6)^3|$.

13. Решите задачи уравнениями.

а) Катер проплыл 78 км по течению реки за 3 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения 2 км/ч.

б) За три плацинды и 2 стакана сока заплатили 36 леев. Сколько стоит одна плацинда, если один стакан сока стоит 6 леев?

14. РАБОТАЕМ В ГРУППАХ!  Проект *Целые числа в моей жизни*.

Класс делится на группы по 6–8 учащихся, Каждая группа должна представить плакат с примерами применения целых чисел в жизни.

15. На трех полках 129 книг. На второй полке расставлено на 15 книг больше, чем на первой полке, а на третьей полке – на 12 книг меньше, чем на первой полке. Сколько книг на каждой полке?

16. В трех ящиках 45 кг слив. В первом ящике слив в 2 раза больше, чем во втором, а в третьем на 3 кг меньше, чем во втором. Сколько килограммов слив было в каждом ящике?

17. Определите, какое число больше: x или $3x$, если x – целое число, удовлетворяющее двойному неравенству $-3 \leq x \leq 2$.

18. Определите, какое число больше: x или $-2x$, если x – целое число, удовлетворяющее двойному неравенству:

а) $-5 \leq x < 0$; б) $-3 \leq x \leq 3$; в) $0 < x \leq 6$.

19. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $4 \cdot (x + 2) - 9 = -5$; б) $2 \cdot (3x + 4) - 10 = 28$;

в) $14 - |x - 6| = -23$; г) $-5 + |8 - 3x| = -21$;

д) $-3 \cdot |x + 8| + 7 = -20$; е) $7 \cdot (5 - 2x) - 42 = -28$.

20. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $|x| = 18$; б) $|x| = -2$;

в) $|2x - 3| = 7$; г) $|5 - 8x| = 35$.

21. Составьте задачу, которую можно решить при помощи уравнения:

а) $3 - 5x = -7$; б) $-10x + 4 = -96$.



Задания для осмысления

1. Приведите примеры положительных и отрицательных чисел из разных областей знания: физики, биологии, географии, истории, литературы, экономики и т. д.
2. Что такое числовая ось?
3. Какое число противоположно числу:
а) -2020 ; б) 2021 ; в) 0 ?
4. Что называют модулем числа?
5. Какое расстояние выражает модуль целого числа?
6. Какие свойства модуля вы знаете?
7. В каких случаях мы используем модуль числа?
8. Как сравнивают целые числа?
9. Истинно ли высказывание:
Любое натуральное число больше любого целого числа?
10. Дополните, чтобы получить истинное высказывание:
Любое натуральное число больше ...
11. Какие случаи возможны при сложении целых чисел? Как мы поступаем в каждом из них?
12. Как вычитают целые числа?
13. Истинно или Ложно?
а) $-7 - 5 = -2$;
б) $-120 - (-18) = -138$;
в) $82 - (-12) = 94$.
14. В чем заключаются правила знаков? В каких случаях мы их применяем?
15. Как перемножаются целые числа? Как возвести целое число в степень с натуральным показателем?
16. Как делятся целые числа?
17. Действительно ли при делении двух целых чисел в частном всегда получается целое число? Приведите примеры.
18. Каковы правила вычисления степеней?
19. Какие свойства действий с целыми числами вы знаете?
20. Каков порядок выполнения действий и что означают скобки при вычислениях с целыми числами?
21. Что значит решить уравнение на множестве \mathbb{Z} ?
22. Приведите по примеру для каждого из видов изученных уравнений.
23. Составьте по задаче, которые можно решить при помощи изученных уравнений.
24. Приведите пример уравнения, которое не имеет решения на множестве \mathbb{Z} .

Упражнения и задачи на повторение



- Отметьте на числовой оси точки: $A(-2)$; $B(-7)$; $C(5)$; $D(2)$.
- Постройте числовую ось. Отметьте на ней точку $M(-2)$ и точки, расположенные на расстоянии 7 единиц от точки M . Запишите координаты этих точек.
- Расположите числа в порядке убывания: -9 ; 3 ; 5 ; -4 ; 0 ; -10 ; 12 .
- Вычислите наиболее рациональным способом:
 - $-9 + (-13) + 17 + (-6) + 11$;
 - $14 + (-8) + (-25) + 12 + 7$;
 - $43 - 60 + 12 + 39 - 21$.
- Найдите сумму всех целых чисел, расположенных на числовой оси между числами -5 и 7 .
- Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

а) $x + 7 = 3$;	б) $6 - x = 15$;	в) $-2 - x = -5$;
г) $16 - x = -4$;	д) $11 - x = 14$;	е) $-x + 4 = -9$.
- Вычислите:
 - $(7 - 20) \cdot (-3 + 5)^2$;
 - $(-5 - 7)^2 : (-6 + 2)$;
 - $(-21)^3 : 7^3 + [42 : (-6)]$.

8. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! Перечертите и заполните таблицу:

a	4	-8	-1	5	-10
$-a - 3$					
$-5 + a^2$					
$a \cdot (-3)$					
$-5 \cdot a^3$					
$(-a)^4 \cdot 6$					



9. Определите устно: *Истинно* или *Ложно*?

Числа a и b являются целыми.

- Если $a = b$, то $|a| = |b|$.
- Если $|a| = |b|$, то $a = b$.
- Если $a = -b$, то $|a| = |b|$.
- Если $|a| = |b|$, то $a = b$ или $a = -b$.



10. Впишите такие числа, чтобы каждое число начиная с третьего, равнялось сумме двух предшествующих ему чисел.

								2	0		
--	--	--	--	--	--	--	--	---	---	--	--

11. Вычислите:
- а) $-7 + |-3| - (-4)^3 - 5^2$;
- б) $4 + (-6) - |-4|^2 - 3^4$;
- в) $(-2)^5 - |-5| + (-6) - (-2)^3 \cdot (-2)^2$.

12. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! 

Истинно или Ложно?

Если a – целое неотрицательное число, то:

- а) $2 + a > 2$;
- б) $-3 + a > 0$;
- в) $a + a < a$;
- г) $a + a > 0$.



13. Вычислите:
- а) $-52 : (19 - 32) - 2 \cdot [18 + 44 : (-11)]$;
- б) $[25 - 24 : (11 - 14)] \cdot [-9 + 8 : (27 - 35)]$;
- в) $(-3)^6 : (-3)^4 \cdot (12 - 3^2) - 2[4^2 + 11 : (-11)]$;
- г) $10^2 \cdot 10^5 : 10^3 \cdot (15 - 14)^{99} + 3[5^3 - (-2^2)^3]$.

14. Вычислите:
- а) $\frac{98 \cdot (-40)}{-14 \cdot (20 - 4 \cdot 10)}$;
- б) $\frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot (-25) \cdot 6}{(-6^2)^2 \cdot (100 - 5 \cdot 15)}$.

15. Определите, что больше: $-x$ или $2x$, если x – целое число, удовлетворяющее двойному неравенству:

- а) $-1 \leq x \leq 4$; б) $0 \leq x \leq 7$; в) $-5 \leq x \leq 2$.

16. РАБОТАЕМ В ГРУППАХ! 

Используя интернет, сделайте плакат об истории целых чисел.

17. Решите на множестве \mathbb{Z} уравнение:

- а) $|x| + 3 = 8$; б) $|x| - 3 = 4$; в) $|x| - 6 = -8$;
- г) $15 - |x| = 9$; д) $|x + 3| = 1$; е) $|x - 7| = 10$.

18. Делится ли разность $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 17$:

- а) на 5; б) на 10?



ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. Дано множество:

$$M = \{-6, 3, -2, -3, 5\}.$$

- а) Найдите наибольшее число, принадлежащее множеству M . **1**
 б) Найдите элемент множества M , имеющий наименьший модуль. **1**
 в) Найдите элементы множества M , имеющие равные модули. **1**
 г) Расположите в порядке возрастания числа:
 $(-6)^2, 3^4, (-2)^5, 5^2, (-3)^3$. **6**

2. Даны точки $A(-4), B(6), C(-1), D(3)$.

- а) Расположите точки A, B, C, D на числовой оси. **4**
 б) Запишите все целые числа, расположенные на оси между числами -1 и 3 . **3**
 в) Какую координату имеет точка K , если K – середина отрезка AB ? **3**

3. Выполните действия:

- а) $-75 + 39$; **2**
 б) $-53 - 27$; **2**
 в) $-15 \cdot 61 + (-5)^2 \cdot (-5)^3$; **4**
 г) $-52 : (-4) + (-13)^5 : (-13)^3$. **4**

4. Решите задачу при помощи уравнения. **4**

В результате засухи уровень воды в озере понизился на 16 см. После того как прошел дождь, уровень повысился на 9 см и составил 658 см. Каков был уровень воды в озере до засухи?

II вариант

1. Дано множество:

$$A = \{-4, -1, 2, -5, 4\}.$$

- а) Найдите наименьшее число, принадлежащее множеству A .
 б) Найдите элемент множества A , имеющий наибольший модуль.
 в) Найдите элементы множества A , имеющие равные модули.
 г) Расположите в порядке убывания числа:
 $(-5)^2, 4^2, (-4)^3, 2^5, (-1)^8$.

2. Даны точки $M(-6), N(1), L(-3), P(4)$.

- а) Расположите точки M, N, L, P на числовой оси.
 б) Запишите все целые числа, расположенные на оси между числами -3 и 1 .
 в) Какую координату имеет точка D , если D – середина отрезка MP ?

3. Выполните действия:

- а) $29 + (-18)$;
 б) $-34 - 76$;
 в) $-14 \cdot (-83) + (-4)^3 \cdot (-4)^2$;
 г) $-72 : 18 + (-4)^{15} : (-4)^{12}$.

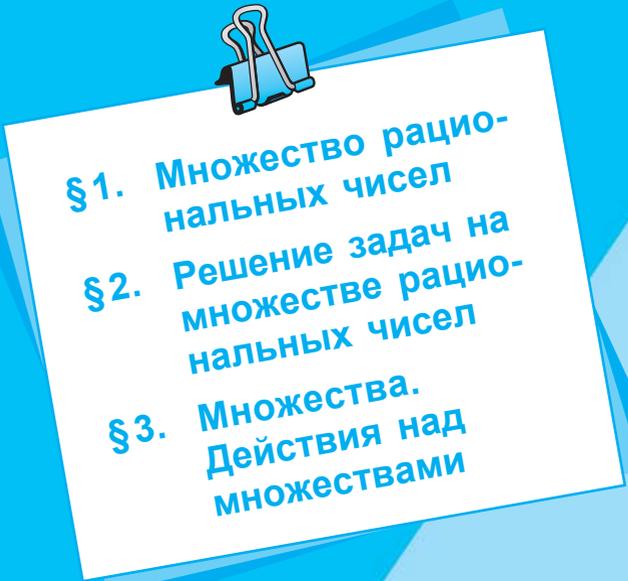
4. Решите задачу при помощи уравнения.

В ночь на 10 февраля температура воздуха упала на 12°C , а за день повысилась на 4°C и составила 7°C . Какой была температура 9 февраля вечером?

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	35–34	33–32	31–27	26–22	21–17	16–12	11–9	8–6	5–3	2–0

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

- 
- §1. Множество рациональных чисел
 - §2. Решение задач на множестве рациональных чисел
 - §3. Множества. Действия над множествами

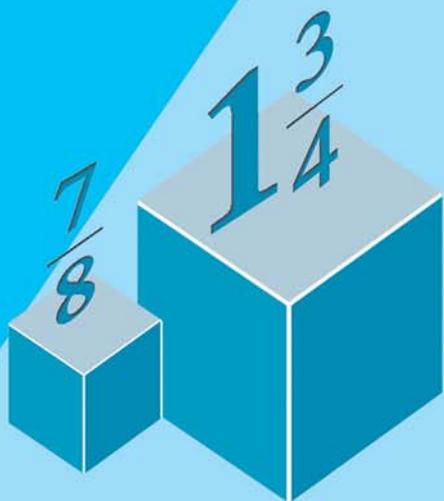
1

2



4

5



§1 Множество рациональных чисел

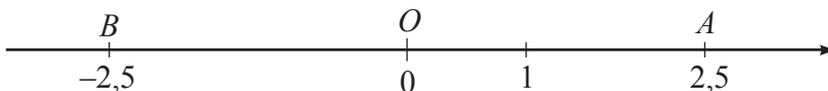
1.1. Понятие рационального числа

Исследуем и узнаем

• Петя увидел на мамином рабочем столе один из бухгалтерских документов – еженедельный отчет. Заметив записи, он удивился, потому что был знаком только с целыми отрицательными числами.

Поразмыслив минуту, он построил числовую ось. Отметил на этой оси сначала точку $A(2,5)$. Затем построил слева от начала отсчета O отрезок OB , длина которого равна длине отрезка OA , и записал $B(-2,5)$.

Дата	Доходы. Расходы (тысяч леев)
7.02	+25,7
8.02	-2,5
9.02	+17,3
10.02	+9,9
11.02	-3,2
12.02	+11,08



Числа $-2,5$ и $2,5$ являются противоположными.

Числа, противоположные положительным десятичным числам, являются отрицательными десятичными числами.

Практическая работа

- 1 Постройте числовую ось и обозначьте начало отсчета точкой O .
- 2 Отметьте на этой числовой оси точки: $M\left(\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{4}\right)$, $D\left(\frac{3}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{4}\right)$.
- 3 Постройте слева от точки O отрезок OF , длина которого равна длине отрезка OM .
- 4 Запишите координату точки F .
- 5 Отметьте на этой же числовой оси точки: $K\left(-\frac{3}{4}\right)$, $E\left(-\frac{3}{2}\right)$, $G\left(-\frac{1}{4}\right)$.
- 6 Определите пары противоположных чисел.

Числа $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$ являются отрицательными числами.

Применяем

• Выберите из множества $\left\{5; 1\frac{3}{8}; -\frac{1}{5}; 2,3; -21; 21,1; -\frac{5}{3}; -3; -0,7\right\}$:

- а) целые числа;
- б) дроби и смешанные числа;
- в) десятичные числа.

Решение:

Целые числа			Дроби и смешанные числа			Десятичные числа		
5	-21	-3	$1\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}$	2,3	-0,7	21,1
$\frac{5}{1}$	$\frac{-21}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{23}{10}$	$\frac{-7}{10}$	$\frac{211}{10}$

Все эти числа являются рациональными числами.

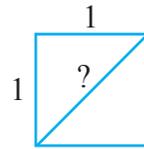


Возьмите на заметку

Число называют **рациональным**, если его можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}^*$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Долгое время рациональные числа не имели названия. Они получили свое название только после того, как появились другие виды чисел. Древнегреческие математики обнаружили, что для измерения длины диагонали квадрата со стороной, равной 1, недостаточно только целых чисел и дробей.

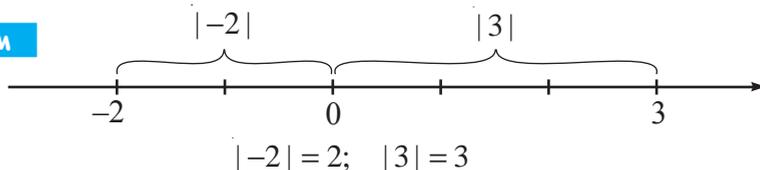


Неизвестные новые числа называли иррациональными, а уже известные – рациональными числами.

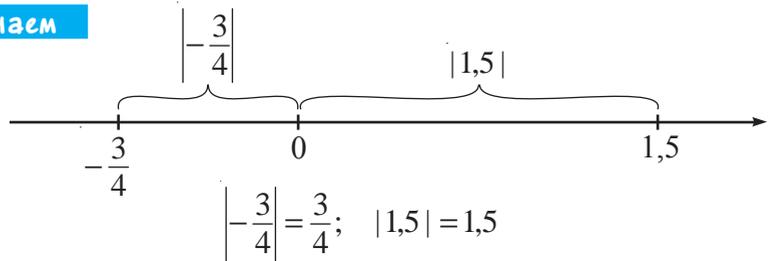
1.2. Модуль рационального числа. Свойства



Вспомним



Исследуем и узнаем



Возьмите на заметку

Расстояние от начала отсчета (точки O) до точки $A(a)$, $a \in \mathbb{Q}$, называется **модулем** (или **абсолютным значением**) рационального числа a и обозначается как $|a|$.

Применяем

- Проанализируйте и заполните пропуски:

$$\begin{array}{cccc}
 |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}; & |5,3| = 5,3; & |-5,23| = \square; & |1\frac{3}{5}| = \square; \\
 |-0,01| = \square; & |-\frac{7}{8}| = \square; & |\frac{7}{8}| = \square; & |0| = \square.
 \end{array}$$

Возьмите на заметку

Для любого рационального числа a :

$$\begin{array}{l}
 \bullet |a| \geq 0 \\
 \bullet |a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \\
 \bullet |-a| = |a|
 \end{array}$$

1.3. Виды записей рациональных чисел

Исследуем и узнаем

1 Миша записал числа $1\frac{1}{4}$; $\frac{10}{8}$; 1,25 и сказал одноклассникам, что все эти числа представляют одно и то же рациональное число. Он объяснил это следующим образом:

$$1\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{5}{4}; \quad \frac{10}{8} = \frac{10 : 2}{8 : 2} = \frac{5}{4}; \quad 1,25 = \frac{125}{100} = \frac{125 : 25}{100 : 25} = \frac{5}{4}.$$

2 Рассмотрите и заполните пропуски:

1) Запишите десятичное число в виде дроби: а) 3,16; б) 10,035.

I способ

$$\text{а) } 3,16 = 3\frac{16}{100} = 3\frac{4}{25} = \frac{79}{25};$$

$$\text{б) } 10,035 = 10\frac{35}{1000} = 10\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}.$$

II способ

$$\text{а) } 3,16 = 3\frac{16}{100} = \frac{316}{100} = \frac{79}{25};$$

$$\text{б) } 10,035 = 10\frac{35}{1000} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}.$$

2) Запишите дробь в виде конечного десятичного числа:

а) $\frac{13}{8}$; б) $-\frac{17}{25}$.

а) $\frac{13}{8} = 1,625$

Выполняем деление

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 8 \\ \hline 50 \\ - 48 \\ \hline 20 \\ - 16 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

б) $-\frac{17}{25} = -$

Выполняем деление

$$\begin{array}{r} 17 \\ - 0 \\ \hline 170 \\ - 170 \\ \hline 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



3 Запишите четыре дроби со знаменателями 5, 7, 16 и 9. Затем запишите каждую дробь как конечное десятичное число, если это возможно. Что вы подметили?

Возьмите на заметку

Если знаменатель несократимой дроби не имеет простых делителей, кроме 2 и 5, то эту дробь можно записать в виде конечного десятичного числа.

1.4. Сравнение рациональных чисел

Исследуем и узнаем

1 Олег с Мишей помогли дедушке вскопать участок. Олег вскопал 0,4 участка, а Миша — $\frac{3}{8}$ участка. Кто из внуков вскопал большую часть?

Решение:

Сравним числа 0,4 и $\frac{3}{8}$.



I способ

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \quad \bullet \quad \frac{3}{8}$$

$$\frac{16}{40} \quad \bullet \quad \frac{15}{40}$$

$$16 \quad > \quad 15$$



II способ

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

$$0,4 \quad \bullet \quad 0,375$$

Ответ: вскопал большую часть.



Возьмите на заметку

Положительные рациональные числа сравниваются так же, как положительные дроби или положительные десятичные числа.

2 Сравните числа:

а) $-\frac{7}{12}$ и $-\frac{9}{16}$;

б) $0,23$ и $-\frac{11}{19}$;

в) $-7\frac{1}{8}$ и 0 .

Решение:

а) $-\frac{7}{12}$ \bullet $-\frac{9}{16}$

↑
меняем знак

$$\left| -\frac{7}{12} \right| \quad \bullet \quad \left| -\frac{9}{16} \right|$$

$$\frac{7}{12} \quad \bullet \quad \frac{9}{16}$$

$$\frac{14}{24} \quad \bullet \quad \frac{13,5}{24}$$

$$14 \quad \bullet \quad 13,5$$

Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

б) $0,23 > -\frac{11}{19}$

в) $-7\frac{1}{8} < 0$

Любое отрицательное число меньше любого положительного числа или нуля.

1.5. Округление рациональных чисел



Вспомним

В свой день рождения Аня узнала, что на почте ее ждет посылка, которую ей прислала подруга из Англии. Посылка весит 3 фунта. Нужна ли будет Ане помощь брата, чтобы принести посылку домой?

$$1 \text{ фунт} = 0,45359237 \text{ кг}$$

Решение:

$$1 \text{ фунт} = 0,45359237 \text{ кг} \approx 0,5 \text{ кг}$$

↑ (+1)
округляем до десятых

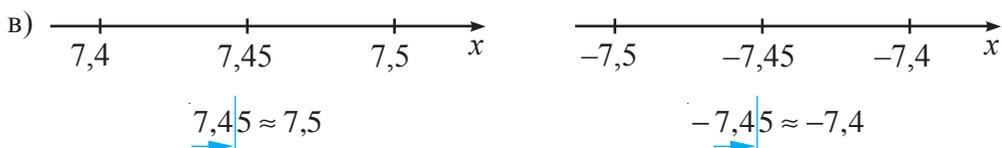
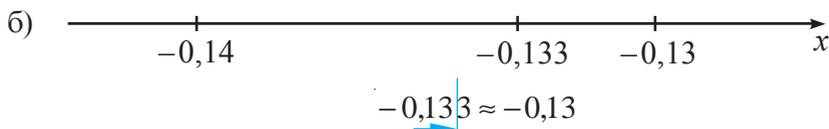
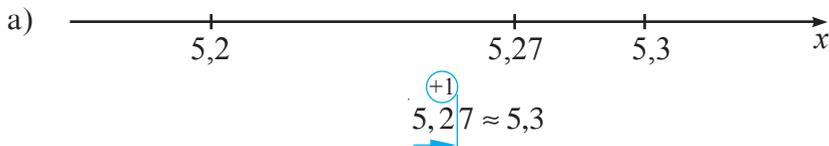
$$0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ (кг)}$$

$$3 \text{ фунта} \approx 1,5 \text{ кг.}$$

Ответ: Аня сможет сама принести посылку домой.



Исследуем и узнаем



Возьмите на заметку

- ① Округлением рационального числа до заданного разряда является число этого разряда, расположенное на числовой оси более близко к данному рациональному числу.
- ② Если рациональное число равноудалено на числовой оси от двух последовательных чисел одного и того же разряда, до которого выполняется округление, то округлением будет большее из них.

Решаем

- Рассмотрите и дополните таблицу:

Рациональное число	Округление		
	до целого	до десятых	до сотых
0,813	1	0,8	0,81
$2\frac{19}{40}$	2	2,5	2,48
-1,365	-1	-1,4	-1,36
-22,727			
0,188			
$-6\frac{2}{5}$			
$12\frac{1}{8}$			



1.6. Сложение и вычитание рациональных чисел

Решаем

1 Вертолет сначала снизил высоту на 50,6 м, а затем поднялся на 102,3 м. Как изменилась высота полета после таких маневров пилота?



Решение:

$$-50,6 + 102,3 = +51,7 \text{ (м).}$$

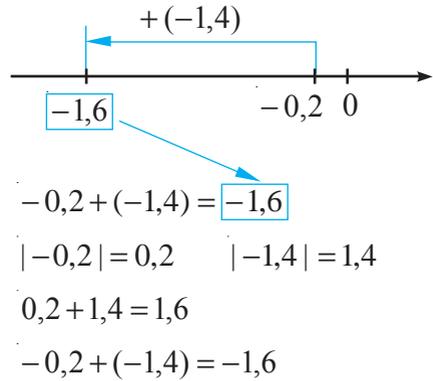
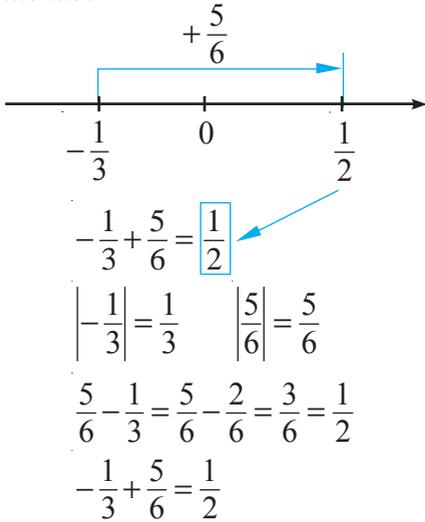
Ответ: Высота полета увеличилась на 51,7 м.

Исследуем и узнаем

2 Выполните действия:

а) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$; б) $-0,2 + (-1,4)$.

Решение:



Возьмите на заметку

- ① Чтобы сложить два рациональных числа с одинаковыми знаками, надо сложить их модули и поставить перед полученным результатом их общий знак.

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}; \quad 0,25 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

- ② Чтобы сложить два рациональных числа с разными знаками, надо:
- 1) из большего модуля вычесть меньший;
 - 2) поставить перед полученным результатом знак того числа, модуль которого больше.

$$-3\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{10} = -3,4.$$

- ③ Выполните действие: а) $-12,78 - 8,56$; б) $-\frac{5}{9} - \left(-\frac{7}{12}\right)$.

Решение:

а) $-12,78 - 8,56 =$
 $= -12,78 + (-8,56) =$
 $= -\square$.

б) $-\frac{5}{9} - \left(-\frac{7}{12}\right) = -\frac{5}{9} + \frac{7}{12} =$
 $= -\frac{\square}{36} + \frac{\square}{36} = \frac{\square}{\square}$.

Возьмите на заметку

Чтобы выполнить вычитание двух рациональных чисел, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Замечание. Сумма и разность двух рациональных чисел есть число рациональное.

1.7. Свойства сложения

Исследуем и узнаем

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



1 Перечертите и заполните таблицу:

a	b	$a+b$	$b+a$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$		
$-0,4$	$-2,7$		



• Вывод: $a+b =$

2 Перечертите и заполните таблицу:

a	b	c	$a+(b+c)$	$(a+b)+c$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$		
$-0,03$	$-0,75$	$-0,25$		



• Вывод: $a+(b+c) =$

3 Выполните действие:

а) $\frac{5}{11}+0 =$; б) $-\frac{2}{7}+0 =$; в) $0+(-0,15) =$.

• Сделайте вывод.

4 Выполните действие:

а) $-\frac{3}{17}+\frac{3}{17} =$; б) $0,31+(-0,31) =$; в) $\frac{2}{13}+\left(-\frac{2}{13}\right) =$.

• Сделайте вывод.

Обобщаем

Свойства сложения рациональных чисел

1° Сложение рациональных чисел коммутативно:

$$a+b=b+a, \text{ для любых } a, b \in \mathbb{Q}.$$

2° Сложение рациональных чисел ассоциативно:

$$a+(b+c)=(a+b)+c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

3° Число 0 является нейтральным элементом сложения рациональных чисел:

$$a+0=0+a=a, \text{ для любого } a \in \mathbb{Q}.$$

4° Для любого рационального числа a существует только одно противоположное ему число, равное $-a$, причем $a+(-a)=-a+a=0$.

Применяем

Завершите вычисление:

$$\text{а) } -\frac{4}{15} + \left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{4}{15} = -\frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \left(-\frac{1}{7}\right) = 0 + \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{\square}{\square};$$

$$\text{б) } (0,01 + (-3,2)) + 3,2 = 0,01 + (\square + \square) = 0,01 + \square = \square.$$

1.8. Раскрытие скобок

Исследуем и узнаем

1 Выполните действие:

$$\text{а) } 7,1 + (2,9 + 3,1);$$

$$\text{б) } 7,1 + 2,9 + 3,1;$$

$$\text{в) } 6,3 + (-5,3 + 2,2);$$

$$\text{г) } 6,3 - 5,3 + 2,2.$$

Завершите решение и сравните полученные результаты:

$$\text{а) } 7,1 + (2,9 + 3,1) = 7,1 + \square = \square; \quad \text{б) } 7,1 + 2,9 + 3,1 = \square.$$

$$a + (b + c) = a + b + c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Завершите решение и сравните полученные результаты:

$$\text{в) } 6,3 + (-5,3 + 2,2) = 6,3 + (\square) = \square; \quad \text{г) } 6,3 - 5,3 + 2,2 = \square.$$

$$a + (-b + c) = a - b + c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Обобщаем

При раскрытии скобок, перед которыми стоит знак плюс (+), знаки слагаемых, стоящих в скобках, сохраняются:

$$+(a - b + c) = a - b + c.$$

Применяем

$$2 \text{ Вычислите: } -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} - 2\right).$$

Проанализируйте и закончите решение.

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} - 2\right) = -\frac{1}{2} \bullet \frac{3}{2} \bullet 2 = \square \bullet 2 = \square.$$

Исследуем и узнаем

$$3 \text{ Вычислите: а) } \frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6} - 9\right);$$

$$\text{б) } \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 9;$$

$$\text{в) } 0,03 - (0,03 + 2,72);$$

$$\text{г) } 0,03 - 0,03 - 2,72.$$

Завершите решение и сравните полученные результаты:

а) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6} - 9\right) = \frac{5}{6} - (\text{■}) = \text{■}$; б) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 9 = \text{■} + 9 = \text{■}$.

$$a - (-b - c) = a + b + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

в) $0,03 - (0,03 + 2,72) = 0,03 - \text{■} = \text{■}$;

г) $0,03 - 0,03 - 2,72 = \text{■} - 2,72 = \text{■}$.

$$a - (b + c) = a - b - c, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Обобщаем

При раскрытии скобок, перед которыми стоит знак минус (-), знак каждого слагаемого, стоящего в скобках, меняется на противоположный:

$$-(a + b - c) = -a - b + c.$$

Применяем

4 Вычислите: $0,1 - (-0,9 + 101)$.

Проанализируйте и закончите вычисление:

$$0,1 - (-0,9 + 101) = 0,1 + 0,9 \bullet 101 = \text{■} \bullet 101 = \text{■}.$$

1.9. Умножение и деление рациональных чисел

Исследуем и узнаем

1 Температура тела летучей мыши может опуститься до $-6,6^\circ\text{C}$. Найдите, до скольких градусов может опуститься температура тела ящерицы, если известно, что она составляет $\frac{2}{3}$ от минимальной температуры тела летучей мыши.



Решение:

$$-6,6 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{66}{10} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{44}{10} = -4,4 \text{ (градусов)}.$$

Ответ: $-4,4^\circ\text{C}$.

Возьмите на заметку

Произведение двух рациональных чисел a и b положительно, если числа a и b одного знака.

$$\begin{aligned} \bullet & (+) \cdot (+) = + \\ & (+) \cdot (-) = - \\ & (-) \cdot (+) = - \\ & (-) \cdot (-) = + \end{aligned}$$

Произведение двух рациональных чисел a и b отрицательно, если числа a и b разного знака.

Применяем

2 Вычислите: а) $-1,2 \cdot (-17,5)$; б) $-\frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9}$.

Проанализируйте и закончите вычисление:

а) $-1,2 \cdot (-17,5) = \square \cdot \square = \square$;

б) $-\frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\square}{\square} = -\frac{\square}{\square}$.

Замечание. Произведение двух рациональных чисел есть число рациональное.

Исследуем и узнаем

3 Днем температура воздуха была $-8,5^\circ\text{C}$, что составляет $\frac{5}{6}$ температуры, которая была ночью. Какой была температура воздуха ночью?

Решение:

$$-8,5 : \frac{5}{6} = -8,5 \cdot \frac{6}{5} = -\frac{85}{10} \cdot \frac{6}{5} = -10,2 \text{ (градусов по Цельсию).}$$

Ответ: $-10,2^\circ\text{C}$.



Возьмите на заметку

Частное двух рациональных чисел a и b положительно, если числа a и b одного знака.

$$\begin{aligned} (+) : (+) &= + \\ (-) : (-) &= + \\ (-) : (+) &= - \\ (+) : (-) &= - \end{aligned}$$

Частное двух рациональных чисел a и b отрицательно, если числа a и b разного знака.

Применяем

4 Вычислите: а) $-1\frac{3}{7} : \left(-\frac{5}{21}\right)$; б) $0,2 : (-1,1)$.

Проанализируйте и закончите вычисление:

а) $-1\frac{3}{7} : \left(-\frac{5}{21}\right) = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \square$;

б) $0,2 : (-1,1) = -\square : \square = -\square$.

Замечание. Частное двух рациональных чисел есть число рациональное.

Возьмите на заметку

Для любого ненулевого рационального числа a существует единственное обратное ему число $\frac{1}{a}$ такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

1.10. Свойства умножения

Исследуем и узнаем

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



1 Перечертите и заполните таблицу:

a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$
-0,8	1,5		
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{7}$		
1	-1,23		
$-\frac{9}{17}$	1		



Вывод: $a \cdot b = \square \cdot \square$;

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = \square$

2 Подставьте вместо a , b и c произвольные рациональные числа и проверьте формулы:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q};$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q};$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Возьмите на заметку

Свойства умножения рациональных чисел

1° Умножение рациональных чисел коммутативно:

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ для любых } a, b \in \mathbb{Q}.$$

2° Умножение рациональных чисел ассоциативно:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ для любых } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

3° Число 1 является нейтральным элементом умножения рациональных чисел:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ для любого } a \in \mathbb{Q}.$$

4° Умножение рациональных чисел дистрибутивно относительно сложения и вычитания: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$, для любых $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Из свойства 4° следуют правила вынесения общего множителя за скобки и раскрытия скобок.

Вынесение общего множителя

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Раскрытие скобок

Применяем

• Вычислите рациональным способом, применив свойства умножения:

а) $-\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{5}$; б) $-2,7 \cdot 0,54 - 2,7 \cdot 0,46$; в) $-\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{9}\right)$.

Проанализируйте и закончите вычисления:

а) $-\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{5} = -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{13} = -\square \cdot \frac{7}{13} = -\frac{\square}{\square}$.

б) Выносим общий множитель $-2,7$:

$$-2,7 \cdot 0,54 - 2,7 \cdot 0,46 = -2,7 \cdot (0,54 \oplus 0,46) = -2,7 \cdot \square = -\square.$$

в) Раскрываем скобки:

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{9}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = -\square + \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = -\square + \frac{\square}{\square} = -\frac{\square}{\square}.$$

Всезнайка применяет свойства умножения для выполнения быстрых вычислений:

$$3\frac{2}{5} \cdot 5 = \left(3 + \frac{2}{5}\right) \cdot 5 = 15 + 2 = 17$$

$$12 \cdot 1,5 = 12 \cdot (1 + 0,5) = 12 + 6 = 18$$



Попробуйте и вы:

$$2\frac{2}{3} \cdot 6 = \left(\square + \frac{\square}{\square}\right) \cdot 6 = \square + \square = \square.$$

$$14 \cdot 2,5 = 14 \cdot (\square + \square) = \square + \square = \square.$$

1.11. Нахождение дроби от числа

Замечаем и делаем выводы

1 В школе магии и волшебства, где учился Гарри Потер, 142 лестницы, $\frac{12}{71}$ из них волшебные.

Сколько волшебных лестниц в школе магии?

Решение:

$$(142 : 71) \cdot 12 = 24 \text{ (лестницы).}$$

Ответ: 24 лестницы.



Вспомним

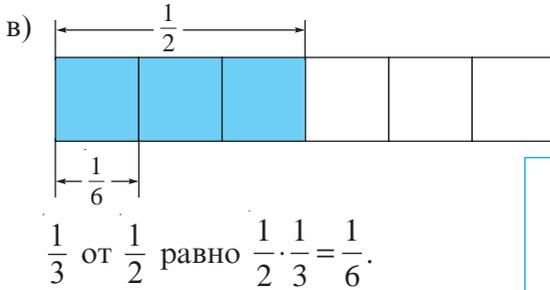
Чтобы найти дробь от числа, надо:

- данное число разделить на знаменатель дроби;
- полученный результат умножить на числитель дроби.

Применяем

а) $\frac{5}{7}$ от 21 равно $(21:7) \cdot 5 = 15$ или $21 \cdot \frac{5}{7} = \frac{21 \cdot 5}{7} = 15$;

б) $\frac{3}{8}$ от 12 равно $12 \cdot \frac{3}{8} = \frac{12 \cdot 3}{8} = \frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2}$.



Возьмите на заметку

Чтобы найти дробь от числа, нужно умножить число на эту дробь.

Применяем и объясняем

2 Илья потратил $\frac{3}{4}$ денег со счета своего мобильного телефона. $\frac{2}{3}$ из них были потрачены на передачу СМС-сообщений. Какую часть денег со счета Илья потратил на передачу СМС-сообщений?



Решение:

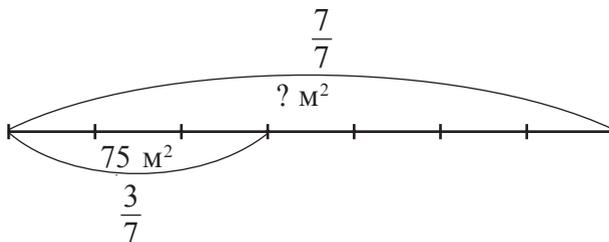
$\frac{2}{3}$ от $\frac{3}{4}$ равно $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ денег со счета мобильного телефона.

1.12. Нахождение числа по его дроби

Исследуем и узнаем

1 В первый день рабочий покрасил 75 м^2 поверхности стены, что составляет $\frac{3}{7}$ от всей площади, которую нужно покрасить. Чему равна площадь всей поверхности стены?



$75 : 3 = 25$ (м²) – составляет одна часть;

$25 \cdot 7 = 175$ (м²) – вся поверхность.

Решение задачи можно записать следующим образом:

$$(75 : 3) \cdot 7 = 175 \text{ (м}^2\text{)} \text{ или } 75 : \frac{3}{7} = 175 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Возьмите на заметку

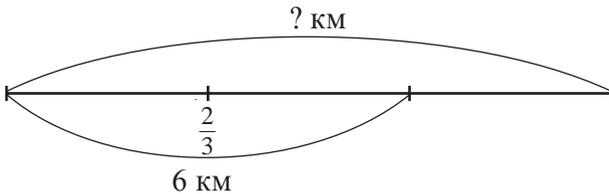
Чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на дробь.

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!

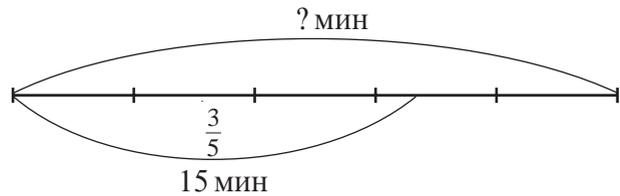


Составьте и решите задачу, используя данные рисунка.

2



3



1.13. Степень рационального числа с натуральным показателем



Вспомним

Сотрудникам одной фирмы предложили оригинальный метод оплаты труда: за один час работы в день – 2 лея. Каждый следующий час – оплата удваивается. Какой будет дневная оплата сотрудника фирмы, если он проработает 8 часов?

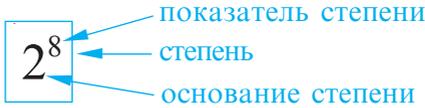
Решение:

$$2 \cdot 2 = 2^8 = 256 \text{ (леев).}$$

Ответ: 256 леев.



Найдите, какую сумму денег потеряет сотрудник, если он уйдет с работы на час раньше.



Читаем:
Два в восьмой степени.

Исследуем и узнаем

$$(1,5)^3 = 1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 3,375;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81};$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32.$$

Возьмите на заметку

Степенью рационального числа a с натуральным показателем $n, n \in \mathbb{N}^*$, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$$a^1 = a \quad | \quad a^0 = 1$$

$$a \in \mathbb{Q} \quad | \quad a \in \mathbb{Q}^*$$

0^0 – не имеет смысла

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!

Определите знак степени:

$$(-1,73)^4 \text{ } \bullet \text{ } 0;$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^6 \text{ } \bullet \text{ } 0;$$



$$\left(-\frac{7}{9}\right)^7 \text{ } \bullet \text{ } 0;$$

$$(-0,03)^3 \text{ } \bullet \text{ } 0.$$

• Сделайте вывод.

Решаем

• Рассмотрите и заполните таблицу:

Произведение	Степень	Основание степени	Показатель степени	Значение степени
$(-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2)$	$(-0,2)^3$	-0,2	3	-0,008
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$				
		$-\frac{2}{3}$	4	
	$\left(1\frac{1}{2}\right)^5$			



1.14. Порядок выполнения действий и использования скобок



Возьмите на заметку

- ① В упражнении на вычисление, которое содержит несколько действий с рациональными числами:
- сначала выполняем возведение в степень;
 - затем умножение и деление в том порядке, в котором они записаны;
 - затем сложение и вычитание в том порядке, в котором они записаны.
- ② В упражнениях, которые содержат скобки:
- сначала выполняем действия в круглых скобках;
 - затем действия в квадратных скобках;
 - затем действия в фигурных скобках.

Применяем

$$\text{а) } -6 \overset{\textcircled{2}}{\frac{2}{5}} \cdot 1 \overset{\textcircled{3}}{\frac{9}{16}} + \left(-2 \overset{\textcircled{1}}{\frac{1}{4}} \right)^2 = -\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \left(-\frac{\square}{\square} \right)^2 = -\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} =$$

$$= -\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = -\frac{\square}{\square} = -\frac{\square}{\square};$$

$$\text{б) } 26 \cdot (-2)^3 - \left\{ 3 \overset{\textcircled{7}}{\frac{1}{2}} + 5 \cdot \left[0,5 - 2 \cdot \left(5 \overset{\textcircled{3}}{\frac{1}{3}} + 7 \overset{\textcircled{2}}{\frac{2}{3}} \right) \right] \right\} =$$

$$= \square \cdot \square - \{ \square + 5 \cdot [0,5 - 2 \cdot \square] \} = \square - \square = \square.$$

Упражнения и задачи



- Отметьте на числовой оси точки: $A(2)$; $B(-1,5)$; $C\left(-2\frac{1}{4}\right)$; $D\left(\frac{5}{4}\right)$.
- Запишите числа, противоположные данным: $5,1$; $-0,25$; $-\frac{7}{8}$; $1\frac{3}{7}$; $2,7$; $-3\frac{1}{9}$.
- Найдите:
 - $-a$, если $a \in \{-3,1; 1\frac{5}{6}; -2,03; 0\}$;
 - b , если $-b \in \left\{-6,2; 3\frac{1}{3}; -0,1; \frac{29}{28}\right\}$;
 - $-(-c)$, если $c \in \left\{\frac{13}{15}; -1,3; -2,52; 0\right\}$.

4. Перечертите таблицу и впишите в каждую ячейку знак \in , если точка принадлежит указанному множеству, или знак \notin , если точка не принадлежит этому множеству:

-3,5	$1\frac{1}{6}$	-21	37	0	$-\frac{7}{11}$	0,003	
							\mathbb{N}
							\mathbb{Z}^*
							\mathbb{Q}_+
							\mathbb{Q}_-



5. Запишите все целые числа, расположенные на числовой оси между числами: а) 3,7 и 5,1; б) -0,135 и 1,02; в) $-1\frac{2}{3}$ и $1\frac{1}{3}$; г) $-\frac{15}{4}$ и $\frac{8}{3}$.
6. Найдите модуль числа:
 а) 1,3; б) $-\frac{1}{12}$; в) -0,25; г) $1\frac{3}{5}$; д) $\frac{7}{9}$; е) $-4\frac{6}{11}$.
7. Найдите $|a|$, если: а) $a = -2,3$; б) $a = \frac{31}{48}$; в) $a = -7\frac{2}{7}$; г) 0,75.
8. Найдите значение выражения:
 а) $|-7,2| + |3,4|$; б) $|-1,7| - |-0,8|$; в) $|-1,6| \cdot |-6,4|$;
 г) $|\frac{-5}{12}| + |\frac{3}{16}|$; д) $|\frac{-5}{6}| \cdot |\frac{3}{20}|$; е) $|-56| : |0,7|$.
9. Запишите десятичное число в виде несократимой дроби:
 а) 12,2; б) 0,25; в) 0,05; г) -3,08;
 д) 0,875; е) -0,48; ж) -1,92; з) 0,375.
10. Запишите десятичное число в виде смешанного числа:
 а) 1,5; б) -3,2; в) 5,25; г) -3,125; д) -7,005; е) 4,0125.
11. Запишите дробь в виде десятичного числа:
 а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{18}{5}$; д) $\frac{11}{4}$; е) $\frac{7}{20}$; ж) $\frac{1}{25}$.
12. Сравните числа: а) -1,1 \bullet -1,09; б) $-\frac{5}{7}$ \bullet $-\frac{9}{14}$;
 в) 0,2 \bullet 0,2011; г) 2,67 \bullet 2,(6).
13. Расположите в порядке возрастания числа:
 -4,9; $2\frac{1}{3}$; 2,3; -4,901; $-2\frac{1}{2}$; -2,6; 0.
14. Расположите в порядке убывания числа:
 -3,7; 0; 5,11; $-3\frac{3}{5}$; 0,1(2); 0,12; $5\frac{14}{125}$.
15. Впишите пропущенную цифру:
 а) $-2,02 < -2, \blacksquare 1$; б) $-3,4 \blacksquare 6 > -3,415$;
 в) $-11,1 \blacksquare < -11,18$; г) $-2 \blacksquare ,09 < -27,1$.

16. Между какими последовательными целыми числами на числовой оси расположено число:
- а) $5\frac{3}{11}$; б) $-2\frac{9}{13}$; в) $-9,3$; г) $-11\frac{2}{3}$; д) $0,324$; е) $-0,12$?

Образец:

$$3 < 3\frac{1}{3} < 4.$$

17. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Учитель записал на доске несколько примеров на сравнение, но на перемене кто-то из учеников стер некоторые цифры. На уроке учитель сказал, что данные числа можно сравнить, не восстанавливая примеры. Сравните:

- а) $-3,3$ и $-3,2$;
 б) $-0,518$ и $-0,517$;
 в) $-$, $,$ и 0 ;
 г) $-$, $,$ и $,$.



18. Устно определите необходимый знак сравнения:

- а) $|-1,6|$ \bullet 0 ; б) $|\frac{3}{8}|$ \bullet $-\frac{3}{8}$;
 в) $1,56$ \bullet $|-1,56|$; г) $-0,09$ \bullet $|-0,001|$.



19.



ИЛ-86

$v \approx 15,23$ км/мин



Боинг 373

$v \approx 15,47$ км/мин

- а) До какого разряда округлили средние скорости самолетов, изображенных на рисунке?
 б) Найдите средние скорости самолетов в км/ч и округлите полученные результаты до целых.
20. Округлите: а) до десятых числа: $3,46$; $-2,17$; $0,052$; $-1,65$;
 б) до сотых числа: $25,729$; $-31,047$; $-0,171$; $6,725$.

21. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Перечертите и заполните таблицу:

Число	Округление числа до		
	целых	десятих	сотых
2,365			
-1,884			
-61,753			
0,6(4)			
2,(17)			



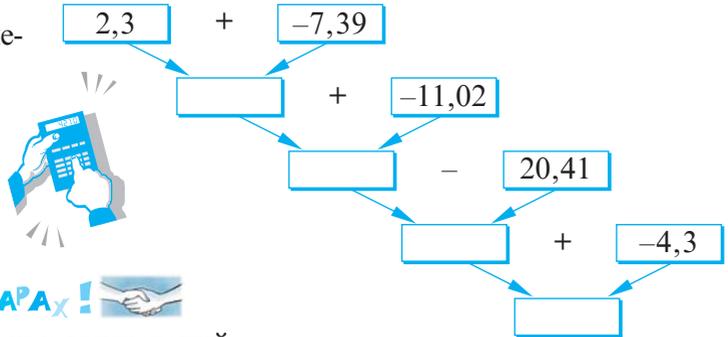
22. Впишите подходящую цифру:

- а) $21,5 \blacksquare \approx 21,6$; б) $-3,92 \blacksquare \approx -3,92$; в) $71,0 \blacksquare \approx 71,1$; г) $-5,2 \blacksquare \approx -5,3$.

23. Вычислите:

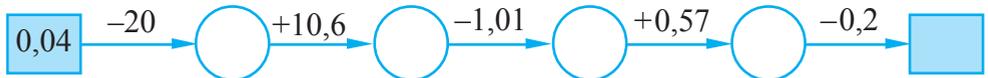
- а) $-4,1+1,6$; б) $2,8-5,5$; в) $-2,3-1,4$; г) $4-5,9$;
 д) $\frac{2}{15}-\frac{3}{10}$; е) $-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$; ж) $-\frac{3}{7}-\frac{20}{21}$; з) $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$;
 и) $-3\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{6}\right)$; к) $-2\frac{3}{8}-1\frac{7}{10}$; л) $-5\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}$; м) $4\frac{3}{7}-8\frac{9}{14}$;
 н) $-2\frac{3}{4}-\left(-3\frac{2}{5}\right)$; о) $3\frac{7}{9}-1\frac{1}{12}$; п) $2\frac{5}{8}-3\frac{5}{6}$; р) $-1\frac{3}{4}+2\frac{7}{8}$.

24. Выполните вычисления по схеме:



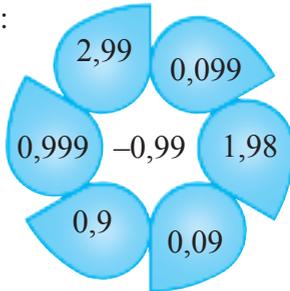
25. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!

Восстановите цепочку вычислений:

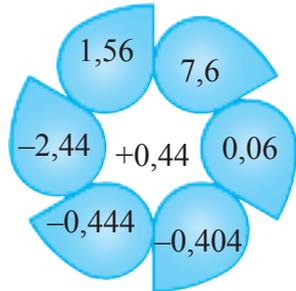


26. Вычислите:

а)



б)



27. Кто быстрее найдет строчку, столбец и диагональ с числами, сумма которых равна указанному числу?

а) $\textcircled{1,2}$

-3,2	1,5	0,5
4,4	1,6	-4,7
1,1	-4,3	2,8

б) $\textcircled{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$
$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{5}{8}$

28. Вычислите рациональным способом:

а) $-3,72 + 5,26 + 2,72$;

б) $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right)$;

в) $(0,39 - 10,56) + 10,56$;

г) $-3,78 + 9,84 + 1,78 - 20,84$.

29. Раскройте скобки и выполните действия:

а) $-3,8 - (-8,1 + 3,9)$;

б) $7,5 + (-8,4 - 2,1)$;

в) $-\frac{7}{8} - \left(1\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$;

г) $\frac{4}{9} - \left(-1\frac{1}{3} + \frac{7}{9}\right)$;

д) $-8,76 - (-3,25 - 10,76)$;

е) $-6,19 + (-1,5 + 5,19)$;

ж) $-\frac{9}{20} - \left(-\frac{11}{20} - \frac{5}{6}\right)$;

з) $\frac{17}{28} + \frac{5}{18} - \left(\frac{3}{28} - \frac{13}{18}\right)$.

30. Вычислите:

а) $-1,2 \cdot (-0,8)$;

б) $-12,5 \cdot 3,6$;

в) $-5,6 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$;

г) $\frac{2}{9} \cdot \left(-1\frac{2}{7}\right)$;

д) $1,2 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$;

е) $-4\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{7}$.

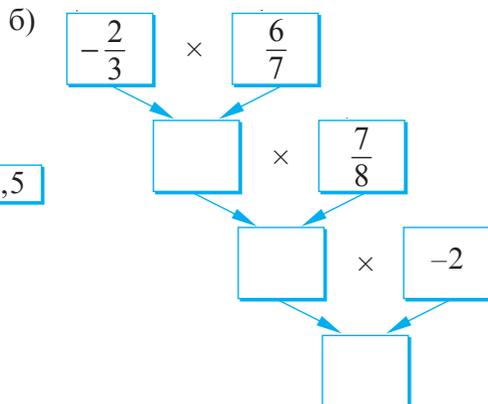
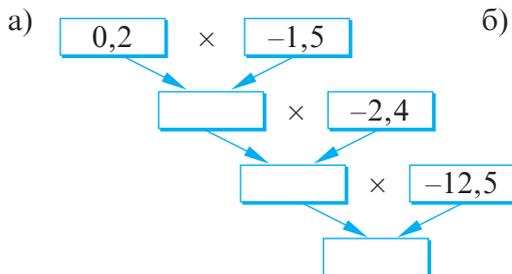
31. Перечертите и заполните таблицу:

a	-3	$-0,3$	$0,25$	$\frac{3}{8}$	$-1\frac{1}{4}$
$-0,2a$					



32. Мунчештское шоссе – одна из самых длинных улиц Европы и самая длинная улица в Кишиневе. Ее протяженность составляет $11\frac{1}{2}$ км. Самая короткая улица Кишинева – улица Триколор протяженностью $0,335$ км. На сколько километров Мунчештское шоссе длиннее улицы Триколор?

33. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Выполните вычисления по схеме:



34. Вычислите:

а) $-2,4 : 0,8$;

б) $8,4 : (-0,42)$;

в) $-8,64 : (-1,2)$;

г) $-4\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$;

д) $\left(-5\frac{1}{7}\right) : \left(-1\frac{2}{7}\right)$;

е) $-0,78 : \left(-2\frac{3}{5}\right)$.

35. Сколько стоит 1 кг печенья, если за $5\frac{2}{3}$ кг заплатили 229,5 лея?

36. У дедушки Вани есть 5 ульев. Со всех ульев он собрал 182,5 кг меда. Сколько килограммов меда в среднем собрал дедушка с одного улья?

37. Вычислите рациональным способом:

а) $0,4 \cdot 3,56 \cdot (-2,5)$;

б) $0,2 \cdot (-12,51) \cdot 5$;

в) $3,6 \cdot 0,03 + 6,4 \cdot 0,03$;

г) $-12,3 \cdot 0,054 + (-12,3) \cdot 0,046$.

38. Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $-\frac{2}{3} \cdot 0,4 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,6$;

б) $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{7} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$;

в) $2,7 \cdot 1,9 - 3,7 \cdot 1,9$;

г) $1,4 \cdot 0,9 - 1,4 \cdot 5,9$.

39. Найдите:

а) $\frac{2}{3}$ от 27;

б) $\frac{1}{4}$ от 40;

в) $\frac{3}{8}$ от 16;

г) $\frac{5}{6}$ от 42;

д) $\frac{3}{5}$ от 12;

е) $\frac{2}{7}$ от 20;

ж) $\frac{1}{3}$ от $\frac{3}{2}$;

з) $\frac{3}{4}$ от $\frac{8}{9}$.

40. Автомобиль должен проехать 240 км. Какое расстояние проехал автомобиль, если оно составляет $\frac{2}{3}$ пути?

41. Масса муравья составляет $\frac{1}{10}$ от массы груза, который он может нести. Какова масса муравья, если он может нести $\frac{7}{250}$ г груза?



42. Размер обуви составляет $\frac{3}{2}$ длины стопы. Какой размер обуви носит Миша, если длина его стопы равна 24 см?

43. В автопробеге участвовали 48 автомобилей. $\frac{5}{8}$ из них дошли до финиша. Сколько автомобилей сошли с дистанции?

44. Треть расстояния между двумя населенными пунктами составляет 7 км. Чему равно расстояние между этими пунктами?

45. Найдите число:

- а) $\frac{7}{10}$ которого равны 21; б) $\frac{3}{4}$ которого равны 12;
в) $\frac{8}{9}$ которого равны 24; г) $\frac{3}{2}$ которого равны 15.

46. За булочку Света заплатила $4\frac{1}{2}$ лей. Сколько денег было у Светы, если за булочку она заплатила $\frac{1}{4}$ всех денег?

47. Только 12 учеников 6 „А“ класса занимаются спортом, что составляет $\frac{3}{7}$ учеников класса. Сколько всего учеников в этом классе?

48. Запишите в виде степени:

- а) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$; б) $(-1,3) \cdot (-1,3) \cdot (-1,3)$;
в) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$.

49. Определите устно. *Истинно* или *Ложно*?

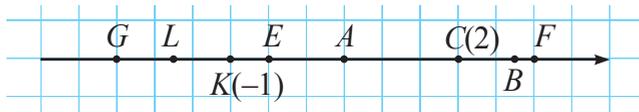
- а) $(-2,1)^2 = (2,1)^2$; б) $(-5,3)^4 = -(5,3)^4$; в) $\left(-\frac{7}{8}\right)^3 < 0$;
г) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 > 0$; д) $(-25)^3 < (-25)^2$.



50. Вычислите:

- а) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{15}$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 16$; в) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1\frac{1}{5}$; г) $\left(\frac{5}{9} - \frac{3}{7}\right)^0$.

51. Перечертите числовую ось:



Определите и укажите начало отсчета данной оси, единичный отрезок, координаты точек G, L, E, A, B, F .

52. Даны числа: $5,7$; $-7,3$; $-\frac{3}{4}$; $7\frac{1}{3}$; $-0,02$.

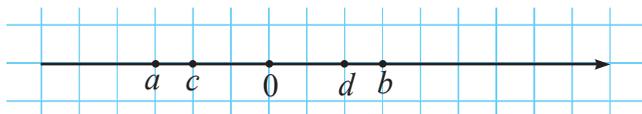
Запишите:

- а) противоположные им числа; б) обратные им числа.

53. Запишите числа в порядке возрастания их модулей:

$$-3,5; 0; -\frac{7}{9}; 0,7; -0,007; 1,3.$$

54. На числовой оси отмечены числа: a , b , c и d .



Впишите соответствующий знак сравнения:

b d ; c d ; a c ; a b ; d 0 ;
 $-a$ c ; a 0 ; $-b$ d ; $-b$ 0 ; 0 $-a$.



55. Найдите рациональное число a , если известно, что:

- а) $|a|=3,1$; б) $|a|=\frac{5}{13}$; в) $|a|=0$;
 г) $|a|=2,3$; д) $|a|=1\frac{1}{3}$; е) $|a|=0,99$.

56. Отметьте на числовой оси числа, модули которых:

- а) 2,5; б) $\frac{1}{2}$; в) $3\frac{1}{4}$.

57. Впишите такое число, чтобы получить верное двойное неравенство:

- а) $-2 < \blacksquare < 2$; б) $0,86 < \blacksquare < 0,862$; в) $1,4 < \blacksquare < 1,5$;
 г) $-3,19 < \blacksquare < -3,18$; д) $\frac{2}{5} < \blacksquare < \frac{2}{3}$; е) $-\frac{1}{2} < \blacksquare < -\frac{1}{4}$.

58. Даны множества:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1,2 \leq x \leq 3,7\} \text{ и } B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{24}{11} < x < \frac{5}{13}\right\}.$$

Сравните: $\text{card } A$ $\text{card } B$.

59. Истинно или Ложно?



- а) Если $a > 2$, то $a > 0$, $a \in \mathbb{Q}$.
 б) Если $a < 3$, то $a < 0$, $a \in \mathbb{Q}$.
 в) Если $a > -10$, то $a < 0$, $a \in \mathbb{Q}$.
 г) Если $-3,2 < a < -0,1$, то $a < 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

Для ложных высказываний приведите по одному примеру, показывающему, что высказывание не истинно.

60. Запишите каждое из чисел $-\frac{2}{3}$ и $-7,8$ в виде суммы:

- а) двух отрицательных чисел; б) чисел с разными знаками.

61. Вычислите, переводя слагаемые в десятичные числа:

- а) $-2\frac{1}{2} - 0,254$; б) $-\frac{3}{4} + 0,35$; в) $-4,39 + 4\frac{2}{5}$; г) $\frac{5}{8} - 1,1$.

62. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! Подставьте вместо знак плюс (+) или минус (-), чтобы получить верное равенство:

- а) ($0,9$) + ($3,7$) = $-2,8$; б) $\left(\text{★} \frac{2}{7}\right) + \left(\text{★} \frac{8}{21}\right) = -\frac{2}{3}$.

63. Впишите пропущенное слагаемое:

а) $-2,3 + (-7,7) + \square = 0$; б) $\frac{5}{12} + \left(-\frac{3}{8}\right) + \square = 0$.

64. Найдите значение выражения, если известно, что $a = -3,2$ и $b = 1,8$:

а) $a + b$; б) $|a| + b$; в) $a + |b|$; г) $|a + b|$; д) $|a| + |b|$.

65. Сравните значения выражений $|a| + |b|$ и $|a + b|$, если:

а) $a = -2,8$, $b = 1,3$; б) $a = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$; в) $a = 7,1$, $b = 4,8$.

Какими должны быть числа a и b , чтобы $|a + b| = |a| + |b|$?

66. Используя числовую ось, найдите расстояние между точками A и B , если:

а) $A(-3,7)$, $B(-2,8)$; б) $A\left(\frac{2}{5}\right)$, $B\left(-\frac{1}{20}\right)$; в) $A(-0,3)$, $B(7,1)$.

67. Вычислите рациональным способом:

а) $\frac{7}{16} - \frac{11}{42} - \frac{9}{16} + \frac{17}{42}$; б) $-3\frac{5}{11} + 1\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6} - 4\frac{6}{11}$;
в) $-1,23 + 2,14 + 7,38 - 5,77 + 1,62$; г) $-9,39 + 0,74 - 10,61 + 3,26 + 6,25$.

68. Раскройте скобки и выполните действия:

а) $\left(-3\frac{5}{8} + 7,6\right) - \left(10,8 - 8\frac{3}{4}\right)$; б) $-\left(5\frac{4}{9} - 6\frac{5}{12}\right) + \left(-3\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right)$.

69. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Магия чисел

а) $5 + \frac{5}{4} = 5 \cdot \frac{5}{4}$; б) $3,5 + 1,4 = 3,5 \cdot 1,4$; в) $3 + 1,5 = 3 \cdot 1,5$.

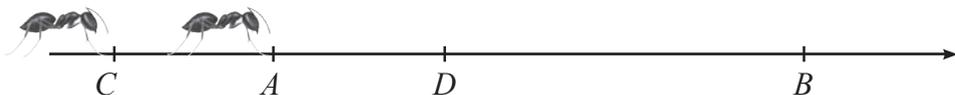
Найдите другие пары таких чисел?

70. Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $-4,8 \cdot 8,9 + 8,9 \cdot (-5,2)$; б) $-1,2 \cdot \left(-7\frac{9}{13}\right) - (-1,2) \cdot 2\frac{4}{13}$;

в) $-2\frac{3}{7} \cdot 2\frac{4}{5} + \left(-2\frac{3}{7}\right) \cdot 4\frac{1}{5}$; г) $-32,3 \cdot 7\frac{10}{13} + 2\frac{3}{13} \cdot (-32,3)$.

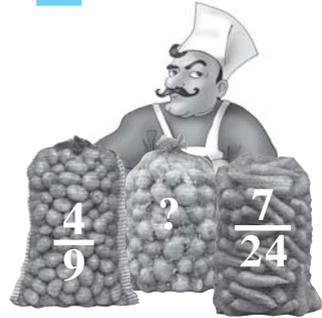
71. Два муравья передвигаются по числовой оси. Первый муравей прошел расстояние от точки $A(-7,2)$ до точки $B(2,8)$ за 5 секунд, а второй муравей – от точки $C(-10,1)$ до точки $D(-4,1)$ за 2 секунды. Какой муравей двигался с большей скоростью?



72. Впишите число, чтобы получить верное равенство:

а) $-3\frac{1}{3} - \square = 2$; б) $\square + (-4,5) = 3\frac{1}{2}$; в) $\square \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = 5,6$;
 г) $\left(-10\frac{1}{5}\right) : \square = 2$; д) $\square : 4,5 = \frac{1}{3}$; е) $\square : 10^2 = -0,02$.

73. У торговца Махлюшкина имеется на продажу 360 кг овощей. $\frac{4}{9}$ овощей составляет картофель, $\frac{7}{24}$ – морковь, а остальное – лук. Сколько килограммов лука у торговца Махлюшкина?



74. До привала туристы прошли $\frac{3}{4}$ запланированного пути, а после привала еще $\frac{1}{3}$ пути, пройденного до привала. Прошли ли туристы запланированный путь?



75. Собрали 10 кг грибов. $\frac{3}{4}$ грибов замариновали, $\frac{1}{5}$ грибов высушили, а из остальных грибов сварили суп. Сколько килограммов грибов пошло на суп?

76. В первый день в школьную библиотеку завезли $\frac{7}{15}$ новых учебников, а во второй день – остальные 56 учебников. Сколько всего новых учебников привезли в библиотеку за два дня?

77. Ширина прямоугольника равна 102 см, что составляет $\frac{17}{18}$ от его длины. Найдите периметр и площадь прямоугольника.

78. Найдите значение выражения:

а) $\left(6,75 - 4,5 \cdot 1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^3$;
 б) $\left(-\frac{5}{12} - \frac{13}{20}\right)^2 \cdot \left(-1\frac{13}{32}\right)$;
 в) $\left(-\frac{11}{18} + \left(-2\frac{2}{9}\right) \cdot (-0,2)\right)^3 \cdot (-1,2)$.



79. *Развлекаемся и решаем.* Петя проехал $\frac{2}{5}$ горки на ногах, а потом упал и еще 8,4 м на спине. Чему равна длина горки?

80. Столб, врытый в землю, возвышается над землей на $\frac{4}{5}$ своей длины. Какова длина части столба, которая находится под землей, если его надземная часть 1,6 м?

81. Влад с одноклассниками собираются на экскурсию в Одессу. У Влада есть 80 леев. Сколько порций любимого мороженого сможет купить Влад, когда обменяет свои деньги на гривны, если цена этого мороженого в Одессе 24,5 гривны? Для решения задачи узнайте в интернете курс молдавского лея и украинской гривны.



82. Семья уезжает на весь июль на дачу. Какое наименьшее количество упаковок чая необходимо им взять с собой, если за один день они расходуют 7 пакетиков чая, а в одной упаковке содержится 25 пакетиков?

83. Зная, что a и b – рациональные числа, определите истинно или ложно высказывание:

- а) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.
- б) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.
- в) Если $a = -b$, то $|a| = |b|$.
- г) Если $a = b$, то $|a| = b$.



84. Впишите подходящее число:

а) $\frac{1}{3} < \blacksquare < \frac{1}{2}$;

б) $-\frac{1}{4} < \blacksquare < -\frac{1}{3}$.

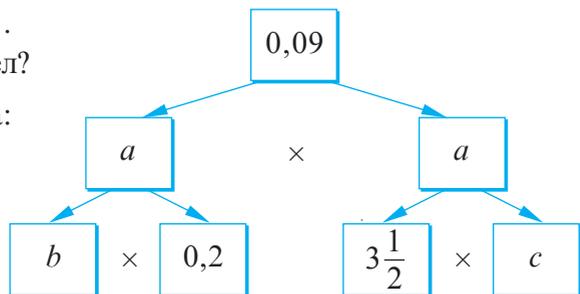
85. Запишите выражение $a + b - c - d$ в виде:

- а) суммы, где $a + b$ – первое слагаемое;
- б) разности, где $a + b$ – уменьшаемое.

86. Известно, что a, b, c – ненулевые отрицательные рациональные числа. Каким будет знак значения выражения $ab - 100c$?

87. Частное двух чисел равно -1 . Чему равна сумма этих чисел?

88. Впишите необходимые числа:



89. За завтраком мама Димы выпила $\frac{1}{6}$ чашки кофе, затем долила в чашку молока. Затем отпила $\frac{1}{3}$ от чашки и опять долила молоко. После этого она выпила еще половину чашки и опять долила молоко. В конце она выпила все содержимое чашки. Чего мама выпила больше: кофе или молока?

90. Три мушкетера, после того как исполнили свой долг перед Францией, зашли в таверну. Они отобедали и заказали на десерт персики. Так как они были уставшими, то уснули до того, как им принесли блюдо с персиками. Первым проснулся Атос. Увидев персики на блюде, он съел $\frac{1}{3}$ всех персиков и опять уснул. Затем проснулся Портос. Увидев персики и подумав, что их еще никто не ел, он съел $\frac{1}{3}$ персиков и опять уснул. Третьим проснулся Арамис и тоже съел $\frac{1}{3}$ персиков. Затем уснул и он. Пока мушкетеры спали, трактирщик отнес блюдо, на котором осталось 8 персиков, на кухню. Сколько персиков было на блюде первоначально?



91. Расположите в порядке возрастания значения выражений:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2; (-1)^3; (-0,4)^2; \left(-2\frac{1}{2}\right)^2; \left(5\frac{7}{11}\right)^0; \left(-2\frac{1}{3}\right)^3; \left(-2\frac{1}{2}\right)^3.$$

92. Чему равно минимальное значение выражения:

а) $(a - 0,5)^2 - 7,2$; б) $4,3 + (x + 1,1)^4$?

93. Три одинаковых котика и два одинаковых щенка весят $2\frac{3}{5}$ кг, а два таких котика и три таких щенка весят 2,9 кг. Сколько весит щенок?

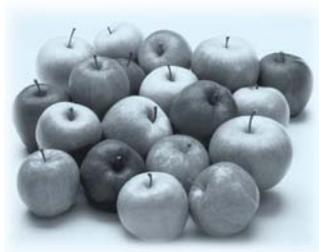


§2 Решение задач на множестве рациональных чисел

2.1. Графический метод

Решаем и поясняем

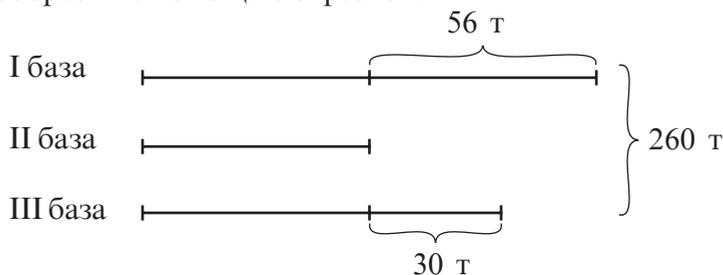
1 Всего на 3 базах было 260 т яблок. На первой базе было на 56 т яблок больше, чем на второй, а на третьей – на 30 т больше, чем на второй базе. Сколько тонн яблок было на каждой базе?



Представим неизвестные и зафиксируем связь между величинами, заданными в задаче с помощью рисунка.

Решение:

1 Изобразим с помощью отрезков:



2 Вычислим сумму значений равных частей:

$$260 - 56 - 30 = 174 \text{ (т).}$$

3 Найдем, сколько тонн яблок было на II базе (значение одной части):

$$174 : 3 = 58 \text{ (т).}$$

4 Найдем, сколько тонн яблок было на I базе:

$$58 + 56 = 114 \text{ (т).}$$

5 Найдем, сколько тонн яблок было на III базе:

$$58 + 30 = 88 \text{ (т).}$$

Проверка: $114 + 58 + 88 = 260$ (т) – И.

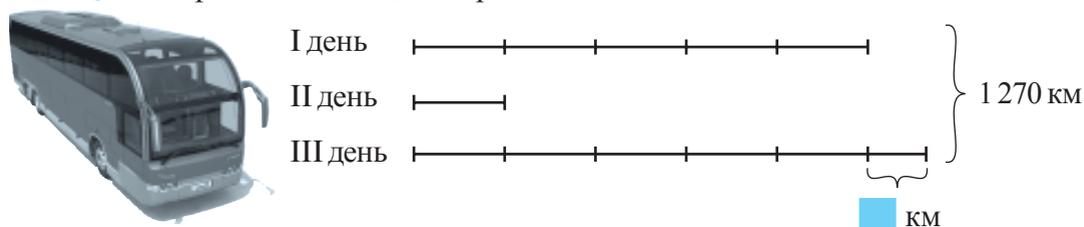
Ответ: I база – 114 т;
II база – 58 т;
III база – 88 т.

Дополняем и поясняем

2 Автобус преодолел расстояние в 1270 км за три дня. В первый день он прошел расстояние в 5 раз больше, чем во второй, а в третий – на 60 км больше, чем в первый день. Сколько километров проезжал автобус каждый день?

Решение:

1 Изобразим с помощью отрезков



2 $1270 - \square = \square$ (км) – сумма значений равных частей.

3 $5 + 1 + 5 = 11$ (равных частей).

4 $1210 : 11 = \square$ (км) – II день.

5 $\square \cdot 5 = \square$ (км) – I день.

6 $\square \cdot 5 + 60 = \square$ (км) – III день.

Проверка: $\square + \square + \square = 1270$ (км) (\square).

Ответ: I день – \square км; II день – \square км; III день – \square км.

2.2. Метод сведения к единице

Решаем и поясняем

1 За 12 коробок конфет заплатили 432 лея. Сколько стоят 8 таких коробок конфет?

Решение:

Применим схему:

12 коробок	432 лея
1 коробка	$432 : 12 = 36$ (леев)
8 коробок	$36 \cdot 8 = 288$ (леев)

Значит, цена одной коробки 36 леев, а 8 коробок стоят 288 леев.

Ответ: 288 леев.

Сводим сравнение величин из условия задачи к их сравнению с одной из величин, принятой за единицу.



Дополняем и поясняем

2 Для празднования Рождества семья купила индюка, гуся, 3 курицы и 5 цыплят. Известно, что цена одного цыпленка 32 лея. Сколько заплатили за всю покупку, если индюк стоит столько же, сколько гусь и 2 курицы, гусь – как одна курица плюс 20 леев, а курица – как 3 цыпленка?



Решение:

Для решения задачи примем за единицу цену цыпленка.

Тогда одна курица стоит $3 \cdot 32 = 96$ (леев).

За гуся заплатили $3 \cdot 96 + 20 = \square + 20 = \square$ (леев).

За индюка: $\square + 2 \cdot 96 = \square$ (леев).

За всю покупку заплатили:

$$\square + \square + 3 \cdot 96 + 5 \cdot 32 = \square \text{ (леев).}$$

Ответ: \square леев.

2.3. Метод обратного хода

Решаем и поясняем

1 Вика задумала число. Она умножила его на 2, потом отняла 5, полученный результат умножила на 3, разделила на 6, затем прибавила к частному 4 и получила 28. Какое число задумала Вика?

Решаем задачу, начиная с конца ее условия.



Решение:

$$\text{Имеем: } \square \cdot 2 - 5 \rightarrow \square \cdot 3 \rightarrow \square : 6 + 4 \rightarrow 28$$

Восстановим число, начиная решение с конца условия:

$$28 \xrightarrow{-4} 24 \xrightarrow{\cdot 6} 144 \xrightarrow{:3} 48 \xrightarrow{+5} 53 \xrightarrow{:2} 26,5$$

Ответ: 26,5.

Дополняем и поясняем

2 В первый день турист шел 6 часов, во второй день он прошел 30 км, в третий день на 20 км больше, чем во второй, а в четвертый день турист шел 5 часов со скоростью 8 км/ч. Всего он преодолел 180 км. С какой скоростью тронулся в путь турист в первый день?

Решение:

Начнем решение задачи с конца условия:

① В четвертый день турист прошел: $5 \cdot 8 = 40$ (км).

② В третий день: $20 + 30 = 50$ (км).

③ За II, III, IV дни вместе:

$$30 + \square + \square = \square \text{ (км)}.$$

④ В первый день он прошел: $180 - \square = \square$ (км).

⑤ В первый день турист тронулся в путь со скоростью:

$$\square : 6 = \square \text{ (км/ч)}.$$

Проверка: $\square + \square + \square + \square = \square$ (км).

Ответ: \square км/ч.



2.4. Метод фальшивой гипотезы

Исследуем и узнаем

1 На лугу пасутся гуси и овцы, всего 98 голов и 252 ноги. Сколько гусей и сколько овец пасутся на лугу?



Решение:

① Предположим, что на лугу пасутся только гуси. Тогда, если есть 98 голов, то имеем $98 \cdot 2 = 196$ (ног).

② Сравнивая с условием задачи, получим: $252 - 196 = 56$, то есть на 56 ног больше.

③ Такой результат мы получили, предположив, что на лугу пасутся только гуси.

④ Учитывая, что у овец не 2, а 4 ноги и то, что у нас получилось на 56 ног больше, найдем, сколько овец пасутся на лугу: $56 : 2 = 28$ (овец).

⑤ Найдем, сколько гусей пасутся на лугу: $98 - 28 = 70$ (гусей).

Проверка: $28 \cdot 4 + 70 \cdot 2 = 252$.

Ответ: 28 овец, 70 гусей.

Дополняем и поясняем

2 На 730 леев можно купить 22 книги по 25 леев и по 40 леев. Сколько книг каждого вида можно купить?

Решение:

① Предположим, что все книги стоят по 40 леев.

Тогда за все 22 книги надо заплатить: $22 \cdot 40 = 880$ (леев).

② Сравнивая с заданной суммой денег, получим:

$$880 - 730 = \square \quad (\text{то есть на } \square \text{ леев больше}).$$

③ Такой результат мы получили, предположив, что все книги стоят по 40 леев.

④ Найдем, сколько книг по 25 леев было куплено:

$$\square : (40 - 25) = \square \quad (\text{книг}).$$

⑤ Найдем, сколько книг по 40 леев было куплено:

$$22 - \square = \square \quad (\text{книг}).$$

Проверка: $\square \cdot \square + \square \cdot \square = 730$ (леев).

Ответ: \square книг по 25 леев; \square книг по 40 леев.

Обобщаем

Суть метода заключается в том, что начинают, как правило, с вопроса задачи, сделав произвольное предположение относительно искомым величин, не противореча условию задачи. Далее данная задача решается на основе сделанного предположения до тех пор, пока не будет получен результат, не соотносимый с условием задачи: либо больше, либо меньше, чем дано в условии. Этот результат (на основе предположения) сравнивается с тем, что дано в условии задачи. Из полученных несоответствий делаем правильный вывод по решению задачи.

Упражнения и задачи

1. Решите задачи графическим методом.

а) Веревку длиной 7,4 м разрезали на две части. Одна часть на 1,6 м длиннее другой. Чему равна длина каждой части?

б) Масса трех металлических деталей равна $15\frac{1}{2}$ кг. Первая деталь на 2,8 кг тяжелее второй, а третья на 2,2 кг тяжелее второй. Какова масса каждой детали?

2. Решите задачи методом сведения к единице.

а) Стоимость 12 книг по одинаковой цене составляет 816 леев. Сколько стоят 5 таких книг?

б) Света купила 18 альбомов и 24 книги по той же цене. За все она рассчиталась купюрой в 500 леев и получила сдачу 17 леев. Сколько стоит один альбом и сколько стоит одна книга?

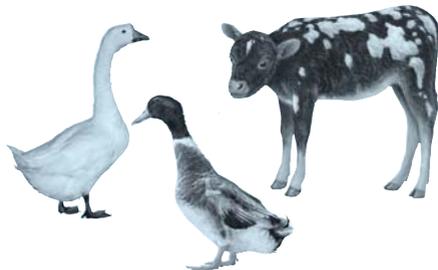
3. Решите задачу методом обратного хода.

От удвоенного числа отняли 10, полученный результат умножили на $\frac{1}{6}$, затем прибавили 3,5, разделили на 8 и получили $20\frac{1}{4}$. Найдите искомое число.

4. Решите задачи **1** и **2** из раздела **2.4**, сделав другое предположение.
5. Решите задачи методом фальшивой гипотезы.
- а) Фермер продавал цыплят и кроликов: всего 20 голов и 68 ног. Сколько цыплят и сколько кроликов выставил на продажу фермер?
- б) В 22 книгах по 50 и по 90 страниц, всего 1340 страниц. Сколько всего книг содержат 50 страниц и сколько – 90 страниц?



6. Решите задачи графическим методом.
- а) Отцу 44 года, а сыну 16 лет. Сколько лет назад отец был в 3 раза старше сына?
- б) В библиотеке 458 книг на трех языках. Книг на испанском языке на 50 меньше, чем книг на французском, и в два раза меньше, чем на английском. Сколько книг на каждом языке в библиотеке?
7. Решите задачу методом сведения к единице.
За 10 дней 6 рабочих выкопали ров длиной 420 м. Какой длины ров могут выкопать за 8 дней 10 рабочих с той же производительностью труда?
8. Решите задачу методом обратного хода.
Домохозяйка продавала на рынке дыни. Первый покупатель купил половину всех дынь и еще полдыни. Второй купил половину того, что осталось и еще полдыни. Третий покупатель купил половину того, что осталось и еще полдыни. Так домохозяйка продала все дыни. Сколько всего дынь было у нее?
9. Решите задачу методом фальшивой гипотезы.
На ферме есть гуси, утки и телята: всего 120 голов и 280 ног. Известно, что число гусей в три раза больше, чем уток. Найдите, сколько гусей, уток и телят на ферме.



10. В классе девочек в три раза больше, чем мальчиков. Может ли быть в этом классе 34 ученика? А 36 учеников? Сколько учеников должно быть в классе, чтобы задача имела решение? Найдите несколько вариантов ответа.
11. а) Составьте задачу, которую можно решить:
- 1) графическим методом; 2) методом сведения к единице;
3) методом обратного хода; 4) методом фальшивой гипотезы.
- б) Предложите одноклассникам решить составленные задачи.

§3 Множества. Действия над множествами

3.1. Понятие множества

1 Какому из множеств принадлежит дерево? Кузнечик? Гномик?

A – множество насекомых;

B – множество сказочных персонажей;

C – множество растений;

D – множество живой природы.



Назовите еще по два элемента, принадлежащих множествам A , B , C или D .



Вспомним

Множество – это совокупность объектов, объединяемых по некоторому признаку. Эти объекты называются **элементами множества**. Множества обозначаются заглавными латинскими буквами: A , B , C , D , ... Элементы множества записываются в фигурных скобках:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством**. Обозначается \emptyset .

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



2 Даны множества:

$$M = \{a, b, c, d\}$$

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 3\}.$$

A – множество дней недели;

B – множество выходных дней недели.



\emptyset – пустое множество

а) Определите способ задания каждого множества.

б) Укажите конечные и бесконечные множества.

в) Найдите $\text{card } M$, $\text{card } A$ и $\text{card } \emptyset$.



Вспомним

Число элементов множества M называется **кардиналом множества M** . Обозначается: $\text{card } M$.

$$\text{card } \emptyset = 0.$$

г) Задайте множества A и B перечислением их элементов:

$$A = \{ \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square \};$$

$$B = \{ \square, \square \}.$$

3.2. Действия над множествами

Исследуем и узнаем

• A – множество букв в слове „нос“; $A = \{н; о; с\}$

B – множество букв в слове „сон“. $B = \{с; о; н\}$

$$A = B$$

Возьмите на заметку

Множества A и B называются **равными множествами**, если они состоят из одних и тех же элементов.

• C – множество учеников 5 „Б“ класса лицея им. Михая Еминеску.

D – множество всех учеников лицея им. Михая Еминеску.

$$C \neq D$$

Множество C составляет часть от множества D . В математике выражение „часть множества“ заменяют словом „подмножество“:

$$C \subset D$$



Возьмите на заметку

Множество A называется **подмножеством** множества B , если любой элемент множества A является также элементом множества B .

Задание для понимания

• Пусть A – множество автомобилей муниципия Кишинев, а B – множество автомобилей марки BMW муниципия Кишинев.

Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

а) $A = B$;

б) $A \subset B$;

в) $B \subset A$.



Исследуем и узнаем

- Рассмотрите и заполните пробелы:



Интересы Стеллы:
 чтение
 компьютерные игры
 танцы
 музыка
 рисование



A – множество интересов Стеллы:

$$A = \{\text{чтение, } \square, \square, \square, \square\}.$$

Интересы Петра:
 футбол
 музыка
 компьютерные игры
 чтение
 плавание



B – множество интересов Петра:

$$B = \{\text{футбол, } \square, \square, \square, \square\}.$$



- а) C – множество интересов обоих детей:

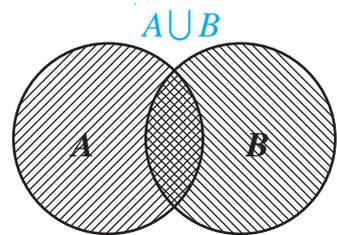
$$C = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square\}.$$

Множество C называется объединением множеств A и B .

Обозначают: $C = A \cup B$.

Возьмите на заметку

Объединением множеств A и B является новое множество $A \cup B$, которое содержит элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A или B .



- б) D – множество общих интересов детей:

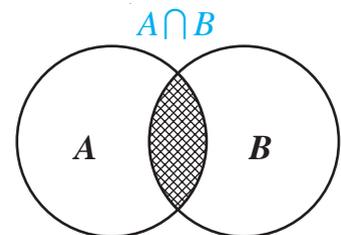
$$D = \{\text{чтение, } \square, \square\}.$$

Множество D называется пересечением A и B .

Обозначают: $D = A \cap B$.

Возьмите на заметку

Пересечением множеств A и B является новое множество $A \cap B$, которое содержит общие элементы множеств A и B .



- Пусть A – множество граждан Республики Молдова, B – множество космонавтов. Множества A и B не имеют общих элементов. Значит, $A \cap B = \emptyset$.

Надеемся, что в будущем это высказывание будет ложным, а вместо пропуска в выражении

$$A \cap B = \{\square\}$$

будет записано твое имя.

- Проанализируйте и заполните таблицу:

Множества			
A	B		
Множество книг домашней библиотеки	Множество учебников домашней библиотеки		$B \subset A$
Множество птиц			$A \cap B = \emptyset$
			$A \cup B =$ <input type="text"/> $A \cap B =$ <input type="text"/>

Исследуем и узнаем

$$A = \{s, a, l, u, t\}, B = \{s, a, c\}, C = \{l, u, t\}.$$

$$C \subset A, l \notin B, u \notin B, t \notin B.$$

C – множество элементов множества A , которые не принадлежат множеству B .

C – разность множеств A и B .

Решаем и поясняем

- Даны множества:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 5\}.$$

Найдите множество $A \setminus B$.

Решение:

Так как $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{3, 4\}$, то получим:

$$A \setminus B = \{0, 1, 2, \square, \square, \square\}.$$

- а) Задайте множества перечислением их элементов:

A – множество учебных предметов в вашем классе;

B – множество ваших любимых учебных предметов.

б) Найдите: $C = A \setminus B$.

Решение:

а) $A = \{ \text{_____} \};$

$B = \{ \text{_____} \}.$

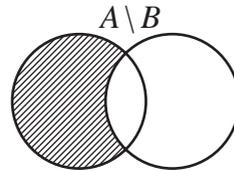
б) $C = \{ \text{_____} \}.$



Надеемся, что *математика* $\notin C$.

Возьмите на заметку

Разностью множеств A и B является новое множество $A \setminus B$, которое содержит элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B .



Упражнения и задачи



1. Назовите два элемента, которые принадлежат:
а) множеству зимних месяцев; б) множеству спортивных игр;
в) множеству деревьев; г) множеству предметов, имеющих форму шара.
2. а) Пусть A – множество трехзначных чисел, каждое из которых состоит из цифр 2, 5 и 7, без повторения цифр в записи числа. Перечислите элементы множества A .
б) Найдите $\text{card } A$.
3. а) Пусть B – множество дробей, числитель которых равен 1, а знаменатель – ненулевое однозначное натуральное число. Перечислите элементы множества B .
б) Найдите $\text{card } B$.
4. а) Задайте множество $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 15\}$ перечислением его элементов.
б) Найдите $\text{card } M$.
5. Дополните пропуски:
а) $A \cap \emptyset = \square$; б) $A \cup \emptyset = \square$; в) $A \cup A = \square$; г) $A \cap A = \square$.
6. Даны множества: $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{2, 4, 8\}$, $K = \{1, 3, 5, 7\}$.
Найдите:
а) $A \cup B$; б) $A \cup K$; в) $B \cup C$; г) $C \cup K$; д) $A \cap B$; е) $C \cap B$;
ж) $B \cap K$; з) $C \cap K$; и) $A \setminus K$; к) $C \setminus A$; л) $K \setminus B$; м) $K \setminus A$.



7. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 17\}$. Запишите подмножество множества A , состоящее из:
а) четных чисел; б) нечетных чисел;
в) чисел, являющихся точными квадратами натуральных чисел.
8. Дано множество $M = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3} \right\}$.
Найдите: а) $M \cap \mathbb{N}$; б) $M \cap \mathbb{N}^*$; в) $M \setminus \mathbb{N}$.
9. В саду растут 50 кустов роз. Раду полил половину кустов и Родика полила половину кустов. В результате оказалось, что три куста роз были политы дважды. Сколько кустов роз остались без полива?
10. Изобразите на прямой и найдите пересечение фигур:
а) $[AB] \cap [AB]$; б) $[AB \cap AB]$; в) $[AB] \cap AB$.
11. Пусть D_{12} – множество делителей числа 12, B – множество нечетных чисел меньше 12, а C – множество четных чисел меньше 12.
Найдите: а) $D_{12} \cup B$; б) $D_{12} \cap C$; в) $B \cap C$;
г) $D_{12} \setminus B$; д) $D_{12} \setminus C$; е) $C \setminus D_{12}$.

12. Каждый ученик лицея изучает или французский язык, или английский язык, или оба языка. Сколько учеников в лицее, если 320 из них изучают французский язык, 280 – английский язык, а 190 учеников изучают оба языка?



13. *Исследуем:*

Даны множества A , B и M и высказывания:

- ① Все элементы множества M принадлежат множеству A и множеству B .
 ② Все общие элементы множеств A и B принадлежат множеству M .

а) Запишите три множества A , B и M , для которых высказывания ① и ② являются истинными.

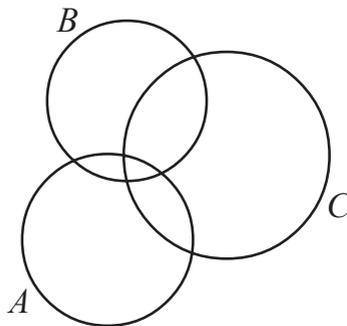
б) Запишите три множества A , B и M , для которых высказывание ① – истинно, а высказывание ② – ложно.

в) Известно, что высказывания ① и ② истинны. Определите истинно или ложно высказывание:

- 1) Если любой элемент x принадлежит множеству M , то $x \in A$.
- 2) Если любой элемент y принадлежит множеству M , то $y \in B$.
- 3) $M \subset A$.
- 4) $M = A \cap B$.
- 5) $A \subset M$.

14. Перечертите диаграмму в тетрадь и закрасьте участки:

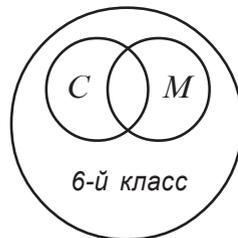
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| а) $A \cup B$; | б) $A \cap B$; |
| в) $C \cup B$; | г) $A \cap C$; |
| д) $C \cap (A \cap B)$; | е) $(A \cap B) \cup C$; |
| ж) $A \cap (B \cup C)$; | з) $A \cup (B \cup C)$. |



15. Элементы множества, за исключением одного, обладают одним и тем же характеристическим свойством. Определите это свойство и удалите „лишний“ элемент:

- а) {треугольник, окружность, квадрат, прямоугольник};
- б) {яблоки, груши, картофель, бананы, сливы};
- в) {4, 10, 46, 18, 21};
- г) {3, 6, 9, 15, 27}.

16. В классе учатся 30 учеников. Из них 12 посещают математический кружок, 16 – спортивную секцию, а 5 учащихся ничем не занимаются. Сколько шестиклассников посещают и математический кружок, и спортивную секцию? Решите задачу с помощью диаграммы.





Задания для осмысления

1. Что называется дробью? Какое число называется смешанным?
2. Какие виды дробей вы знаете? Какие дроби называются равными?
3. В чем заключается основное свойство дроби? Что значит сократить дробь?
4. Что надо сделать, чтобы выделить целую часть из дроби? Приведите примеры.
5. Как сложить дроби с одинаковыми знаменателями? А с разными знаменателями?
6. Как сложить смешанные числа?
7. Что общего у действия *вычитание дробей* и действия *сложение дробей*? Обоснуйте ответ.
8. Как выполнить умножение двух дробей? А двух смешанных чисел?
9. Есть ли у числа 0 число, ему обратное? Какое число обратно самому себе?
10. Как найти дробь от числа?
11. Как найти число по данному значению его дроби?
12. Из каких частей состоит десятичное число?
13. Как сравнивают два десятичных числа?
14. Как выполняется сложение десятичных чисел? А вычитание?
15. Как выполняется умножение десятичных чисел? Возведение в степень с натуральным показателем?
16. Приведите примеры применения десятичных чисел из разных областей: физики, биологии, географии, истории, экономики и т. д.
17. Какие свойства модуля рационального числа вы знаете?
18. Какие виды записей рациональных чисел вы знаете?
19. Как выполняется сложение рациональных чисел? Вычитание? А умножение? Деление? А возведение в степень с натуральным показателем?
20. Какие свойства действий рациональных чисел вы знаете?
21. Каков порядок выполнения действий и какова значимость скобок в вычислениях с рациональными числами?
22. Какие отношения между множествами вы знаете?
23. Какие действия над множествами вы знаете?
24. Объясните включение $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
25. Приведите примеры множеств из разных областей.

Упражнения и задачи на повторение



1. Вычислите:

а) $\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$;

б) $\frac{15}{16} - \frac{3}{4}$;

в) $-\frac{3}{14} + \frac{2}{21}$;

г) $1\frac{3}{7} - \frac{2}{3}$;

д) $4,32 - 2\frac{1}{2}$;

е) $1\frac{1}{8} + (-1,15)$;

ж) $\frac{9}{20} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)$.

2. Вычислите:

а) $1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$;

б) $2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{3}$;

в) $-5\frac{5}{11} \cdot 2\frac{1}{5}$;

г) $-\frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{26}{27}\right)$;

д) $\frac{8}{15} : 5\frac{1}{3}$;

е) $-5\frac{5}{6} : \left(-3\frac{8}{9}\right)$;

ж) $-4\frac{1}{8} : 2\frac{7}{16}$;

з) $\frac{7}{25} : 1,4$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\left|3\frac{1}{2}\right| - |-3,5| + \left|-2\frac{1}{3}\right| - \left|\frac{7}{3}\right|$;

б) $|-6,4| - \left|\frac{5}{8}\right| + |-0,625| - \left|\frac{32}{5}\right|$.

4. В парке посадили 70 кустов роз, $\frac{3}{14}$ из них были красного цвета. Сколько кустов роз красного цвета посадили в парке?

5. 12 учеников из 6 „А“ класса занимаются спортом. Сколько учеников учатся в этом классе, если те, кто занимается спортом, составляют $\frac{3}{8}$ от учеников всего класса?

6. Впишите пропущенные числа:

а) : 0,07 = 5;

б) · 0,8 = 5,6;

в) 0,2 : = 4;

г) -6,1 · = 1,83;

д) -4,06 : = -0,203;

е) · 5,3 = -6,413.

7. Расположив в порядке возрастания числа, вы узнаете фамилию автора следующих слов:

„Никто не научился думать, читая чужие мысли. Можно научиться думать, только думая самостоятельно“.

$1\frac{2}{9}$

$-\frac{101}{100}$

$\frac{5}{4}$

-1,06

$(1,1)^2$

$\frac{2}{3}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

К

М

У

Э

С

Е

Н

И

8. Начертите квадрат со стороной 4 см. Закрасьте $\frac{3}{4}$ квадрата.

9. Запишите дроби, равные $\frac{4}{5}$:
- $$\frac{4}{10}, \frac{8}{10}, \frac{20}{25}, \frac{7}{15}, \frac{24}{30}, \frac{16}{40}$$

10. Истинно или Ложно?

а) $\frac{5}{7} = \frac{35}{49}$; б) $\frac{14}{24} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{7}{9} = \frac{56}{72}$; г) $\frac{3}{4} = \frac{9}{6}$.



11. Сократите каждую дробь до несократимой:

а) $\frac{25}{75}$; б) $\frac{12}{15}$; в) $\frac{33}{44}$; г) $\frac{100}{250}$; д) $\frac{45}{60}$; е) $\frac{49}{63}$.

12. Выделите целую часть из дроби:

а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{28}{11}$; в) $\frac{49}{3}$; г) $\frac{25}{7}$; д) $\frac{44}{19}$; е) $\frac{131}{42}$.

13. Запишите в виде неправильной дроби смешанное число:

а) $3\frac{2}{5}$; б) $4\frac{3}{7}$; в) $7\frac{3}{4}$; г) $2\frac{5}{9}$; д) $10\frac{3}{8}$.

14. Запишите в виде дроби десятичное число:

а) 0,5; б) 0,3; в) 1,52; г) 1,03; д) 2,15; е) 7,125.

15. Запишите дробь со знаменателем 24, равную данной дроби:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{3}{8}$; г) $\frac{7}{12}$; д) $\frac{10}{48}$.

16. Вычислите и упростите полученный результат:

а) $\frac{3}{14} + \frac{5}{14}$; б) $\frac{7}{15} + \frac{2}{15}$; в) $\frac{5}{18} + \frac{4}{18}$; г) $\frac{13}{54} + \frac{5}{54}$.

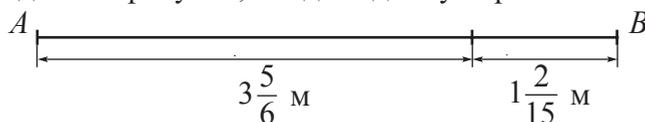
17. Вычислите:

а) $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{12} + \frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{6} + \frac{1}{24}$; г) $\frac{5}{9} + \frac{2}{3}$;
 д) $\frac{4}{5} + \frac{8}{15}$; е) $\frac{1}{4} + \frac{5}{7}$; ж) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; з) $\frac{2}{7} + \frac{3}{8}$;
 и) $\frac{7}{25} + \frac{4}{10}$; к) $\frac{13}{18} + \frac{5}{12}$; л) $\frac{7}{18} + \frac{2}{15}$; м) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$.

18. Выполните сложение:

а) $9\frac{3}{4} + 3\frac{1}{6}$; б) $7\frac{8}{15} + 8\frac{17}{20}$; в) $11\frac{7}{12} + 6\frac{11}{18}$; г) $7\frac{3}{8} + 11\frac{7}{12}$;
 д) $3\frac{5}{9} + 1\frac{7}{12}$; е) $3\frac{1}{7} + \frac{4}{5}$; ж) $3\frac{1}{14} + 2\frac{4}{21}$.

19. Используя данные рисунка, найдите длину отрезка AB .

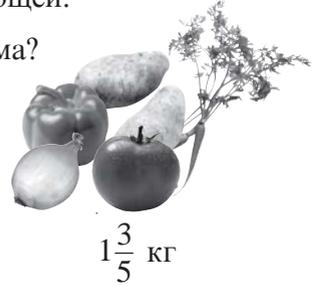
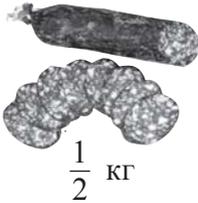


20. Скорость яхты $23\frac{3}{8}$ км/ч, а скорость течения реки $2\frac{1}{2}$ км/ч. С какой скоростью движется яхта по течению?



21. После того как из ведра взяли $2\frac{3}{4}$ литра воды, в нем осталось $3\frac{2}{5}$ литра. Сколько литров воды было в ведре первоначально?

22. Дима купил $\frac{1}{2}$ кг колбасы, $\frac{1}{4}$ кг сыра и $1\frac{3}{5}$ кг овощей. Сколько всего килограммов продуктов купил Дима?



23. Вычислите и упростите полученный результат:

а) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$; б) $\frac{9}{16} - \frac{1}{16}$; в) $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$; г)

24. Вычислите:

а) $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$; б) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$; в) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$; г) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; д) $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$;
 е) $\frac{3}{5} - \frac{3}{7}$; ж) $\frac{2}{9} - \frac{1}{6}$; з) $\frac{5}{12} - \frac{2}{9}$; и) $\frac{7}{20} - \frac{2}{15}$; к) $\frac{5}{6} - \frac{1}{8}$.

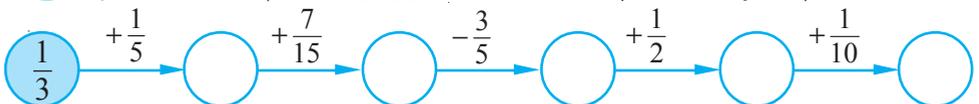
25. Выполните вычитание:

а) $8\frac{3}{7} - 2\frac{2}{5}$; б) $3\frac{11}{15} - 1\frac{7}{10}$; в) $1 - \frac{5}{12}$; г) $8 - \frac{6}{11}$;
 д) $6 - 1\frac{2}{9}$; е) $2\frac{1}{18} - \frac{1}{9}$; ж) $6\frac{3}{8} - 2\frac{3}{4}$; з) $4\frac{2}{15} - 3\frac{5}{12}$.

26. Масса кирпича до обжига составляет $4\frac{1}{2}$ кг. После обжига в печи его масса уменьшилась на $1\frac{5}{6}$ кг. Какова масса кирпича после обжига?

27. Сережа, Даша и Никита собрали $32\frac{5}{18}$ кг винограда. Сережа и Никита вместе собрали $24\frac{5}{6}$ кг. Сколько килограммов винограда собрала Даша?

28. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Восстановите цепочку вычислений:



29. Миша прочитал книгу за три дня. В первый день он прочитал $\frac{2}{7}$ книги, во второй день $-\frac{1}{3}$ книги, а в третий день – оставшуюся часть. Какую часть книги Миша прочитал в третий день?

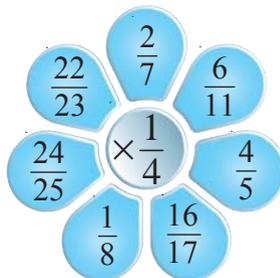
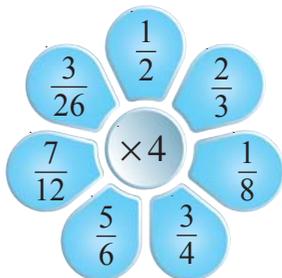
30. Вычислите:

а) $\frac{5}{21} - \frac{3}{14} + \frac{2}{7}$; б) $\frac{9}{20} + \frac{7}{10} - \frac{2}{15}$; в) $\frac{11}{20} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$.

31. Выполните умножение:

а) $\frac{3}{5} \cdot 7$; б) $\frac{2}{7} \cdot 6$; в) $9 \cdot \frac{2}{15}$; г) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}$; д) $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10}$;
 е) $\frac{7}{11} \cdot \frac{3}{4}$; ж) $\frac{5}{18} \cdot \frac{7}{10}$; з) $\frac{3}{20} \cdot \frac{5}{6}$; и) $\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{8}$; к) $\frac{16}{25} \cdot \frac{35}{48}$.

32. Вычислите:



33. Скорость звука $-\frac{1}{3}$ км/с. На каком расстоянии от грозы находился Миша, если он услышал раскаты грома через 18 секунд после вспышки молнии?



34. Выполните умножение:

а) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}$; б) $1\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8}$; г) $4\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{3}$.

35. Найдите значение выражения:

а) $2\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}$; б) $3\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{7}$.



36. Ракета, скорость которой 8 км/с, становится искусственным спутником Земли. Если скорость ракеты увеличить в $2\frac{7}{8}$ раза, то она навсегда покинет Солнечную систему. Найдите эту скорость.

37. Длина прямоугольника равна $3\frac{1}{5}$ м, а ширина в $1\frac{1}{4}$ раза больше длины. Чему равна площадь прямоугольника?

38. Перечертите и заполните таблицу:

m	2	$1\frac{1}{5}$	$\frac{5}{8}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{9}$
n	$\frac{3}{4}$	10	$\frac{16}{35}$	0,3	$1\frac{4}{5}$
$m \cdot n$					



39. Проверьте, являются ли числа взаимно обратными:

- а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$; б) $\frac{25}{9}$ и $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{21}$ и 7; г) $1\frac{2}{3}$ и 0,6.

40. Запишите число, обратное числу:

- а) $\frac{3}{5}$; б) 11; в) $7\frac{2}{3}$; г) 0,12; д) $3\frac{3}{5}$; е) 3,6.

41. Выполните деление:

- а) $\frac{6}{11} : \frac{9}{22}$; б) $\frac{12}{13} : \frac{4}{39}$; в) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$; г) $\frac{3}{4} : \frac{21}{40}$; д) $56 : \frac{8}{11}$;
 е) $1\frac{5}{13} : 6$; ж) $\frac{7}{9} : 2\frac{1}{3}$; з) $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$; и) $9\frac{4}{5} : 4\frac{2}{3}$; к) $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9}$.

42. Периметр квадрата равен $\frac{10}{13}$ м. Чему равна сторона квадрата?

43. Найдите скорость поезда, если $50\frac{2}{5}$ км он прошел за $\frac{8}{15}$ часа.

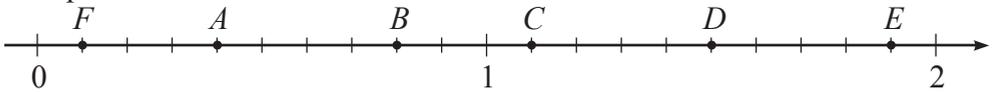
44. Том весит $7\frac{1}{5}$ кг, а Джери – в 12 раз легче.

Сколько они весят вместе?



45. Определите координаты точек A, B, C, D, E, F ,

изображенных на числовой оси:



46. Отметьте точки $A(0,2), B(0,7), C(1,3)$ и $D(1,6)$ на числовой оси, взяв за единицу длины отрезка длину 10-ти клеток.

47. Запишите названия океанов в порядке убывания их максимальных глубин.

Океан	Максимальная глубина (км)
Атлантический	3,597
Индийский	3,711
Арктический	1,225
Тихий	3,976



48. Расположите в порядке возрастания числа: 3,6; 3,59; 3,545; 3,67; 3,06; 3,059.
49. Между какими двумя последовательными натуральными числами на числовой оси расположено число:
а) 3,27; б) 7,98; в) 25,01; г) 0,03?

50. Сравните числа:

- а) 7,45 ● 7,43; б) 2,08 ● 2,8; в) 31,12 ● 31,120.



51. Выполните сложение:

- а) $4,52 + 11,6$; б) $3,008 + 12,25$;
в) $18,354 + 12,29$; г) $8,97 + 7,062$.

52. Скорость лодки 24,8 км/ч, а скорость течения реки 1,3 км/ч. Найдите скорость лодки, движущейся по течению реки.

53. Кот Матроскин на завтрак съел 0,15 кг сметаны, а на обед – на 0,1 кг больше. Сколько всего сметаны съел кот Матроскин?



54. Выполните сложение:

- а) $4,57 + 15,72 + 3,1$; б) $3,008 + 7,015 + 2,4$;
в) $3,07 + 12,803 + 0,026$; г) $21,3 + 2,13 + 0,213$.

55. Выполните вычитание:

- а) $52,307 - 15,02$; б) $12,93 - 6,27$;
в) $112,79 - 20,9$; г) $8,21 - 7,396$.

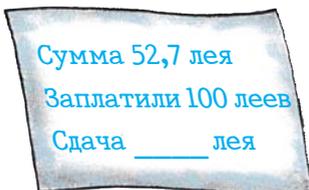
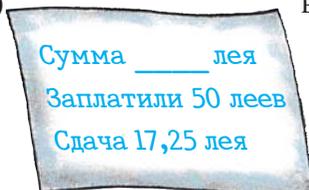
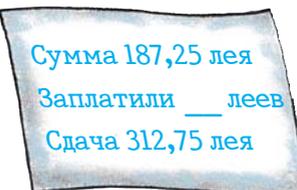
56. Запишите каждое из чисел 2,7; 0,12; 23,176 в виде:

- а) суммы двух десятичных чисел;
б) разности двух десятичных чисел.

57. Вычислите и проверьте результат, применив сложение.

- а) $4,97 - 2,08$; б) $16,01 - 15,98$;
в) $2,001 - 1,9$; г) $0,2 - 0,107$.

58. Заполните платежный чек:

- а)  б)  в) 

59. Масса бочки с маслом 250,1 кг. Найдите массу пустой бочки, если масло весит 202,4 кг.

60. Найдите значение выражения:

- а) $0,07 + 12,56 - 9,002$; б) $4,15 - 2,7 + 0,028$;
 в) $18,86 - 4,09 + 7,003$; г) $2,19 - 0,219 + 0,339$.

61. Поставьте запятую, пропущенную в произведении:

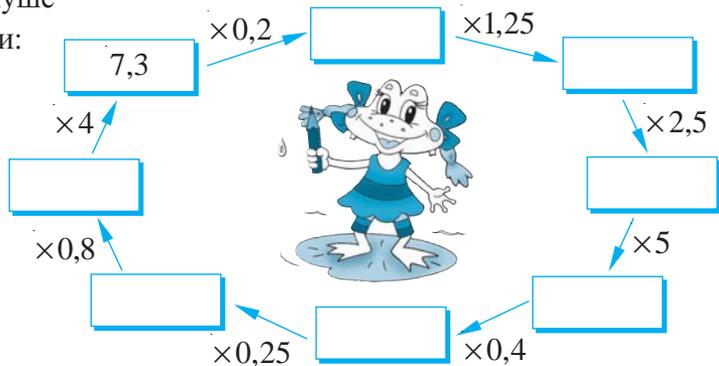
- а) $37,2 \cdot 168 = 62496$; б) $37,2 \cdot 16,8 = 62496$;
 в) $37,2 \cdot 0,168 = 62496$; г) $37,2 \cdot 1,68 = 62496$;
 д) $0,372 \cdot 16,8 = 62496$; е) $3,72 \cdot 1,68 = 62496$.

62. Выполните умножение:

- а) $0,32 \cdot 1,9$; б) $1,26 \cdot 0,29$; в) $7,4 \cdot 0,065$;
 г) $2,02 \cdot 0,23$; д) $0,016 \cdot 1,5$; е) $6,132 \cdot 3,2$.

63. РАБОТАЕМ В ПАРАХ! 

Помогите Квакуше
заполнить рамки:



64. Вычислите устно. Длина человеческого волоса увеличивается на 0,44 мм в день. Насколько длиннее будут волосы через 30 дней?

65. Найдите сумму, разность и произведение чисел 14,25 и 7,8.

66. Стороны прямоугольного участка равны 3,8 м и 6,7 м соответственно. Найдите периметр и площадь участка.

67. Выполните деление:

- а) $13,8 : 4$; б) $8,68 : 7$; в) $169,2 : 8$; г) $78,2 : 4$;
 д) $11,34 : 42$; е) $14 : 112$; ж) $9,044 : 38$; з) $53,4 : 15$.

68. За 5 кг конфет заплатили 281 лей. Сколько стоят 3 кг таких конфет?

69. За 3 часа автотурист проехал 211,5 км. Какое расстояние он преодолеет за 5 часов, если будет двигаться с той же скоростью?

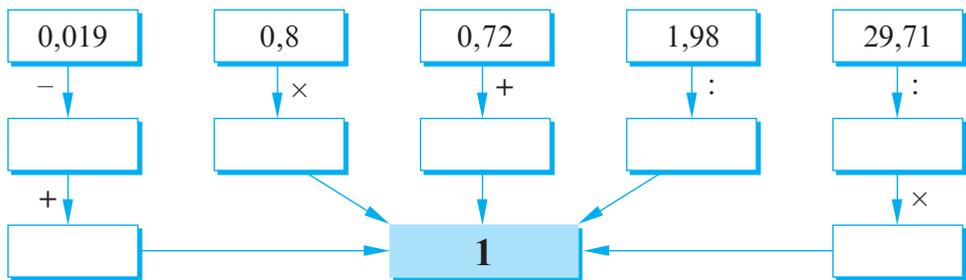
70. Выполните действие:

- а) $9,6 : 1,2$; б) $8,4 : 0,12$; в) $0,52 : 1,3$; г) $2,002 : 0,91$;
 д) $5,84 : 0,8$; е) $0,648 : 0,036$; ж) $0,696 : 0,33$; з) $48 : 0,016$.

71. В первый день яхта прошла 333,9 км за 12,6 ч. Во второй день – 298,2 км за 10,5 ч. В какой из этих дней яхта двигалась с большей скоростью?



72. Впишите соответствующие числа, чтобы в результате получить 1:



73. Вычислите рациональным способом:

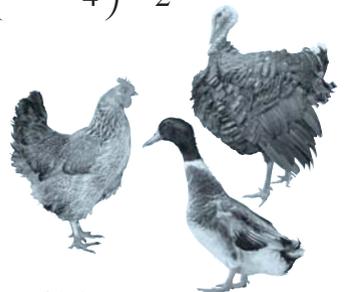
а) $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{5} + 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} - 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{5}$;

б) $4\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{8} + 3\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{8} + 1\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}$.

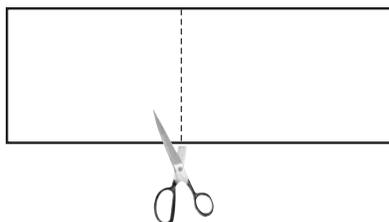
74. Найдите значение выражения: а) $\left(16,5 - 13\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{6}{11} + 2,2 \left(\frac{8}{33} - \frac{1}{11}\right) + 3\frac{2}{11}$;

б) $\left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147} - \left(0,6 : 3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2}$.

75. На птицефабрике выращивают кур, уток и индюков. Количество уток составляет 0,42 количества всех птиц, а количество индюков – $\frac{9}{28}$ количества всех уток. Сколько всего птиц на этой птицефабрике, если индюков 54?



76. Лист картона прямоугольной формы, длина которого 41,3 см, надо разрезать на два прямоугольника равной ширины так, чтобы длина одного из прямоугольников была на 3,7 см больше длины другого. Какой будет длина каждого прямоугольника?



77. Впишите соответствующие числа:

а) $\frac{\square}{\square}^{(4)} + \frac{\square}{\square}^{(3)} = \frac{4+9}{24} = \frac{13}{24}$;

б) $\frac{\square}{\square}^{(3)} + \frac{\square}{\square}^{(2)} = \frac{15+14}{36} = \frac{29}{36}$;

в) $\frac{\square}{\square}^{(10)} - \frac{\square}{\square}^{(6)} = \frac{10-6}{30} = \frac{2}{15}$;

г) $\frac{\square}{\square}^{(3)} - \frac{\square}{\square}^{(2)} = \frac{15-14}{18} = \frac{1}{18}$.

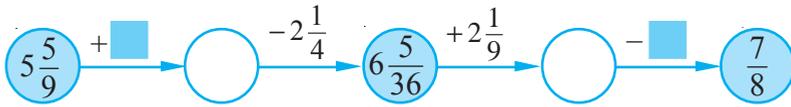
78. Вычислите: а) $\frac{9}{50} + \frac{2}{75} - \frac{3}{100}$;

б) $\frac{8}{21} + \frac{11}{24} - \frac{5}{27}$;

в) $2\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - 1\frac{13}{15}$;

г) $5\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3}$.

79. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Восстановите цепочку вычислений:



80. Вычислите:

а) $\frac{7}{10} + \frac{7}{9} \cdot \frac{27}{35}$;

б) $\frac{5}{14} + \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{21}$;

в) $\frac{3}{16} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{35}$;

г) $1 + \frac{3}{5} \cdot 1\frac{5}{6}$;

д) $\frac{5}{12} - \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{16}$;

е) $2 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7}$.

81. Найдите значение выражения:

а) $1\frac{3}{25} \cdot 2\frac{1}{7} - 2\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{95}$;

б) $4\frac{7}{12} \cdot 1\frac{3}{11} + 1\frac{1}{15} \cdot 1\frac{11}{64}$.

82. Папа купил $4\frac{3}{5}$ кг апельсинов по цене $20\frac{1}{2}$ лея/кг и $8\frac{1}{4}$ кг яблок по цене $12\frac{1}{3}$ лея/кг. За какие фрукты папа заплатил больше и на сколько?

83. Запишите число, обратное числу, равному:

а) сумме чисел $\frac{3}{18}$ и $\frac{7}{12}$;

б) частному чисел $\frac{7}{20}$ и $\frac{13}{50}$;

в) разности чисел $8\frac{3}{4}$ и $7\frac{5}{6}$;

г) произведению чисел $1\frac{1}{15}$ и $4\frac{5}{16}$.

84. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Перечертите и заполните таблицу:

Скорость		$11\frac{1}{2}$ км/ч	$15\frac{2}{3}$ км/ч
Время	$\frac{3}{4}$ ч	$2\frac{2}{3}$ ч	
Расстояние	$2\frac{2}{5}$ км		4,7 км



85. Впишите один из знаков действий:

а) $\frac{6}{7} \bigcirc 1\frac{1}{6} = 1;$

в) $\frac{2}{9} \bigcirc \frac{5}{9} = \frac{2}{5};$



б) $3 \bigcirc 2\frac{2}{11} = \frac{9}{11};$

г) $1,2 \bigcirc \frac{5}{6} = 1.$

86. В первом ящике $18\frac{2}{3}$ кг яблок, что на $3\frac{5}{6}$ кг больше, чем во втором ящике. Сколько килограммов яблок в третьем ящике, если всего в трех ящиках $50\frac{1}{9}$ кг яблок?

87. Вычислите: а) $\left(2\frac{3}{8} + 3\frac{7}{24}\right) : \left(4\frac{2}{3} - 1\frac{1}{8}\right);$ б) $\left(5\frac{3}{5} - 1\frac{1}{3}\right) : \left(7\frac{7}{12} - 2\frac{1}{4}\right).$

88. Длина маршрута автобуса равна $20\frac{1}{4}$ км. Рейс длится $\frac{7}{10}$ часа. Автобус движется со скоростью 45 км/ч и делает 10 остановок. Сколько времени в среднем затрачивается на одну остановку?

89. Запишите все натуральные числа, расположенные на числовой оси, между числами: а) 1,003 и 6,96; б) 0,02 и 5,001.

90. Впишите подходящую цифру:

а) $2, \blacksquare 1 < 2,02;$

б) $6,215 > 6,2 \blacksquare 8;$

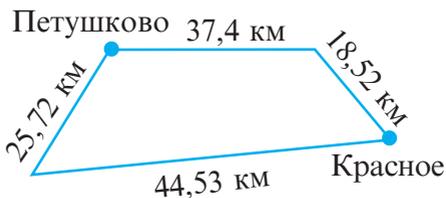
в) $5,4 \blacksquare 8 > 5,49;$

г) $3,7 \blacksquare > 3,78;$

д) $1,1 \blacksquare 8 > 1,192;$

е) $1,895 < 1, \blacksquare 957.$

91. Из села Петушково до села Красное можно проехать по разным дорогам. Какой путь самый короткий?



92. Впишите такие числа, чтобы сумма чисел по горизонтали, по вертикали и по диагонали была равна 3:

		1,2
	1,4	0,7

93. Впишите соответствующие цифры:

а)
$$\begin{array}{r} 17, \blacksquare 4 \\ + \blacksquare \blacksquare, 5 \blacksquare \\ \hline 105,23 \end{array}$$

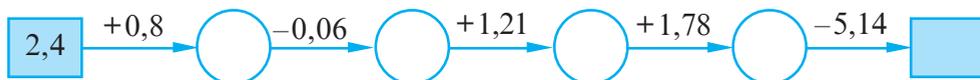
б)
$$\begin{array}{r} \blacksquare, 53 \blacksquare \\ + 6,9 \blacksquare 8 \\ \hline 20, \blacksquare 27 \\ \hline \blacksquare 0,041 \end{array}$$

94. Впишите соответствующие цифры:

а)
$$\begin{array}{r} 72, \blacksquare \blacksquare \\ - 3 \blacksquare, 59 \\ \hline \blacksquare 2,69 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} 9 \blacksquare, 7 \blacksquare 5 \\ - \blacksquare 4, \blacksquare 6 \blacksquare \\ \hline 34,841 \end{array}$$

95. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Восстановите цепочку вычислений:



96. Впишите соответствующий знак сравнения:

а) $49,41 + 0,0009$ $49,42 - 0,001$;

б) $0,7001 + 0,0039$ $0,7431 - 0,039$;

в) $67,002 - 56,003$ $10,0999 + 0,8991$.



97.  *Матрива чисел* 

Числа 2,75 и 8 обладают следующим свойством: их произведение равно сумме их цифр.

$$2,75 \cdot 8 = 2 + 7 + 5 + 8 = 22.$$

Найдите хотя бы еще одну пару чисел, обладающих таким же свойством.

98. Вычислите:

а) $5,6 \cdot 0,08 + 2,23 \cdot 2,4$;

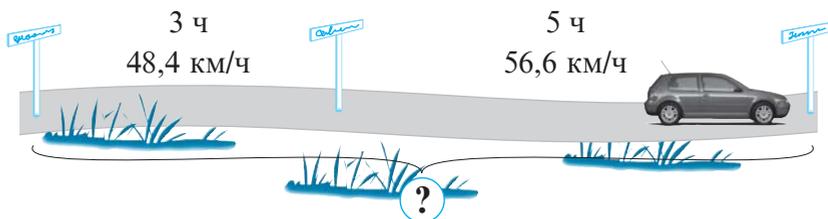
б) $(46 - 34,17) \cdot 0,09$;

в) $(3,126 - 1,7) \cdot (0,15 + 7,4)$;

г) $(9,38 + 5,12) \cdot (8,4 - 3,24)$.

99. Хозяйка продала 15,8 кг вишни по цене 8,5 лея/кг и 20,6 кг слив по цене 7,5 лея/кг. За какие фрукты хозяйка выручила больше денег и на сколько?

100. Составьте и решите задачу, используя данные рисунка.



101. В таблице приведены суточные нормы белков, жиров и углеводов на 1 килограмм веса ребенка в возрасте 11–15 лет.

Белки	Жиры	Углеводы
2,6 г	2,3 г	10,4 г



Вычислите, сколько белков, жиров и углеводов:

а) необходимо в день ребенку, вес которого 36,9 кг;

б) необходимо в день вам.

102. Впишите знаки арифметических действий:

а) $1,8 \bigcirc 0,5 \bigcirc 0,2 = 2,5$;

б) $1,8 \bigcirc 0,5 \bigcirc 0,2 = 1,5$;

в) $1,8 \bigcirc 0,5 \bigcirc 0,2 = 0,26$;

г) $1,8 \bigcirc 0,5 \bigcirc 0,2 = 0,46$;

д) $1,8 \bigcirc 0,5 \bigcirc 0,2 = 1,9$.



103. Найдите значение выражения:

а) $40 - (2,0592 : 0,072 - 19,63)$;

б) $50 - (2,3256 : 0,068 - 9,38)$;

в) $7,67 : 0,65 - (0,394 + 0,7688) : 0,57$;

г) $6,63 : 0,85 - (34 - 30,9248) : 0,62$.

104. Восстановите цепочку вычислений:

а) $9,88 \xrightarrow{:\square} 3,8 \xrightarrow{-\square} 1,74 \xrightarrow{\cdot\square} 6,09$;

б) $6,2 \xrightarrow{\cdot\square} 17,36 \xrightarrow{+\square} 20,1 \xrightarrow{:\square} 1,5$;

в) $\square \xrightarrow{\cdot 0,75} 15 \xrightarrow{-\square} 2,56 \xrightarrow{:\square} 3,2$.

105. Из отрезка проволоки сделали треугольник со сторонами 7,5 см, 8,3 см и 9,4 см. Если из того же отрезка проволоки сделать квадрат, какой длины будет его сторона?

106. Основанием пирамиды Хеопса является квадрат со стороной 230 м. Восхищенные туристы двигаются со скоростью 0,32 м/с. Успеют ли они обойти всю пирамиду за один час?

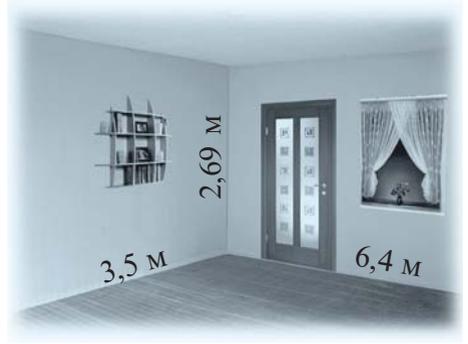


107. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Какая из кошечек, белая или черная, раньше разбудит собаку? На сколько минут раньше?



108. На рисунке указаны измерения комнаты Даши. Учитывая, что пол комнаты прямоугольный, и используя данные рисунка, определите:

- сколько квадратных метров ковролина необходимо, чтобы покрыть весь пол;
- сколько рулонов обоев понадобится, чтобы оклеить три стены комнаты (без стены с окном и дверью), если длина одного рулона обоев 10 м, а ширина 0,55 м.



109. Антон поймал 1,5 кг рыбы, а Дима – в 2,4 раза больше. Узнайте, сколько килограммов рыбы поймали оба рыбака вместе.

110. **РАБОТАЕМ В ГРУППАХ!**  Проект *Десятичные числа вокруг нас*. Класс делится на группы. Каждая группа представляет плакат, содержащий по 5 примеров приложения десятичных чисел: 1) в жизни семьи; 2) в магазине или на рынке; 3) в производственной деятельности родителей; 4) в других областях.

111. Для оформления клумбы, имеющей форму государственного флага Республики Молдова, было посажено 75 красных, желтых и синих тюльпанов. Треть из них были красными.

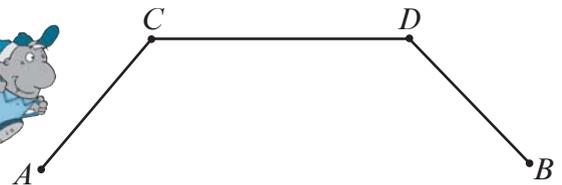
- Сколько красных тюльпанов было посажено?
- А синих?
- А желтых?



ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

112. Турист проходит расстояние от пункта A до пункта B и обратно за 3 ч 41 мин.

Дорога (см. рисунок) от пункта A до пункта B



состоит из трех частей: подъем, равнинный участок и спуск. Скорость туриста на подъеме – 4 км/ч, на равнине – 5 км/ч, а на спуске – 6 км/ч. Расстояние между пунктами A и B составляет 9 км. Найдите расстояние между пунктами C и D .

113. Запишите дробь в виде разности двух дробей, числитель которых равен 1:

- $\frac{1}{12}$;
- $\frac{2}{63}$;
- $\frac{1}{4}$;
- $\frac{3}{28}$.

114. Выполните действия:

а) $\left(12\frac{5}{12} + 1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4}\right) : \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{7}{9}\right)$;

б) $2\frac{2}{5} : 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{7} - 1\frac{39}{73} \left(5\frac{5}{7} - 5\frac{1}{16}\right)$.

115. Впишите в таблицу такие числа, чтобы произведения чисел по горизонтали, по вертикали и по диагонали были равны между собой:

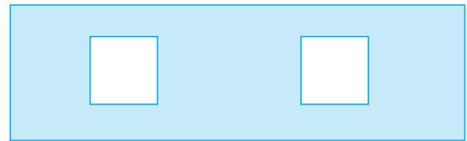
а)

$\frac{1}{32}$		
	$\frac{1}{16}$	
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$

б)

$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$
	1	

116. В прямоугольном листе картона, длина которого $2\frac{1}{4}$ дм и ширина $\frac{2}{3}$ дм, вырезали два одинаковых квадрата со стороной $\frac{1}{3}$ дм. Чему равна площадь оставшейся части?



117. Стену с измерениями $3\frac{1}{2}$ м и $2\frac{4}{5}$ м необходимо оклеить обоями. Сколько рулонов обоев длиной 13 м и шириной 50 см для этого необходимо?

118. Составьте задание, подобное заданию 117, используя умножение десятичных чисел.

119. а) Ювелир поделит золотую проволоку на две части одинаковой массы. Из одной части он изготовил цепочку из 80 одинаковых звеньев, а из другой – цепочку из 100 одинаковых звеньев. Масса одного звена первой цепочки 0,12 г. Какова масса одного звена второй цепочки?

б) Составьте и решите задачу, подобную задаче пункта а), в которой надо найти число звеньев первой цепочки.

120. Из одного улья одновременно вылетели в противоположных направлениях две пчелы. Через 0,15 часа расстояние между ними составило 6,3 км. Скорость одной из пчел 21,6 км/ч. Найдите скорость второй пчелы.





Итоговый тест

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. Даны числа:

$$2,3; \frac{2}{5}; -1,25; 1\frac{1}{4}; 2,5; 2, (3); -\frac{4}{5}.$$

а) Выпишите противоположные числа. **3**

б) Выпишите взаимно обратные числа и обоснуйте ответ. **2**

в) Сравните: **2**

$$2,3 \bigcirc 2\frac{1}{3}.$$

г) Найдите сумму: **3**

$$\frac{2}{5}; -1,25; 2,5.$$

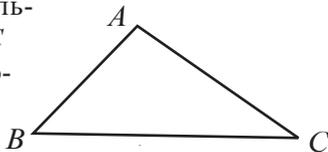
2. Выполните действия:

а) $6\frac{5}{8} + 1\frac{7}{12}$; б) $-\frac{11}{12} + \frac{7}{8}$;

в) $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \frac{8}{25}$; г) $\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}$. **3**

3. В треугольнике ABC

длина стороны AB равна



$72,6$ м и составляет $\frac{3}{4}$ длины стороны AC .

а) Найдите длину стороны AC . **3**

б) Зная, что периметр треугольника ABC равен 300 м, найдите длину стороны BC . **4**

в) Три новых дома расположены в вершинах треугольника ABC . К дому в вершине C проведен интернет. Требуется проложить кабель от дома в вершине C к домам в вершинах A и B . Существует два проекта: 1) по отрезкам CB и CA ; 2) по отрезкам CA и AB . Какой проект более выгодный? Сколько метров кабеля можно сэкономить? **4**

II вариант

1. Даны числа:

$$3,6; \frac{5}{8}; 2,75; -2\frac{3}{4}; 1,6; 3, (6); 1,3.$$

а) Выпишите противоположные числа.

б) Выпишите взаимно обратные числа и обоснуйте ответ.

в) Сравните:

$$3,6 \bigcirc 3\frac{2}{3}.$$

г) Найдите сумму:

$$-2\frac{3}{4}; 1,6; 1,3.$$

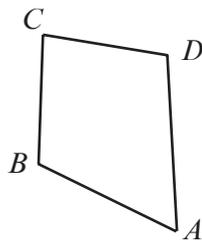
2. Выполните действия:

а) $1\frac{8}{9} + 3\frac{4}{15}$; б) $-\frac{7}{16} + \frac{5}{24}$;

в) $\frac{12}{35} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$; г) $\frac{11}{12} : 1\frac{7}{15}$.

3. В четырехугольнике $ABCD$

длина стороны AB равна $2,1$ км и составляет $\frac{7}{8}$ длины стороны AD .



а) Найдите длину стороны AD .

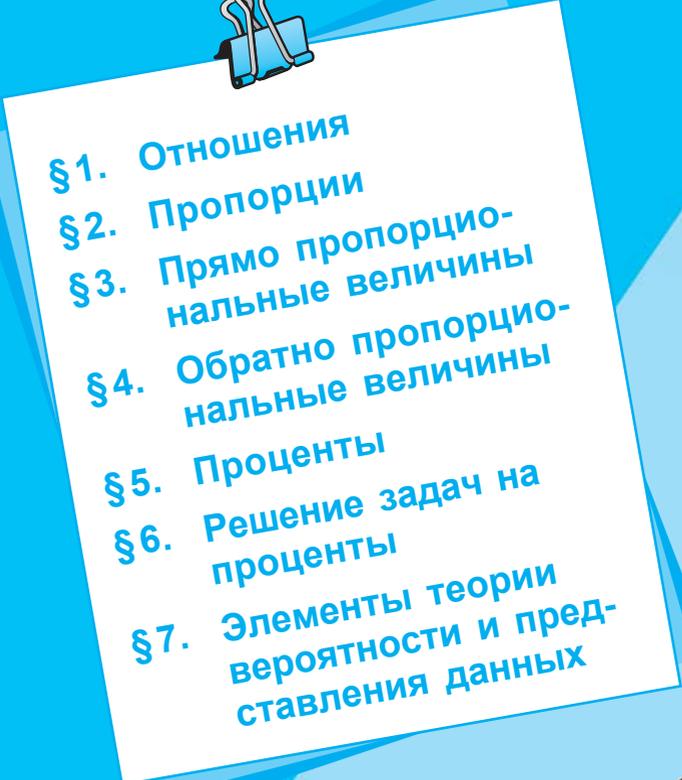
б) Зная, что $BC = 1,8$ км, а периметр четырехугольника равен $7,55$ км, найдите длину стороны CD .

в) Дом Ани находится в вершине A четырехугольника $ABCD$, а школа – в вершине C . От дома Ани до школы можно доехать двумя троллейбусными маршрутами: 1) от остановки в пункте A до B и от B до C ; 2) от A до остановки в пункте D и от D до C . Какой маршрут короче и на сколько километров?

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	33–32	31–29	28–26	25–20	19–15	14–11	10–8	7–5	4–3	2–0

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

- 
- §1. Отношения
 - §2. Пропорции
 - §3. Прямо пропорциональные величины
 - §4. Обратно пропорциональные величины
 - §5. Проценты
 - §6. Решение задач на проценты
 - §7. Элементы теории вероятности и представления данных

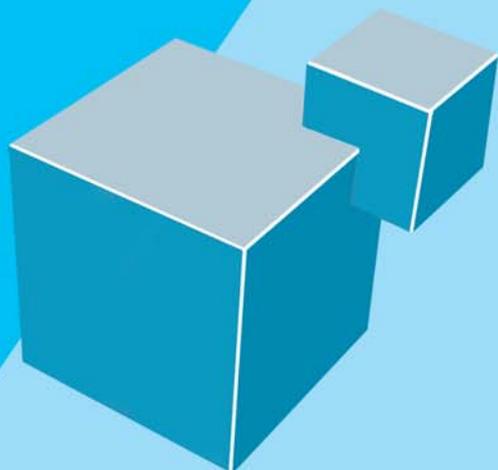
1

2

3

4

5



1.1. Отношение двух одноименных величин

Исследуем и узнаем

1 Весной Миша и Петя засеяли два участка земли одинаковой площади семенами дыни. Летом Миша собрал на 30 дынь больше, чем Петя.

Можем ли мы утверждать, что Миша собрал дынь намного больше, чем Петя?

Объясняем

Чтобы с точностью ответить на этот вопрос, нам не хватает данных.

Рассмотрим два случая:



I случай

Миша	—	45 дынь	→	$\frac{45}{15} = 3$
Петя	—	15 дынь		

Миша собрал в три раза больше дынь, чем Петя. Значит, Миша собрал дынь намного больше Пети.

II случай

Миша	—	130 дынь	→	$\frac{130}{100} = 1,3$
Петя	—	100 дынь		

Миша собрал в 1,3 раза больше дынь, чем Петя. Значит, Миша собрал дынь ненамного больше Пети.

Часто, чтобы определить, во сколько раз одна величина больше другой, используют деление.

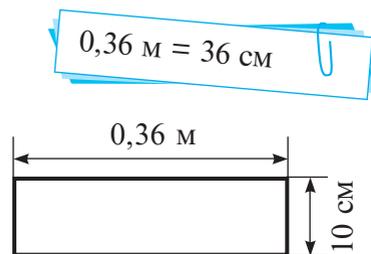
2 Во сколько раз длина прямоугольника, изображенного на рисунке, больше его ширины?

Решение:

Вычисляем и записываем:

$$36 \text{ см} : 10 \text{ см} = 3,6, \text{ или } \frac{36 \text{ см}}{10 \text{ см}} = 3,6.$$

Ответ: в 3,6 раза.



Возьмите на заметку

Запись $\frac{a}{b}$, где a и b – любые числа, $b \neq 0$, называется **отношением**.

Эта запись означает деление числа a на число b .

Числитель отношения $\rightarrow a$
Знаменатель отношения $\rightarrow b$ $\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\}$ члены отношения

Значение отношения $\frac{a}{b}$ равно частному от деления числа a на число b .

Два **отношения равны**, если их значения равны.

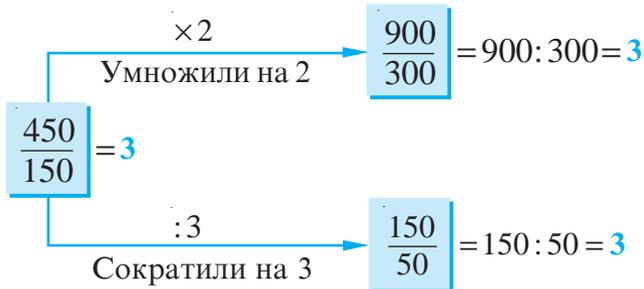
Отношение $\frac{a}{b}$ еще обозначают как $a : b$.

Следовательно, $\frac{45}{15}$, $\frac{110}{100}$, $\frac{36}{24}$, $\frac{1,5}{10}$, $\frac{6,3}{2,5}$ – это отношения. Дроби также являются отношениями.

3 Как изменится значение отношения $\frac{450}{150}$, если и числитель, и знаменатель отношения:

- умножить на 2;
- разделить на 3?

Решение:



Возьмите на заметку

Числитель и знаменатель отношения можно **умножить на одно и то же ненулевое число**.

$$\frac{2,3}{1,4} \xrightarrow[\text{на } 5]{\text{умножили}} \frac{5 \cdot 2,3}{5 \cdot 1,4} = \frac{11,5}{7}$$

Сократить отношение – значит, числитель и знаменатель отношения разделить на одно и то же ненулевое число.

$$\frac{0,3}{31} \xrightarrow[\text{на } 10]{\text{сократили}} \frac{0,3 : 10}{31 : 10} = \frac{0,03}{3,1}$$

При применении основного свойства отношения или сокращении отношения его значение не меняется.

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения значения их отношения надо предварительно перейти к одной единице измерения.

1.2. Отношение двух разноименных величин

Исследуем и узнаём

1 3 кг меда стоят 135 леев.
Сколько стоят 5 кг меда?

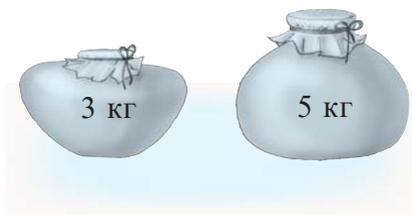
Решение:

Найдем цену меда:

$$\begin{array}{l} \text{Стоимость} \rightarrow \frac{135 \text{ леев}}{3 \text{ кг}} = \frac{45 \text{ леев}}{1 \text{ кг}} = 45 \text{ леев/кг} \leftarrow \text{Цена} \\ \text{Масса} \rightarrow \end{array}$$

Стоимость 5 кг меда составляет: $45 \cdot 5 = 225$ (леев).

Ответ: 225 леев.



Обозначение 45 леев/кг читают как „45 леев за килограмм“.

Возьмите на заметку

Отношение двух разноименных величин образует новую величину. Значение такого отношения называется **единичным отношением**.

Отношение стоимости меда к его массе – это новая величина – цена меда.

2 Самолет пролетел 720 км от Будапешта до Кишинева за 1 час и 40 минут. С какой средней скоростью летел самолет?

Решение:

$$\text{Скорость } (v) = \frac{\text{Расстояние } (d)}{\text{Время } (t)}$$

$$1 \text{ ч } 40 \text{ мин} = 100 \text{ мин} = 6000 \text{ с}$$

$$720 \text{ км} = 720000 \text{ м}$$

$$\text{Значит, } v = \frac{720000 \text{ м}}{6000 \text{ с}} = 120 \text{ м/с.}$$

Ответ: 120 м/с. (Читаем: „120 метров в секунду“.)



3 Для приготовления варенья из черной смородины на 9 кг свежей ягоды приходится 7,5 кг сахара.

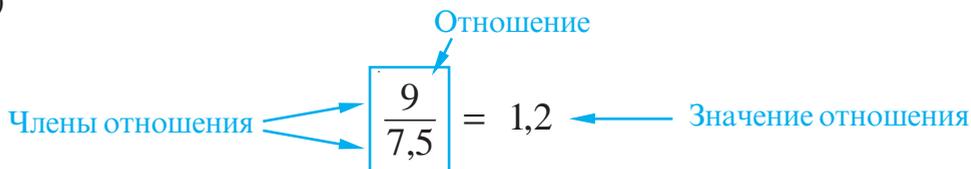
а) Чему равно значение отношения количества ягод к количеству сахара?

б) Сколько сахара понадобится для 12 кг свежих ягод?

Решение:

Преобразуем: 7 500 г = 7,5 кг.

а)



б) Пусть x – необходимое количество сахара.

Тогда $\frac{12}{x} = 1,2$.

Следовательно, $x = 12 : 1,2 = 10$ (кг).

Ответ: а) 1,2; б) 10 кг.

• Чему будет равно значение отношения, которое получится при умножении каждого члена отношения $\frac{9}{7,5}$ на 3?

• Истинно или Ложно?

а) Любая дробь – это отношение.

б) Любое отношение – это дробь.



Замечаем и поясняем

4 Из 1,5457 тонны руды получается 188,5 кг меди. Чему равно значение отношения количества руды к количеству полученной меди?

Решение:

$$\frac{1545,7}{188,5} = 8,2$$

Ответ: 8,2.

$$1,5457 \text{ т} = 1545,7 \text{ кг}$$

Применяем

• Найдите значение отношения:

а) 120 м и 800 см;

б) 600 кг и 300 г;

в) 2 160 мин и 12 ч.

5 Рассмотрите рисунок и определите, какой из драгоценных металлов тяжелее: золото или серебро (оба слитка имеют форму кубоида).

Золото

$$L = 5 \text{ см}$$

$$l = 2 \text{ см}$$

$$h = 1 \text{ см}$$

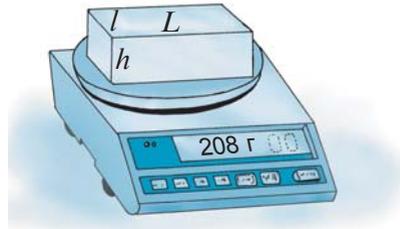


Серебро

$$L = 5 \text{ см}$$

$$l = 2 \text{ см}$$

$$h = 2 \text{ см}$$



Решение:

① Вычислим объем тел:

$$V_{\text{золота}} = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V_{\text{серебра}} = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ (см}^3\text{)}.$$

② Вычислим вес 1 см³ металла, то есть **плотность** металла:

$$\rho_{\text{куб}} = L \cdot l \cdot h$$

Золото: $\begin{matrix} \text{Масса} \longrightarrow & 193 \text{ г} \\ \text{Объем} \longrightarrow & 10 \text{ см}^3 \end{matrix} = 19,3 \text{ г/см}^3 \longleftarrow \text{Плотность}$

Серебро: $\frac{208 \text{ г}}{20 \text{ см}^3} = 10,4 \text{ г/см}^3$

$$19,3 > 10,4$$

Ответ: Золото тяжелее серебра.

6 В чашке чай с сахаром. Масса чая 200 г, а сахара 25 г. Какова концентрация раствора, то есть концентрация чая с сахаром?

Решение:

Вычисляем концентрацию раствора:

$$C = \frac{\text{масса сахара}}{\text{масса чая}} = \frac{25 \text{ г}}{200 \text{ г}} = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, концентрация чая с сахаром равна $\frac{1}{8} = 0,125$.



Возьмите на заметку

- ◆ Отношение массы металла к его объему – это **плотность** металла, обозначается греческой буквой ρ (читается как „ро“).
→ Плотность $(\rho) = \frac{\text{Масса } (m)}{\text{Объем } (V)}$
- ◆ Отношение стоимости товара к его количеству или массе – это **цена** товара.
→ Цена $(c) = \frac{\text{Стоимость } (P)}{\text{Масса } (m)}$
- ◆ Отношение пройденного телом расстояния ко времени его движения – это **скорость** движения тела.
→ Скорость $(v) = \frac{\text{Расстояние } (s)}{\text{Время } (t)}$
- ◆ Отношение массы вещества, которое растворяется, к массе раствора – это **концентрация раствора**.
→ $C = \frac{\text{масса вещества } (m_1)}{\text{масса раствора } (m)}$

Применяем

- Какова цена сахара, если 25 кг сахара стоят 365 леев?
- Какова средняя скорость автомобиля, если время, за которое он проходит 385 км, составляет 3 ч 30 мин?

1.3. Последовательности равных отношений

Исследуем и узнаём

Мама купила 2 кг муки за 26,6 лея, затем 3 кг за 39,9 лея и в третий раз – 4 кг муки за 53,2 лея.

а) Покажите, что каждый раз мама покупала муку по одной и той же цене.

б) Сколько стоит 1 кг муки?

Решение:

а) Первый раз – $\frac{26,6}{2} = 13,3$ (лея/кг); Второй раз – $\frac{39,9}{3} = 13,3$ (лея/кг);

Третий раз – $\frac{53,2}{4} = 13,3$ (лея/кг).

Получаем последовательность равных отношений: $\frac{26,6}{2} = \frac{39,9}{3} = \frac{53,2}{4}$.

б) Значение каждого из этих отношений равно 13,3, следовательно, 1 кг муки стоит 13,3 лея.

 **Возьмите на заметку**

Три и более отношений с одинаковыми значениями образуют **последовательность равных отношений**.

Применяем

Отношения $\frac{3}{4}$, $\frac{4,5}{6}$, $\frac{18,3}{24,4}$ имеют одинаковые значения $-0,75$.

Следовательно, они образуют последовательность равных отношений.

Записываем: $\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = \frac{18,3}{24,4}$.

 **Возьмите на заметку**

Если $\frac{a_1}{b_1} = k$, $\frac{a_2}{b_2} = k$, $\frac{a_3}{b_3} = k$, ..., $\frac{a_n}{b_n} = k$, то эти n отношений образуют последовательность равных отношений $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$.

Применяем

1 Запишите последовательность из пяти равных отношений:

Решение:

$$\frac{5}{4} = \frac{\square}{4,8} = \frac{3,5}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}.$$

2 Дана последовательность равных отношений $\frac{2}{3} = \frac{7}{10,5} = \frac{3}{4,5}$.

Сравните значения этих отношений со значением отношения $\frac{2+7+3}{3+10,5+4,5}$.

Решение:

$$\frac{2+7+3}{3+10,5+4,5} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Значит, } \frac{2}{3} = \frac{7}{10,5} = \frac{3}{4,5} = \frac{2+7+3}{3+10,5+4,5}.$$

 **Возьмите на заметку**

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}.$$

Применяем

3 Известно, что $\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8}$ и $a + b + c = 2$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Найдите числа a , b и c .

Решение:

Учитывая отношение $\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{\blacksquare + \blacksquare + \blacksquare}$ и что $a + b + c = 2$, получаем

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = \frac{2}{\blacksquare}.$$

Каждое из первых трех отношений последовательно приравняем к $\frac{2}{\blacksquare}$.

Получаем: $\frac{a}{2} = \frac{2}{\blacksquare}$, значит, $a = \blacksquare$; $\frac{b}{5} = \frac{2}{\blacksquare}$, значит, $b = \blacksquare$; $\frac{c}{8} = \frac{2}{\blacksquare}$,

значит, $c = \blacksquare$.

Ответ: $a = \blacksquare$; $b = \blacksquare$; $c = \blacksquare$.

Упражнения и задачи



1. Составьте отношения, членами которых являются числа из множества:

- а) {2, 3, 4}; б) {5, 11, 8};
в) {0,1; 4; 6}; г) {9; 2,5; 1; 2}.

Образец:

$$\text{а) } \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}.$$

2. а) Из данных отношений выберите дроби: $\frac{1}{3}$; $\frac{14}{5}$; $\frac{2}{2,1}$; $\frac{4}{1}$; $\frac{9,5}{6}$; $\frac{1}{2,7}$; $\frac{0,3}{0,4}$.
б) Чем дробь отличается от отношения?

3. Найдите значение отношения:

- а) $\frac{18}{3}$; б) $\frac{50}{100}$; в) $\frac{3}{1000}$; г) $\frac{4,11}{10}$.

4. а) Умножьте числитель и знаменатель отношения $\frac{3,1}{7}$ на 0,1.

б) Сократите отношение $\frac{4,2}{10}$ на 10.

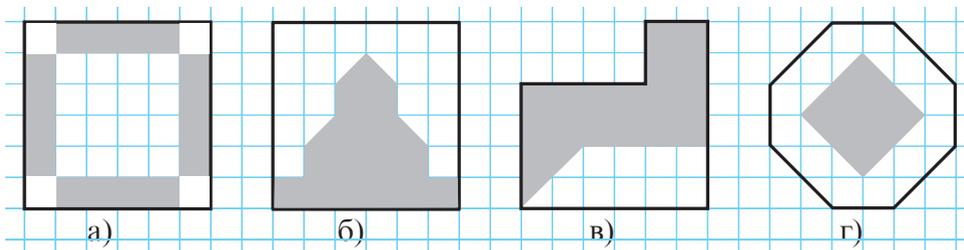
в) Умножьте числитель и знаменатель отношения $\frac{2,6}{3,8}$ на 3.

г) Сократите отношение $\frac{35}{10}$ на 5.

5. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\frac{2}{5} = \frac{\blacksquare}{10} = \frac{6}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{25} = \frac{18}{\blacksquare}$; б) $\frac{9}{\blacksquare} = \frac{18}{8} = \frac{\blacksquare}{2} = \frac{36}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{20}$.

6. Найдите значение отношения площади закрашенной части к площади незакрашенной части:



7. Сравните x и y , если: а) $\frac{x}{y} = \frac{31}{26}$; б) $\frac{x}{y} = 0,9$; в) $y = \frac{7}{8}x$; г) $x = 2,3y$.

8. Найдите значение отношения:

- а) 3 м и 15 см; б) 3 ч и 45 мин; в) 7,5 кг и 250 г;
г) количества дней в мае к количеству дней в августе;
д) наибольшего трехзначного натурального числа к наименьшему двузначному натуральному числу.

9. Чему равно отношение количества мальчиков к количеству девочек вашего класса?

10. Сравните отношения:

а) $\frac{2,1}{10} \bullet \frac{3,8}{10}$



б) $\frac{3}{7} \bullet \frac{4}{9}$

в) $\frac{6,6}{5,5} \bullet \frac{0,66}{0,55}$

г) $\frac{11}{0,5} \bullet \frac{5}{0,2}$

11. В кастрюлю с 4-мя литрами воды хозяйка положила 3 ложки соли, а в другую с 3-мя литрами воды – 2 ложки соли. Какой раствор более соленый?

12. У кого производительность больше?

- а) Анна собирает 25 лукошек ягод за 4 часа, а Петр – 29 лукошек ягод за 5 часов.

Производительность – работа, выполненная за единицу времени.

- б) Мастер Молоток забивает 152 гвоздя за 8 часов, а мастер Гвоздь – 126 гвоздей за 7 часов.

- в) Всезнайка правильно решает 244 задания за 400 минут, а Многознайка – 300 заданий за 10 часов.

- г) Господин Болтуненко произносит 1 234 слова за 3 минуты, а господин Щебетунко – 4 321 слово за 12 минут.

- д) Сэр Обжоркинг съедает 3 кг торта за 7 минут, а сэр Щекинг – 5 кг 200 г торта за 15 мин 15 с.

13. Вычислите значение отношения:

а) $\frac{9}{1,6}$; б) $\frac{4,92}{1,23}$; в) $\frac{23,32}{8,8}$; г) $\frac{50,4}{7,2}$.

14. Умножьте на 4 числитель и знаменатель отношений из задания 13 и вычислите значение полученных отношений.

15. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\frac{2}{5} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{0,5} = \frac{4,8}{\square} = \frac{\square}{0,05}$;

б) $\frac{\square}{0,2} = \frac{6}{\square} = \frac{12}{2} = \frac{7,2}{\square} = \frac{\square}{0,02}$.

16. Вычислите значение отношения:

а) 3 кг и 150 г;

б) 2,5 м и 125 мм;

в) 6 ч и 45 мин;

г) 14 см и 50 м.

17. Сравните отношения:

а) $\frac{6}{10}$ и $\frac{61}{100}$;



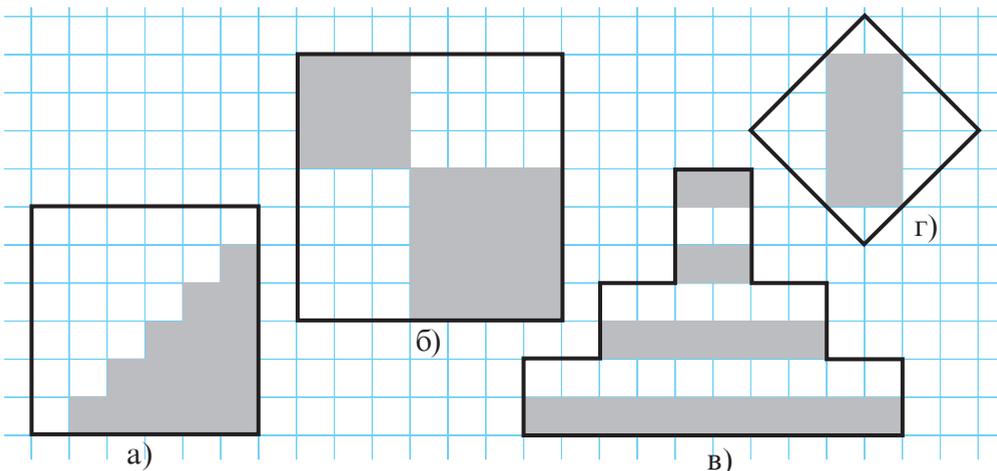
б) $\frac{3,6}{0,6}$ и $\frac{10,2}{1,7}$;

в) $\frac{9,6}{4,8}$ и $\frac{11,44}{5,2}$;

г) $\frac{1}{0,8}$ и $\frac{2}{0,25}$.

18. В классе 32 ученика, из них 12 мальчиков. Чему равно отношение числа мальчиков к числу девочек?

19. Вычислите значение отношения площади закрасненных квадратов к площади незакрасненных:



20. В сосуде солевой раствор. Масса раствора 300 г, а масса соли 75 г. Какова концентрация этого раствора?

21. Найдите массу жира в 500 г сметаны, если ее концентрация равна 0,15.



22. Как изменится значение отношения, если увеличить в 3,5 раза только один из членов отношения? Рассмотрите оба случая.
23. Начертите прямоугольник, если известно, что значение отношения его сторон равно: а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) 1,8; г) 0,5.
24. Для получения качественного раствора рекомендуется смешать 2 части цемента и 5 частей песка. Сколько песка нужно на 300 кг цемента?
25. Длина веревки 17,35 м. От нее отрезали кусок 3,75 м и еще один на 15 см меньше первого.
а) Найдите длину оставшейся части веревки.
б) Найдите значение отношения длины всей веревки к длине оставшейся части.
26. Чему равна плотность тела:
а) объем которого 3 см³, а масса 12,42 г;
б) объем которого 0,07 м³, а масса 91 кг;
в) объем которого 8,4 м³, а масса 54,6 т?
27. Какова цена яблок, если за 3,5 кг заплатили 36 леев 75 банов?
28. Вычислите значение отношения:
а) $\frac{3m+4n}{4n}$, если $\frac{m}{n} = 2,4$; б) $\frac{5b}{5b-2a}$, если $\frac{a}{b} = 5$.
29. Найдите значение отношения площадей двух прямоугольников с измерениями: 2,5 см, 4 см и 3 см, 6 см.
30. С какой средней скоростью движется поезд, если расстояние 1 050 км он проезжает за 12 ч и 30 мин?
31. Точка C принадлежит отрезку AB , длина которого составляет 15 см, причем $\frac{AC}{BC} = 0,875$. Найдите AC и BC .
32. Для приготовления сладостей бабушка использует раствор меда и воды с концентрацией 0,1 и массой 450 г.
а) Рассчитайте, какое количество меда следует растворить, чтобы получить такой раствор.
б) Какая будет концентрация раствора, если к этому раствору добавить 50 г воды?
33. Найдите пробу сплава, состоящего из 40 г золота и 280 г меди.
34. Проверьте, верно ли равенство $\frac{2}{5} = \frac{1}{2,5} = \frac{40}{100} = \frac{0,7}{1,75}$.



Проба сплава – это отношение массы драгоценного металла к массе сплава.

35. Найдите неизвестные члены последовательности равных отношений:

а) $\frac{1}{x} = \frac{2}{8} = \frac{3}{y} = \frac{z}{40}$;

б) $\frac{x}{1} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{6}{y} = \frac{z}{4,5}$.

36. Для приготовления еды в школьной столовой закупили в первый день 18 кг картофеля за 172,8 лея, во второй день в два раза больше, чем в первый день, а в третий день – в три раза меньше, чем в первый день.

а) Узнайте, сколько килограммов картофеля было закуплено во второй и в третий день.

б) Сколько заплатили за картофель во второй день, а сколько в третий день?

в) Запишите последовательность равных отношений, полученных в соответствии с условием задачи.

37. Высота макета здания 40 см. Зная, что отношение между высотой макета и реальной высотой здания равно $\frac{2}{500}$, найдите реальную высоту здания.

38. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Отношение расстояния на карте к фактическому расстоянию составляет $\frac{1}{1000000}$. Найдите:

а) Расстояние между двумя населенными пунктами в километрах, если расстояние на карте равно 4 см;

б) расстояние на карте между Кишиневом и Унгенами (в сантиметрах), если реальное расстояние составляет 120 км.

39. Сумма чисел x , y и z равна 2020. Найдите числа x , y , z , если :

а) $\frac{x}{100} = \frac{y}{52} = \frac{z}{50}$;

б) $\frac{x}{3,5} = \frac{y}{6,5} = \frac{z}{91}$.

40. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = 5$. Вычислите $15 - \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$.

41. Сумма чисел a , b и c равна 1000. Найдите числа a , b , c , если $\frac{2}{a} = \frac{6}{b} = \frac{12}{c}$.

42. Какова ежемесячная зарплата господина Петрова, если она относится к сумме минимальной потребительской корзины в 1760 леев как 7:4?

43. Найдите значение отношения чисел a и b , если $a = 10^3 - 10^2 - 10$, $b = 5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9)$.

44. Пусть $\frac{a}{x} = 5$ и $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Вычислите $\frac{a+b+c}{x+y+z}$.

45. Покажите, что $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$.

§2 Пропорции

Исследуем и узнаем

1 Для приготовления варенья мама купила 1,5 кг малины и заплатила 39 леев, а бабушка купила еще 2 кг малины и заплатила 52 лея. Мама и бабушка покупали малину по одинаковой цене?



Решение:

Чтобы определить цену 1 кг малины, купленной мамой и бабушкой, необходимо найти частные: $39 : 1,5$ и $52 : 2$.

Из расчетов следует, что в обоих случаях цена 1 кг малины составляет 26 леев. Итак, эти частные равны.

Следовательно, можно записать $39 : 1,5 = 52 : 2$ или $\frac{39}{1,5} = \frac{52}{2}$.

Такие равенства называются **пропорциями**.

2 Господин Копейкин решил купить сок из тропических фруктов и, как всегда, подешевле. Рассмотрите данные рисунка и помогите ему выбрать.



Решение:

750 мл = 0,75 л

Какая цена ниже?

2 л — 24 лея

0,75 л — 9 леев

$$\frac{24 \text{ лея}}{2 \text{ л}}$$

$$\frac{9 \text{ леев}}{0,75 \text{ л}}$$

леев/л

леев/л.

$$\text{Цена} = \frac{\text{Стоимость}}{\text{Количество}}$$

Равенство $\frac{24}{2} = \frac{9}{0,75}$ является **пропорцией**.

Возьмите на заметку

- ♦ Равенство двух отношений называется **пропорцией**.
- ♦ Четыре числа, образующие пропорцию, называются **членами пропорции**.
- ♦ Числа a и d пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называются **крайними членами**, а числа b и c — **средними**.

Читаем: „ a так относится к b , как c относится к d ”.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a : b = c : d$$

■ крайние
■ средние

3 Сравните произведение крайних и произведение средних членов пропорции: а) $\frac{18}{6} = \frac{1,2}{0,4}$; б) $\frac{2,5}{5} = \frac{5}{10}$.

Решение:

$$\text{а) } \frac{18}{6} = \frac{1,2}{0,4} \rightarrow \begin{array}{l} 18 \cdot 0,4 = \\ 6 \cdot 1,2 = \end{array} 7,2 \quad \left| \quad \text{б) } \frac{2,5}{5} = \frac{5}{10} \rightarrow \begin{array}{l} \square \cdot \square = \\ \square \cdot \square = \end{array} \square$$



Возьмите на заметку

Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних, то есть, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Применяем

4 Найдите неизвестный член пропорции: $\frac{0,3}{0,2} = \frac{x}{40}$.

Решение:

Используя основное свойство пропорции, получим: $0,3 \cdot 40 = 0,2 \cdot x$.

Отсюда: $x = \frac{0,3 \cdot 40}{0,2} = 60$.

Ответ: $x = 60$.

5 а) Можно ли из чисел 4, 36, 18, 8 составить пропорцию?
б) А из чисел 16, 2, 4, 12?

Решение:

① Расположим числа в порядке возрастания:

а) 4, 8, 18, 36; б) 2, 4, 12, 16.

② Сравним произведение наибольшего и наименьшего числа с произведением двух других чисел:

$$\text{а) } \boxed{4 \cdot 36} = \boxed{8 \cdot 18}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$144 = 144$$

$$\text{б) } \boxed{2 \cdot 16} \neq \boxed{4 \cdot 12}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$32 \neq 48$$

Ответ: а) Да, можно составить. Напри- б) Нет, нельзя составить.

мер, пропорцию $\frac{4}{8} = \frac{18}{36}$.

• Составьте и другие пропорции из чисел: 4, 8, 18, 36.

Возьмите на заметку

Из четырех чисел можно составить пропорцию тогда и только тогда, когда произведение наименьшего и наибольшего чисел равно произведению двух других чисел.

6 Масштаб карты равен $1 : 25\,000\,000$.

Чему равно расстояние между Кишиневом и Варшавой, если на карте оно составляет $3,5$ см?

Решение:

Пусть x – искомое расстояние.
Составляем пропорцию:

$$\frac{1}{25\,000\,000} = \frac{3,5}{x}$$



$$x = 3,5 \cdot 25\,000\,000 \text{ (см)} = 87\,500\,000 \text{ (см)} = 875 \text{ (км)}.$$

Ответ: 875 км.



Масштабом карты (или рисунка) называется отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности.

Значит, если масштаб рисунка $1 : a$, то реальные размеры будут в a раз больше нарисованных.

7 РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



Из некоторого отношения можно получить пропорцию умножением каждого из членов на ненулевое число или сокращением отношения на ненулевое число.

а) Умножьте каждый член отношения $\frac{2}{5}$ на $0,2$. Какую пропорцию вы получите?

б) Сократите отношение $\frac{2}{5}$ на $0,2$. Какую пропорцию вы получите?

Упражнения и задачи



1. Назовите устно крайние и средние члены пропорции:

а) $\frac{4}{9} = \frac{2}{4,5}$; б) $\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$; в) $\frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$; г) $\frac{7}{6} = \frac{21}{1,8}$?

2. Составьте пропорции из отношений:

а) $\frac{1}{4}$, $\frac{0,3}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{0,5}{10}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{0,3}{1,2}$, $\frac{10}{22,5}$, $\frac{1,5}{2}$,

б) $\frac{1,4}{0,2}$, $\frac{7}{0,28}$, $\frac{1,8}{6}$, $\frac{0,09}{0,3}$, $\frac{0,63}{0,09}$, $\frac{6}{1,8}$, $\frac{2}{0,08}$, $\frac{30}{9}$.

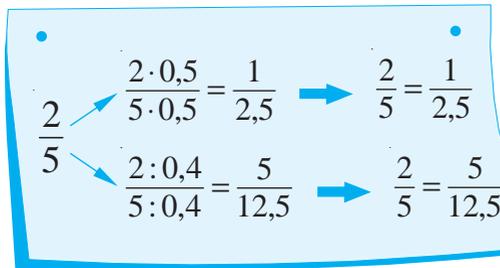
3. Запишите такую пропорцию, чтобы значение каждого ее отношения было равно: а) 3; б) 5; в) 0,4; г) 1,5; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{6}{5}$; ж) 1.

4. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{2}{x} = \frac{8}{4}$; б) $\frac{x}{27} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{5} = \frac{5}{x}$; г) $\frac{9}{0,8} = \frac{x}{1,6}$; д) $\frac{x}{4} = \frac{3}{10}$.

5. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!

Ежик составляет пропорции, умножая или деля числитель и знаменатель отношения на любое ненулевое число. Составьте и вы пропорции, используя отношения:



$$\frac{2}{5} \begin{cases} \nearrow \frac{2 \cdot 0,5}{5 \cdot 0,5} = \frac{1}{2,5} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{2,5} \\ \searrow \frac{2 \cdot 0,4}{5 \cdot 0,4} = \frac{5}{12,5} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{5}{12,5} \end{cases}$$



а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{8}{5}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{0,6}{1,2}$.

6. Данные числа являются членами некоторой пропорции. Запишите эту пропорцию:

а) $\boxed{6,2}$ $\boxed{6,4}$ $\boxed{6,08}$ $\boxed{5,89}$ б) $\boxed{37,8}$ $\boxed{21}$ $\boxed{44}$ $\boxed{79,2}$

в) $\boxed{1080}$ $\boxed{675}$ $\boxed{1240}$ $\boxed{1984}$ г) $\boxed{0,06}$ $\boxed{0,4}$ $\boxed{0,3}$ $\boxed{0,08}$

• Сколько решений имеет задача?

7. Используя равенство произведений, составьте пропорции:

а) $6 \cdot 16 = 48 \cdot 2$;

б) $12 \cdot 12 = 18 \cdot 8$;

в) $2,4 \cdot 5,8 = 3,48 \cdot 4$;

г) $0,9 \cdot 0,27 = 0,81 \cdot 0,3$.

8. Можно ли составить пропорцию из данных чисел?

а) $\boxed{6}$ $\boxed{18}$ $\boxed{15}$ $\boxed{5}$;

б) $\boxed{14}$ $\boxed{50}$ $\boxed{10}$ $\boxed{70}$;

в) $\boxed{16}$ $\boxed{20}$ $\boxed{30}$ $\boxed{14}$;

г) $\boxed{7,5}$ $\boxed{1,2}$ $\boxed{15}$ $\boxed{0,6}$;

д) $\boxed{8}$ $\boxed{6}$ $\boxed{15}$ $\boxed{18}$.

9. Компания „Роснефть“ за 24 часа продала 9 700 000 барелей нефти, получив при этом прибыль в 523 800 000 \$, а компания „Парсойл“ продала за это же время 6 400 000 барелей нефти, получив 345 600 000 \$.

а) Впишите данные задачи, чтобы получить пропорцию:

$$\frac{523\,800\,000}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}};$$

б) Что представляет собой величина каждого соотношения пропорции?

10. Пусть d – расстояние на карте между населенными пунктами A и B . Найдите реальное расстояние AB на местности, если:

а) $d = 15$ см при масштабе $1 : 10000$;

б) $d = 6,5$ см при масштабе $1 : 20000$;

в) $d = 8$ см при масштабе $1 : 50000$;

г) $d = 5,5$ см при масштабе $1 : 30000$.



11. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{2\frac{1}{3}}{0,5} = \frac{3x}{9}$;

б) $\frac{14,3}{x-2} = \frac{10}{2,5}$;

в) $\frac{x+1}{18\frac{4}{5}} = \frac{1\frac{3}{10}}{7,2}$;

г) $\frac{14}{25\frac{1}{5}} = \frac{15}{2x-1}$.

12. Вычислите:

а) $15 + \frac{bc}{ad}$, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

б) ac и bd , если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 2$ и $a \cdot b \cdot c \cdot d = 900$.

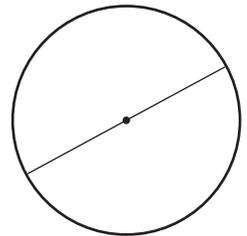
13. Значение отношения длины окружности к ее диаметру приблизительно равно $\frac{22}{7}$. Вычислите (приблизительно):

а) длину окружности, диаметр которой 10 см;

б) длину окружности, диаметр которой 1 см;

в) диаметр окружности, длина которой 10 см;

г) радиус окружности, длина которой 1 см.



14. Высота макета объекта 8 см. Зная, что макет изготовлен в масштабе 2 : 300, найдите реальную высоту объекта.
15. Колонна Траяна имеет высоту около 40 м, а ее модель 1,6 м. Проверьте, изготовлена ли модель в масштабе 1 : 25.



16. Триумфальная арка в Кишиневе имеет высоту 13 м, а ее макет 0,4 м. Проверьте, изготовлен ли макет в масштабе $\frac{2}{30}$.

17. Чтобы получить раствор, смешивают одну часть цемента и 3 части песка. Сколько цемента нужно на 210 кг песка?
18. Запишите отношение чисел в виде дроби:
а) 1,2 и 3,6; б) 7,5 и 8,15; в) 11,3 и 8,4.
19. **РАБОТАЕМ В ГРУППАХ!**  Проект *Отношения и пропорции в кулинарии*. Класс делится на группы по 6-10 учащихся. Каждая группа представляет плакаты с примерами применения отношений и пропорций при приготовлении блюд.

20. Покажите, что если члены пропорции являются натуральными числами, то их произведение – это точный квадрат.
21. Измерьте соответствующую длину на рисунке и найдите эту длину в действительности:



Масштаб 1 : 400



Масштаб 1 : 95

22. Нарисуйте окружающие вас предметы в масштабе 1 : 200.
23. Составьте задачу, используя отношение:
а) 2 : 3; б) 3 : 5; в) 2 : 7.

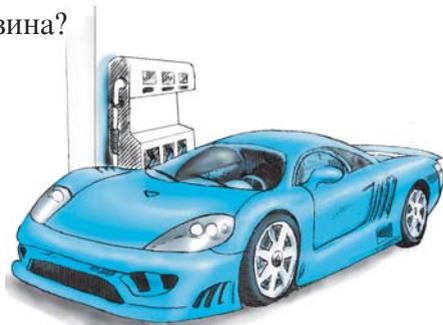
§ 3 Прямо пропорциональные величины

Исследуем и узнаем

1 Литр бензина стоит 15,3 лея.
Сколько стоят: 10 л; 20 л; 15 л; 25 л бензина?

Решение:

Количество бензина (л)	Стоимость (леев)
a	b
$\times 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \times 15$	$\times 10 \begin{pmatrix} 15,3 \\ 153 \\ 306 \end{pmatrix} \times 15$
15	229,5
25	...



• Допишите решение задачи.

2 Улитка ползет со средней скоростью 0,15 м/мин. Какое расстояние преодолит улитка за: 3 мин; 4 мин; 5 мин; 7 мин?

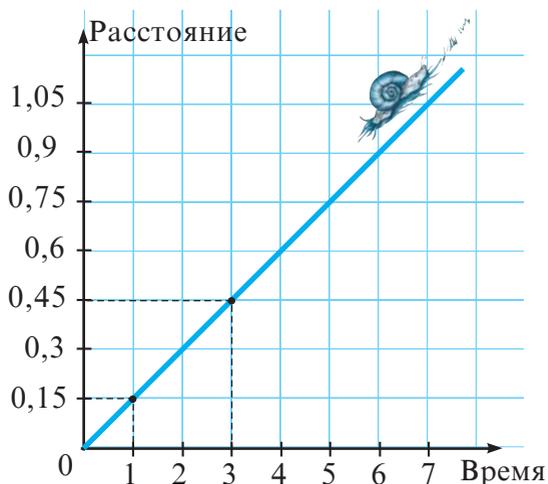
Решение:

1 способ

$v = 0,15 \text{ м/мин}$	
Время (мин)	Расстояние (м)
t	s
$1 \begin{pmatrix} \times 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$0,15 \begin{pmatrix} \times 3 \\ 0,45 \end{pmatrix}$
4	...
...	...



2 способ



• Допишите решение задачи по схеме.

- Какое расстояние проползет улитка за 6 мин? А за 3,5 мин?
- Как изменится расстояние, пройденное улиткой, если увеличить время: в 3 раза; в 4 раза; в 6 раз?
- Как изменится значение отношения $\frac{s}{t}$?

Возьмите на заметку

Две взаимосвязанные величины a и b называются **прямо пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) a в несколько раз другая величина b увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Значение отношения $\frac{b}{a}$ не изменится.

Следовательно, количество бензина и его стоимость являются прямо пропорциональными величинами (при постоянной цене).

Время и пройденное расстояние являются прямо пропорциональными величинами (при постоянной скорости).

3 Принтер печатает за 3 мин 21 страницу. Сколько страниц напечатает принтер за 10 мин?

Решение:

1 Запишем кратко условие задачи в виде схемы:

↓	3 мин	—	21 страница	↓
↓	10 мин	—	x страниц	↓

2 1 способ

Простое правило трех (для прямо пропорциональных величин):

$$\frac{3}{10} = \frac{21}{x}$$

$$x = \frac{\quad}{\quad}$$

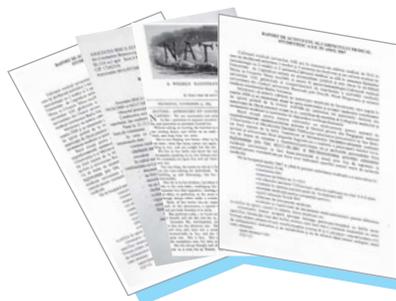
Время и количество страниц являются прямо пропорциональными величинами.

2 способ

Метод приведения к единице:

$$1 \text{ мин} \text{ — } \frac{21}{\quad} = \quad \text{ страниц}$$

$$10 \text{ мин} \text{ — } \quad \cdot 10 \text{ страниц}$$



3 Ответ: страниц.

ХОТИТЕ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ?

4 Три друга – Роман Рублев, Дмитрий Полушкин и Андрей Полонидей – решили открыть свой бизнес. При этом каждый вложил в дело соответствующую сумму денег (капитал): 1 600 леев, 2 000 леев, 1 800 леев. Прибыль от их бизнеса составила 16 200 леев. Как им поделить эти деньги между собой?



Решение:

Подсчитаем весь капитал: $1\,600 + 2\,000 + 1\,800 = 5\,400$ (леев).

Подсчитаем, во сколько раз прибыль больше вложенной суммы:

$$16\,200 : 5\,400 = 3 \text{ (раза).}$$

Каждый вложенный лей „вырос“ в 3 раза.

$$\text{Значит, } 1\,600 \cdot 3 = 4\,800 \text{ (леев)} \longrightarrow \text{Роман}$$

$$2\,000 \cdot 3 = 6\,000 \text{ (леев)} \longrightarrow \text{Дмитрий}$$

$$1\,800 \cdot 3 = 5\,400 \text{ (леев)} \longrightarrow \text{Андрей}$$

Замечаем

$\frac{4\,800}{1\,600} = \frac{6\,000}{2\,000} = \frac{5\,400}{1\,800}$ – последовательность равных отношений.

$$3 = \frac{4\,800}{1\,600} = \frac{6\,000}{2\,000} = \frac{5\,400}{1\,800} = \frac{4\,800 + 6\,000 + 5\,400}{1\,600 + 2\,000 + 1\,800} = \frac{16\,200}{5\,400}.$$

Возьмите на заметку

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$, где $k \neq 0$, то говорим, что между последовательностями a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n существует **прямая пропорциональность** и

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = k,$$

где k называется **коэффициентом пропорциональности**.

Следовательно, между последовательностью суммы денег, вложенной в бизнес (1 600 леев, 2 000 леев, 1 800 леев), и последовательностью суммы денег прибыли, полученной каждым (4 800 леев, 6 000 леев, 5 400 леев), существует прямая пропорциональность с коэффициентом пропорциональности $k = 3$.

5 Разделите отрезок в 18 см на три части, прямо пропорциональные числам: 2, 3, 4.

Решение:

Пусть x, y, z – последовательность искомым длин ($x + y + z = 18$).

Тогда между последовательностями x , y , z и 2, 3, 4 существует прямая пропорциональность.

$$\text{Значит, } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2.$$

Получим: $x = 4$ (см),

$y = 6$ (см),

$z = 8$ (см).



Упражнения и задачи



1. Определите, являются ли величины a и b , данные в таблице, прямо пропорциональными.

а)

a	2	4	6	10	12
b	3	6	9	15	18

б)

a	0,2	0,6	1,8	3,2
b	5	15	50	80

в)

a	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
b	20	40	45	48

г)

a	8	4,2	66	1
b	$\frac{4}{3}$	0,7	11	$\frac{1}{6}$

2. Перечертите и заполните таблицу:

а)

Количество мешков с мукой	Вес (кг)
1	60
3	...
5	...
...	480
9	...
...	660

б)

Количество батончиков	Стоимость (леев)
1	2,5
4	...
...	15
7	...
...	27,5
9	...

в)

Расстояние (км)	Количество бензина (л)
100	7
50	...
150	...
...	17,5
350	...
...	22,75

г)

Площадь (м ²)	Количество краски (кг)
8	1
10	...
15	...
...	2,5
...	7,5
30	...



3. *Истинно или Ложно?*



- а) Площадь прямоугольника прямо пропорциональна длине каждой из его сторон.
 - б) Периметр прямоугольника прямо пропорционален длине каждой из его сторон.
 - в) Площадь и периметр прямоугольника – прямо пропорциональные величины.
 - г) Площадь и длина стороны квадрата – прямо пропорциональные величины.
 - д) Количество товара и его стоимость прямо пропорциональные величины.
 - е) Возраст и рост человека прямо пропорциональны.
4. Тракторист вспахивает 49 гектаров пашни за 4 дня. За сколько дней тракторист вспашет: а) 73,5 гектара; б) 122,5 гектара?
5. 5 л масла весят 4 кг.
- а) Сколько килограммов масла вместится в 12-литровое ведро? А в 180-литровую бочку? А 250-миллиграммовый стакан?
 - б) Какова вместимость 700-граммовой банки масла? А 3-килограммового бидона с маслом?
6. Электронасос выкачивает из колодца 30 л воды за 12 с.
- а) За какое время наполнится водой 800-литровая бочка? А 1000-литровая бочка?
 - б) Сколько воды выкачивает насос за 10 с? А за 18 с? А за 2 мин?
7. Дина выписала из кулинарной книги список продуктов, необходимых для приготовления 4 порций салата „Нежность“. Какое количество продуктов понадобится Дине для приготовления 6 порций салата? А для 10 порций?
- 300 г капусты
100 г колбасы
6 яиц
100 г ветчины
80 г майонеза
2 луковицы
8. а) В 100 г черной смородины содержится 250 мг витамина С. Сколько граммов витамина С содержится в 2 кг черной смородины?
б) Суточная норма витамина С для взрослого человека составляет 0,05 г. Какое количество черной смородины надо съесть взрослому человеку, чтобы получить суточную норму витамина С?
9. Проба сплава нескольких драгоценных металлов – это количество граммов драгоценного металла в килограмме сплава. Какое количество чистого золота содержится в 16 г золотого браслета, если его проба:
а) 585; б) 958?



10. Составьте и решите задачу по схеме:

а) 3,5 кг – 44,8 лея
14,5 кг – ? леев
? кг – 160 леев

б) 12 костюмов – 44 м
25 костюмов – ? м
? костюмов – 110 м

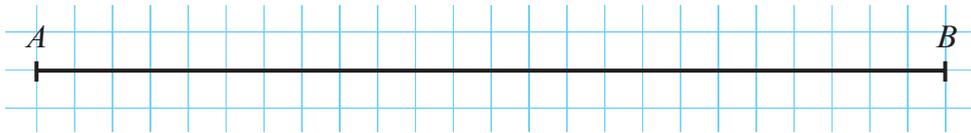
11. Из 40 л молока получается 15 кг творога.

- а) Сколько творога получится из 100 л молока? А из 60 л?
б) Сколько необходимо молока, чтобы получить 112,5 кг творога?
А 22,5 кг?

12. Составьте задачу для каждой из таблиц задания 2.

13. Разделите отрезок AB на 3 части, прямо пропорциональные числам:

- а) 6, 2, 4; б) 10, 9, 5.



14. Сумму 4960 леев разделили на части, прямо пропорциональные числам 8, 15, 17, для приобретения продуктов x , y и z .

- а) Определите, какая сумма была распределена для приобретения каждого продукта x , y и z .
б) Для какого продукта выделили наибольшую сумму денег?

15. Разделите число 9200 на части, прямо пропорциональные числам $1,75$; $2,75$; $3\frac{1}{6}$.

16. Высота объекта 80 см, а высота его модели 1,5 см. Какова высота модели объекта высотой 524,8 см, если она выполнена в таком же масштабе?

17. Известно, что, как правило, в 100 л воздуха содержится 21 л кислорода. Узнайте, сколько литров кислорода в:

- а) 600 л воздуха; б) 450 л воздуха; в) 90 л воздуха.

18. За 3 литра молока заплатили 54,6 лея. Определите, сколько будут стоить:

- а) 2 литра молока; б) 5 литров молока.

19. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Автомобиль движется со скоростью 80 км в час.

а) Перечертите и заполните таблицу:

t	2 ч	4 ч	5 ч	8 ч
d				



б) Проверьте, прямо пропорциональны ли расстояние и время при постоянной скорости.

20. 6 плиток шоколада стоят 87 леев. Не вычисляя цену одной шоколадной плитки, найдите сколько будут стоить:
- в три раза больше шоколадных плиток;
 - в два раза меньше шоколадных плиток;
 - 20 шоколадных плиток.



21. Найдите три числа, прямо пропорциональных числам 3; 3,5 и 6, если известно, что наименьшее из чисел равно 9.
22. Из 80 кг картофеля получается 14 кг крахмала. Из какого количества картофеля получится 42 кг крахмала?
23. Из 200 кг сахарной свеклы получается 37 кг сахара. Сколько килограммов свеклы нужно для того, чтобы получить 222 кг сахара?
24. Перечертите и заполните таблицу, зная, что величины x и y прямо пропорциональные:

x	2	3	6	12	15	18		
y			20				100	250

25. Тень объекта прямо пропорциональна его высоте. В полдень ель дает тень 4,8 м. В то же время вертикальный столб высотой 1,6 м дает тень 0,6 м. Найдите высоту ели.



26. Найдите числа x , y , z , зная, что они прямо пропорциональны числам 3, 4 и 5, а $x + y = 35$.
27. Три брата получили в наследство 90 000 долларов, которые по завещанию надо разделить следующим образом: первому – половину того, что получит второй, третьему – $\frac{3}{2}$ того, что получит второй. Какую сумму денег получит каждый из братьев?

§ 4 Обратнo пропорциональные величины

Исследуем и узнаем

1 Скаковая лошадь проходит расстояние в 40 км за час. Это же расстояние спортсмен преодолевает за 2 часа, мотоциклист – за 30 мин, а автомобилист – за 20 мин. Вычислите скорость каждого.

Решение:

$S = 40 \text{ км}$	
Время (ч)	Скорость (км/ч)
t	v
$\times 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : 2$ 0,5 $\frac{1}{3}$	$: 2 \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} \times 2$ 80 ...



40 км/ч



20 км/ч



80 км/ч



км/ч

20 мин = $\frac{1}{3}$ ч.

- Как изменится скорость, если время: увеличить в 2 раза; уменьшить в 2 раза; уменьшить в 3 раза?
- Как изменится произведение $t \cdot v$?

Возьмите на заметку

Две взаимосвязанные величины a и b называются **обратно пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) a в несколько раз, другая величина b уменьшается (увеличивается) во столько же раз. Значение произведения ab не изменяется.

Следовательно, время и скорость являются обратно пропорциональными величинами (при постоянном расстоянии).

2 Известно, что 15 цистерн одинаковой вместимости перевозят некоторое количество нефти за 8 дней. Узнайте, за сколько дней 10 цистерн той же вместимости перевезут такое же количество нефти.

Решение:

Величины M (количество цистерн) и t (время) обратно пропорциональны. Тогда:

M (цистерны)	t (дни)
15	8
10	x

↓ 15 цистерн — 8 дней ↑
↓ 10 цистерн — x дней ↑

$\frac{15}{10} = \frac{x}{8}$. Следовательно, $x = \frac{15 \cdot 8}{10} = 12$.

Вывод: Меньше цистерн перевозят нефть за большее количество дней (12 дней).

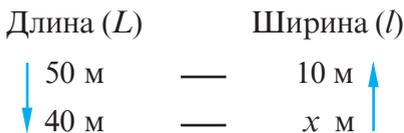
Ответ: 12 дней.

3 Фермер решил оградить сеткой участок прямоугольной формы (вдоль водного канала). Сначала он хотел сделать его подлинней, взяв длину 50 м и ширину 10 м. Увидев, что сетки ему не хватает, он решил уменьшить длину до 40 м, при этом периметр участка уменьшился достаточно, чтобы хватило сетки. Какой теперь будет ширина участка, если его площадь не изменилась?



Решение:

1 Запишем кратко условие задачи в виде схемы:



Произведение длины (L) на ширину (l) равно площади (S), являющейся постоянной. Значит, L и l – обратно пропорциональные величины.

1 способ

2 Простое правило трех (для обратно пропорциональных величин):

$$\frac{50}{40} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 10}{40} = 12.5 \text{ (м)}$$

2 способ

2 Вычислим площадь:

$$S = 50 \text{ м} \cdot 10 \text{ м} = 500 \text{ м}^2.$$

3 Вычислим ширину:

$$l = \frac{S}{L} = \frac{500 \text{ м}^2}{40 \text{ м}} = 12.5 \text{ м}.$$

• Насколько уменьшилась длина забора из сетки?

4 Даны числа 2, 3, 4 и 72, 48, 36. Знаем, что $2 \cdot 72 = 3 \cdot 48 = 4 \cdot 36 = 144$. Говорят, что числовая последовательность 2, 3, 4 обратно пропорциональна числовой последовательности 72, 48, 36, то есть $\frac{2}{72} = \frac{3}{48} = \frac{4}{36}$.



Возьмите на заметку

Числовые последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n являются **обратно пропорциональными**, если $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n$.

То есть $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Замечаем

Если последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n прямо (обратно) пропорциональны, то последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}$ обратно (прямо) пропорциональны.

Упражнения и задачи



1. Определите, являются ли величины a и b , данные в таблицах, обратно пропорциональными:

а)

a	14	210	7	4	33,6
b	12	0,8	24	42	5

б)

a	1	3	5	7	9
b	11	9	7	5	3

в)

a	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
b	32	16	8	4	2

г)

a	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	0,5	$\frac{5}{8}$	1,25
b	$\frac{5}{6}$	$\frac{15}{8}$	2,5	2	1

2. Перечертите и заполните таблицу:

а)

Сумма: 2520 леев	
Количество человек	Сумма денег на человека
5	504
8	...
...	630
...	360
14	...
28	...

б)

Сумма: 187,5 лея	
Цена (леев/кг)	Количество (кг)
7,5	25
...	5
15	...
3,75	...
...	3
31,25	...



в)

Масса: 800 кг	
Плотность (кг/м ³)	Объем (м ³)
1 000	0,8
125	...
160	...
400	...
...	1,6
...	1,28

г)

Количество бензина: 20 л	
Расход (л) на 1 км	Расстояние (км)
0,1	200
0,05	...
0,16	...
...	250
...	50
0,25	...

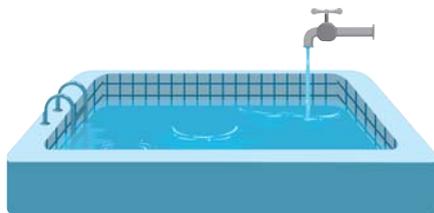


3. *Истинно* или *Ложно*?



- а) Количество одинаковых кранов, наполняющих водой бассейн обратно пропорционально времени наполнения бассейна.
- б) Количество отличников класса обратно пропорционально остальному количеству учащихся этого класса.
- в) В произведении двух чисел обратно пропорциональными являются множители.
- г) Количество сока, взятого из банки, обратно пропорционально количеству оставшегося сока.

- 4. Велосипедист проехал некоторое расстояние за 4 ч со средней скоростью 24 км/ч. С какой средней скоростью должен ехать велосипедист, чтобы преодолеть это расстояние за 3 ч?
- 5. 8 комбайнов могут убрать с поля пшеницу за 6 дней. За сколько дней уберут ту же пшеницу 12 комбайнов?
- 6. 10 рабочих выполняют работу за 9 дней. Сколько рабочих понадобится, чтобы выполнить работу за 6 дней?
- 7. 6 человек могут выкопать ров за 8 ч.
 - а) За сколько часов могут выкопать этот ров 4 человека? А 12 человек? Один человек?
 - б) Сколько человек могут выкопать этот ров за 3 ч? За 16 ч? За час?
- 8. Водой из одного крана можно наполнить 1000-литровый бассейн за 40 мин. За сколько минут наполнится бассейн:
 - а) водой из 4 кранов;
 - б) водой из 6 кранов?





9. Пасечник Золотомед разлил мед в 60 банок по 250 мл каждая. Сколько банок понадобится пасечнику, если он захочет разлить мед в банки по:

- а) 200 мл;
б) 750 мл;
в) 300 мл?



10. В сутках 24 часа, а в часе – 60 минут. Учтывая общее количество таких же минут, подсчитайте, сколько минут было бы в сутках, если бы они длились:
- а) 30 часов; б) 32 часа; в) 20 часов.
11. Маша разложила книги своей библиотеки на 24 полки, по 30 книг на каждой. Сколько полок понадобится, если Маша будет раскладывать по 36 книг на каждой полке?
12. Насос мощностью 12 л/мин наполняет емкость водой за 4 мин. За какое время наполнит водой эту емкость насос мощностью 10 л/мин?
13. Составьте и решите задачу по каждой схеме:

а)

9 леев/кг	–	10 кг
6 леев/кг	–	? кг
? леев/кг	–	18 кг

б)

40 км/ч	–	9 ч
60 км/ч	–	? ч
? км/ч	–	12 ч

в)

30 мешков	–	60 кг/мешок
? мешков	–	45 кг/мешок
12 мешков	–	? кг/мешок

г)

30 шагов	–	20 см/шаг.
? шагов	–	25 см/шаг.
15 шагов	–	? см/шаг.

14. Найдите числа x , y , z , обратно пропорциональные числам 3, 4, 5, если их сумма равна 564.
15. Для перевозки товара со склада требуется 21 грузовик грузоподъемностью 2,5 т каждый. Определите, сколько грузовиков грузоподъемностью 3,5 т необходимо для перевозки этого товара.

16. Трактор, автобус и автомобиль проехали по 180 км каждый.

а) Заполните таблицу:

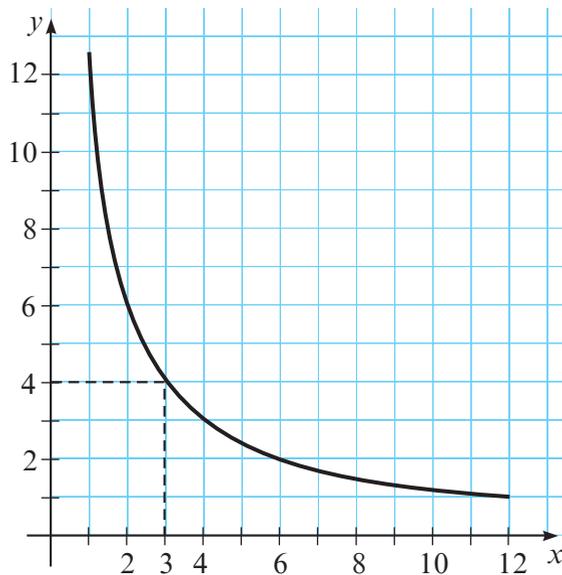
	Трактор	Автобус	Автомобиль
Скорость	30 км/ч		
Время		3 часа	2 часа

б) Являются ли скорость и время обратно пропорциональными?

в) Приведите другие примеры обратно пропорциональных величин из различных областей знаний.

17. Данный рисунок показывает зависимость между величинами x и y .

Например, если $x = 3$, то $y = 4$.



а) Запишите формулу, выражающую эту зависимость.

б) Какими величинами являются x и y ?

в) Запишите данные рисунка в виде таблицы:

x	1	2	3	4	...
y	12	?	4	?	...

18. Постройте рисунок, как в задании 17, для зависимости $y = \frac{8}{x}$.

19. Одно и то же расстояние Денис проходит за 3 ч, а Никита за 2 ч. Отправившись навстречу друг другу, они встретились в момент, когда Никита уже прошел 7 км 200 м. Какое расстояние до встречи преодолел Денис?

§ 5 Проценты

Исследуем и узнаем

1 Кто лучше всех?



В нашем классе
8 отличников,
а в вашем – 7.
Значит, мы лучшие!

Ты неправ! В вашем
классе всего
25 учеников, а в
нашем только 20!



Скажите, кто прав: Степа или Даша?

① Какую часть от всех учеников составляют отличники?

$$\begin{array}{c} 8 \text{ из } 25 \\ \downarrow \\ \frac{8}{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7 \text{ из } 20 \\ \downarrow \\ \frac{7}{20} \end{array}$$

② В каком классе отличники составляют большую часть?

$$\begin{array}{c} \frac{8}{25} \\ \searrow \\ 4) \frac{8}{25} = \frac{\square}{100} \end{array}$$



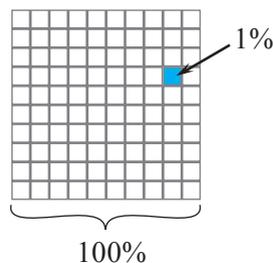
$$\begin{array}{c} \frac{7}{20} \\ \swarrow \\ 5) \frac{7}{20} = \frac{\square}{100} \end{array}$$

Так как $\frac{\square}{100} > \frac{\square}{100}$, то следует, что $\frac{8}{25} > \frac{7}{20}$. Значит, Степа права.

Отношение $\frac{32}{100}$ еще записывают как 32% и читают „32 процента“ (или „32 к ста“).

Возьмите на заметку

Отношение вида $\frac{p}{100}$ еще записывают как $p\%$, читают: „ p процентов“ (или „ p к ста“) и называют **процентным отношением**. Слово „процент“ происходит от латинского слова *pro centum*, означающего „поделить на сотню“. Значит, один процент это „сотая часть“: $1\% = \frac{1}{100}$.



Пример:

Один процент от 10 леев составляют 10 банов.

Любое число процентов можно записать в виде отношения или десятичного числа, и наоборот.

Пример:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$40\% = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$\frac{1}{8} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

$$0,18 = \frac{18}{100} = 18\%$$

Можно проще:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12,5\%,$$
$$0,18 = 0,18 \cdot 100\% = 18\%.$$



Возьмите на заметку

Чтобы выразить отношение (или десятичное число) в процентах, надо его значение умножить на 100%.

2 Сколько процентов составляют 40 см от 2 м?

Решение:

Выразим сначала длины одной единицей измерения: 2 м = см.

$$\frac{40}{\text{input}} \cdot 100\% = \text{input}\%$$

Ответ: 40 см составляют % от 2 м.

Возьмите на заметку

Для того чтобы найти, сколько процентов (p) составляет число n от другого числа m , надо умножить значение отношения $\frac{n}{m}$ на 100%:

$$p = \frac{n}{m} \cdot 100\%.$$

ИЗ ИСТОРИИ

Проценты использовали индусы еще в V веке. И это естественно, так как в Индии уже тогда была известна десятичная система счисления. В Европе десятичные числа, а вместе с ними и проценты, стали использоваться только в XVI веке, благодаря нидерландскому математику Симону Стивену (1548–1620).

Иногда, если необходимы более точные измерения, применяют тысячные доли, вместо процентов. Тысячная доля – это дробь $\frac{1}{1000}$ и обозначается 1‰.

Таким образом, $0,1\% = 1‰$ и читается: „промилле“.

Проценты чаще всего используют в бизнесе, банковских и финансовых операциях и т. д.

Промилле применяют в фармацевтике и в других областях, где нужны более точные расчеты.

Упражнения и задачи



1. Прочитайте: 11 %, 4,8 %, $\frac{5}{100}$, $\frac{9,4}{100}$.

2. Запишите цифрами:

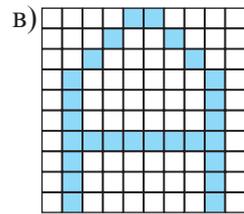
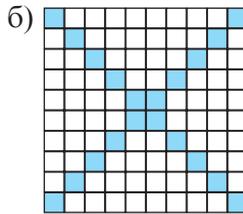
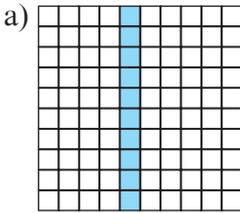
а) пятьдесят к ста;

б) шестьдесят процентов;

в) два, запятая, три к ста;

г) три десятых процента.

3. Сколько процентов от всего рисунка составляет закрашенная часть?



4. Нарисуйте в тетради квадрат со стороной в 10 клеточек. Закрасьте:

а) 25 % квадрата;

б) 6,5 % квадрата;

в) 12 % квадрата;

г) 100 % квадрата.

5. Сколько процентов составляет:

а) половина;

б) четверть;

в) три четверти;

г) одна десятая;

д) половина одной сотой;

е) одна тысячная?

6. а) Мальчики составляют 38 % учащихся класса. Какой процент составляют девочки этого класса?

б) Пчелиный мед содержит 17 % воды. Сколько процентов составляет сухая часть меда?

в) Если 1,11 % детей не любят мороженое, то сколько процентов детей любят эту сладость?

7. Переведите в проценты:

а) $\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{4}$;

в) $\frac{3}{4}$;

г) $\frac{2}{5}$;

д) $\frac{12}{25}$;

е) $\frac{9}{20}$;

ж) $\frac{1}{200}$;

з) $\frac{27}{50}$;

и) $\frac{3}{400}$;

к) $1\frac{3}{4}$;

л) $1\frac{1}{2}$;

м) $\frac{3}{8}$.

Образец:

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

8. Переведите десятичные числа в проценты:

Образец:

$$0,24 = \frac{24}{100} = 24\%;$$

$$2,17 = \frac{217}{100} = 217\%.$$

- а) 0,04; б) 0,5; в) 0,25;
 г) 0,97; д) 1,01; е) 2,23;
 ж) 0,204; з) 6,791; и) 0,(3);
 к) 0,(6); л) 5,123; м) 1.

9. Запишите в виде несократимых дробей проценты:

- а) 75%; б) 40%; в) 24%;
 г) 100%; д) 50%; е) 60%;
 ж) 15%; з) 5%; и) 150%;
 к) $\frac{1}{2}$ %; л) $\frac{1}{4}$ %;
 м) $\frac{3}{4}$ %; н) 220%.

Образец:

$$48\% = \frac{48}{100} = \frac{12}{25};$$

$$\frac{1}{5}\% = 0,2\% = \frac{0,2}{100} = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}.$$

10. Переведите проценты в десятичные числа:

- а) 3%; б) 7%;
 в) 18%; г) 44%;
 д) 0,9%; е) 0,25%;
 ж) 39,4%; з) 62,1%;
 и) 41,59%; к) 56,48%.

Образец:

$$14\% = \frac{14}{100} = 0,14;$$

$$16,5\% = \frac{16,5}{100} = 0,165;$$

$$301,19\% = 3,0119.$$

11. Перечертите и заполните таблицу:

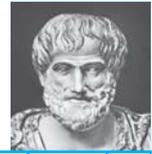
Десятичное число	0,26		0,49			7,82	
Проценты	26%	69%			143%		
Несократимая дробь	$\frac{13}{50}$			$\frac{4}{25}$			$\frac{2}{3}$



12. Сколько процентов составляют:

- а) 22 кг от 100 кг; б) 20 м от 50 м;
 в) 15 мин от часа; г) 75 банов от 2 леев;
 д) 6 мм от 12 м; е) 3 л от 300 л;
 ж) 0,4 кг от 500 г; з) 120 мин от 2 ч;
 и) 6 с от часа?

13. Расшифруйте имя одного из самых известных античных философов.



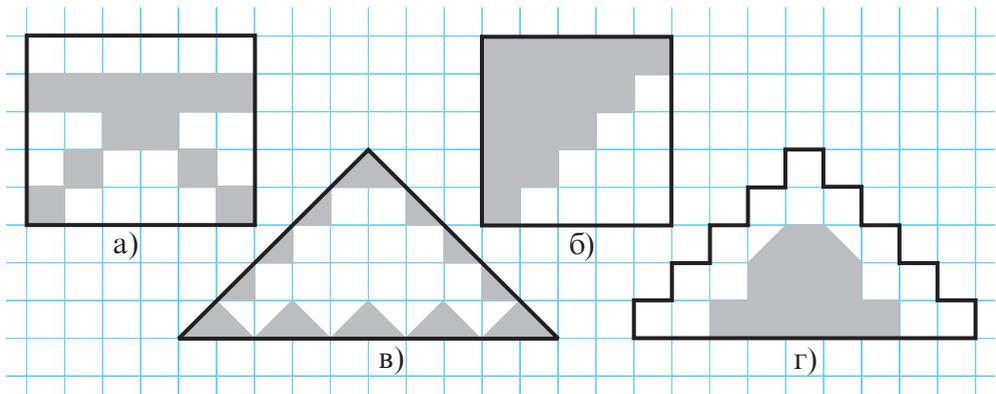
Код



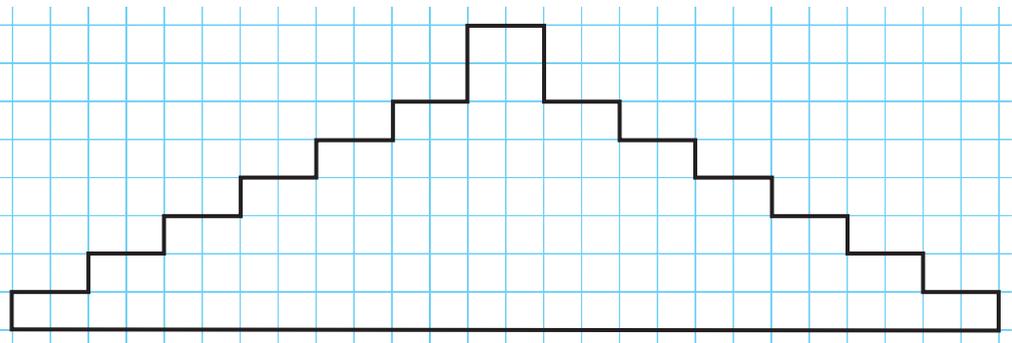
	Л	С	Р	Т	А	О	И	Е	Ь
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	

				С					
	10%	25%	4%	50%	20%	5%	20%	2%	100%

14. Растворяем соль в воде и получаем раствор с концентрацией 6%. Найдите, какое количество соли следует растворить, чтобы получить 400 г раствора.
15. Сколько процентов составляет длина стороны квадрата от его периметра?
16. Сколько процентов от всей площади фигуры закрашено?

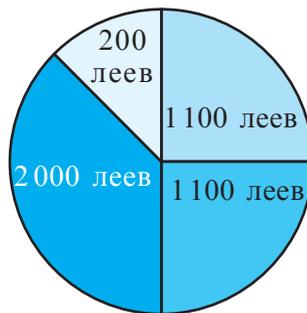


17. Перечертите фигуру и закрасьте 16% ее площади.



18. Расположите в порядке возрастания: а) 0,76; 34%; $\frac{3}{4}$; 74%; 0,36;
 б) 133%; $\frac{4}{3}$; 1,34; $1\frac{1}{4}$; 124%.
19. Цена проезда в маршрутке выросла с 2 до 3 леев. На сколько процентов увеличилась цена проезда?
20. Решите задачи методом сведения к единице.
- а) Телевизор стоит 3 600 леев. Определите стоимость телевизора после ее увеличения на 10%.
- б) До снижения цены альбом стоил 120 леев. Найдите цену альбома после двух последовательных снижений цены на 10% и 5% соответственно.
- в) В типографии напечатали 1 680 бланков, что на 12% больше, чем было запланировано. Сколько бланков запланировали напечатать?
- г) Земельный участок засеяли следующим образом: 30% – пшеница, 56% – кукуруза, 6% – подсолнечник и оставшиеся 12 га – ячмень. Найдите площадь засеянного участка.
- д) В VI классе – 32 ученика. По состоянию здоровья 6 из них пропустили занятия.
- 1) Сколько процентов от всех учеников класса пропустили занятия?
 - 2) А сколько процентов присутствовало на уроках?

21. Месячный доход семьи был израсходован согласно данным диаграммы.
- а) Сколько процентов от общего дохода составляют расходы на коммунальные услуги?



- коммунальные услуги
- продукты питания
- одежда
- другие расходы

- б) Сколько процентов от расходов на продукты питания составляют расходы на коммунальные услуги? А на одежду?
22. На выборах председателя „Детского парламента“ школы 112 учащихся проголосовали за Колю Иванова, 336 учащихся – за Витю Петрова, а остальные 224 учащихся – за Лену Сидорову. Выборы считаются состоявшимися, если за одного кандидата проголосует не меньше 40%.
- а) Определите, состоялись ли выборы.
- б) Представьте полученные результаты в виде круговой диаграммы (см. задание 21).

§6 Решение задач на проценты

1 В шестом классе – 35 учеников, 60% из которых мальчики. Сколько девочек в классе?

Решение:

Узнаем, сколько процентов от общего количества учеников класса составляют девочки:

$$100\% - 60\% = 40\%$$

Применим простое правило трех для нахождения количества девочек:

$$\begin{array}{rcl} 35 \text{ учеников} & \text{—} & 100\% \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \text{ девочек} & \text{—} & 40\% \end{array}$$

Получаем $\frac{35}{x} = \frac{100}{40}$, откуда $x = \frac{40 \cdot 35}{100} = 14$ (девочек).

Ответ: 14 девочек.



2 Запишите отношение и процентное отношение, опреляемые числами 37,5 и 12,5.

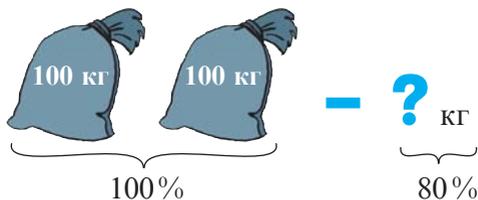
Решение:

Составим отношение данных чисел: $\frac{37,5}{12,5} = \frac{3}{1}$.

Процентное отношение, определяемое этими числами, равно:

$$\frac{37,5}{12,5} : 100 = \frac{37,5}{12,5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{100} = 3\%.$$

3 При производстве муки из пшеницы получают 80% муки, остальное – отруби. Сколько муки получится из 200 кг пшеницы?



Решение:

80% от 200 кг пшеницы составляют $\frac{80}{100} \cdot 200 = \blacksquare$ (кг).

Ответ: \blacksquare кг.

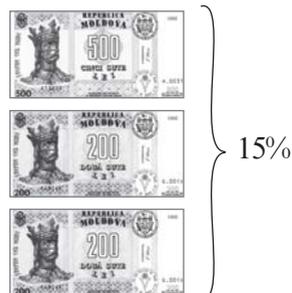
Как найти процент $p\%$ от числа n ?

Нужно найти число $\frac{p}{100} \cdot n$.

4 15% ежемесячного дохода семьи составляют 900 леев. Каков месячный доход семьи?



100%



Решение:

1 способ

Метод приведения к единице:

Если 15% дохода составляют 900 леев, то 1% дохода составляет:

$$900 \text{ леев} : 15 = 60 \text{ леев.}$$

Значит,

$$\text{доход: } 100 \cdot \square \text{ леев} = \square \text{ леев.}$$

Ответ: \square леев.

2 способ

Простое правило трех:

$$\begin{array}{ccc} 15\% & \text{---} & 900 \text{ леев} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 100\% & \text{---} & x \text{ леев} \end{array}$$

$$\frac{15}{100} = \frac{\square}{\square}$$

$$x = \frac{100 \cdot \square}{\square} = \square \text{ (леев).}$$

Как найти число, зная, что число m составляет $p\%$ от искомого числа?

Нужно найти число $\frac{100}{p} \cdot m$.

Упражнения и задачи

1. Вычислите:

- | | | |
|------------------------|---------------------|---------------------|
| а) 1% от 200; | б) 10% от 40; | в) 25% от 80; |
| г) 75% от 64; | д) 50% от 3 леев; | е) 4% от 150 см; |
| ж) 9% от 200 долларов; | з) 120% от 120; | и) 95% от 360; |
| к) 160% от 160; | л) 77% от 500 леев; | м) 140% от 99 леев. |

2. Найдите число, если:

- 25% от него равны 60;
- 50% от него равны 100;
- 75% от него равны 96;
- 90% от него равны 720;
- 15% от него равны 12;
- 175% от него равны 140;
- 4,8% от него равны 6;

Образец:

$$\text{а) } \frac{60}{25} \cdot 100 = 240.$$

Проверка:

$$25\% \text{ от } 240 = \frac{25}{100} \cdot 240 = 60.$$

- 125% от него равны 250;
- 3,6% от него равны 8,1.

3. Выполните вычисления:

- а) увеличьте 200 леев на 50%; б) уменьшите 160 леев на 25%;
в) увеличьте 80 м на 75%; г) уменьшите 120 см на 40%;
д) увеличьте 10000 леев на 3%; е) уменьшите 15000 леев на 8%;
ж) уменьшите 1 м на 0,1%; з) уменьшите 2 л на 0,5%.

4. Сравните:

- а) 70% от 150 см ● 60% от 2 м;
б) 25% от 10 кг ● 40% от 6000 г;
в) 15% от 800 леев ● 24% от 600 леев;
г) 125% от 2 часов ● 10% от одного дня;
д) 6% от 240 л ● 96% от 15000 мл.



5. Вычислите:

- а) 10% от 50%; б) 25% от 40%; в) 50% от 50%; г) 10% от 90%.

6. Впишите соответствующий знак сравнения:

- а) 25% от 50 ● 50% от 25;
б) 15% от 36 ● 36% от 15;
в) 20% от 40 ● 40% от 20;
г) 1% от 101 ● 101% от 1.



7. РАБОТАЕМ В ПАРАХ!  Истинно или Ложно?

- а) Если число увеличить на 20%, затем получившееся число уменьшить на 20%, то в результате получим первоначальное число.
б) Если число сначала увеличить на 20%, затем на 40%, то получим то же число, которое сначала увеличили на 40%, затем на 20%.
в) Если число уменьшить сначала на 30%, затем на 40%, то получим то же число, которое уменьшили сразу на 70%.
г) 150% от 200 равно 200% от 150.



8. В прошлом году рост Миши составил 1 м 40 см. С тех пор он вырос на 5%. Каков его рост сейчас?

9. Из 750 участников концерта 22,4% дети. Сколько детей принимают участие в концерте?

10. Во время выборов в парламент на избирательные участки пришли 1 641 600 избирателей, что составило 60% от числа жителей, имеющих право голоса. Сколько жителей Молдовы имеют право голоса?



11. При замерзании объем воды увеличивается на 9%. На сколько процентов меньше получим воды, если разморозить лед?
12. Цена на мясо увеличилась на 25%. Сколько килограммов мяса можно купить сейчас на ту сумму денег, на которую раньше можно было приобрести 1 кг мяса?
13. После стирки ширина покрывала уменьшилась на 0,5%, а его длина – на 1%. На сколько процентов уменьшилась площадь покрывала?
14. Цена на товар сначала поднялась на 30%, затем еще на 20%. На сколько процентов от первоначальной цены подорожал товар?
15. Из 1 000 учащихся школы одну четверть составляют мальчики. Во вторую смену учатся 300 учащихся, из которых 60% – мальчики. Сколько процентов от всех мальчиков составляют мальчики, обучающиеся во вторую смену?
16. В VI классе учатся 35 учеников, из которых 40% – девочки, а остальные мальчики.
 - а) Не вычисляя, оцените, какое из чисел больше: количество мальчиков в классе или количество девочек.
 - б) Найдите количество мальчиков в классе.
17. Для получения огуречного рассола в 1 500 г воды растворяют 50 г соли. Найдите процентную концентрацию раствора.
18. Стадион вмещает 55 400 зрителей. На футбольном матче стадион был заполнен на 98%. Сколько зрителей смотрели матч?
19. В классе 36 учеников. Зная, что треть учеников девочки, а 50% мальчиков играют в футбол, найдите, сколько мальчиков играют в футбол.
20. **РАБОТАЕМ В ПАРАХ!**  Определите, сколько процентов учеников в вашем классе мальчики, а сколько девочки.
21. В сосуде – раствор воды с медом. Концентрация раствора 10%. Масса меда 60 г. Узнайте, сколько воды в сосуде.
22. Морская вода соленая. В 1 кг морской воды 27 г соли. Найдите процентную концентрацию раствора.
23. Бабушка, делая раствор для солений, положила 11 столовых ложек соли в 10 л воды.
 - а) Найдите процентную концентрацию раствора, если в соловой ложке 18 г соли.
 - б) Распросите маму или бабушку и определите, какую процентную концентрацию рассола они используют для солений.

24. Найдите процентную концентрацию раствора, полученного при растворении 60 г поваренной соли в 300 г воды.
25. Сколько сахара нужно добавить в 175 г раствора с концентрацией 10%, чтобы получить 20%-ный раствор?
26. **РАБОТАЕМ В ГРУППАХ!**  Проект *Проценты в нашей жизни*. Класс делится на группы. Каждая группа приводит примеры приложения процентов: а) в социальной жизни; б) в финансовой сфере; в) в других областях.

27. Зарплата господина Морару повысилась на 225 леев, то есть на 15%. Какая зарплата была у господина Морару до повышения?
28. Цена пылесоса уменьшилась на 210 леев, то есть на 35%. Какой была цена пылесоса до скидки?
29. 70% учащихся класса посещают кружок математики, 85% – танцевальный кружок. Каков минимальный процент учащихся, посещающих оба кружка?
30. Банк принимает деньги на хранение и в конце года обновляет счет соответствующими годовыми процентами. Заполните таблицу:

Владелец счета	Первоначальная сумма (леев)	Годовой процент	Период хранения (год)	Окончательная сумма на счету
Иван Чернов	20 000	10%	2	24 200
Роман Белов	15 000	14%	?	22 223,16
Анна Петрова	200 000	?	4	243 101,25
Влад Сидоров	64 000	8%	2	?
Сергей Борисов	120 000	12%	?	150 528
Артем Смирнов	?	10%	5	644 204

31. а) Если x составляет 40% от y , то сколько процентов составляет y от x ?
 б) Если x составляет 120% от y , то сколько процентов составляет y от x ?
 в) Если x составляет 25% от $\frac{2}{3}y$, то сколько процентов составляет y от x ?
 г) Если $\frac{1}{4}x$ составляет 125% от $\frac{3}{2}y$, то сколько процентов составляет y от x ?
32. Олег и Дима одновременно вышли из одного дома по направлению к школе. Шаг у Олега шире на 20%, а у Димы количество шагов за тот же интервал времени на 20% больше. Кто из них первым придет в школу?

7.1. Элементы теории вероятности

Исследуем и узнаем

Бросают игральную кость. Каковы шансы (вероятность) выпадения грани с:

- а) 8 очками;
- б) 4 очками;
- в) количеством очков меньше 7?

Решение:

Бросание игральной кости – это **эксперимент**. В результате этого эксперимента могут наступить или не наступить события, связанные с этим экспериментом.

- а) Событие „Выпадет грань с 8 очками“ не имеет шансов (вероятности) наступить, так как на каждой грани игральной кости не больше 6 очков. Говорим, что это событие *невозможное*, а шанс (вероятность) наступления равен 0.
- б) Событие „Выпадет грань с 4 очками“ имеет шанс (вероятность) наступить. Говорим, что это событие *возможно* (или *случайно*).
- в) Событие „Выпадет грань с количеством очков меньше 7“ обязательно наступит, поэтому говорим, что это событие *достоверно*, а шанс (вероятность) наступления равен 1.



Возьмите на заметку

В жизни встречаются разные **эксперименты**. Результат эксперимента называется **событием**. События могут быть:

- ◆ достоверными → Шанс (вероятность) наступления равен 1.
- ◆ невозможными → Шанс (вероятность) наступления равен 0.
- ◆ случайными → Шанс (вероятность) наступления равен числу больше 0, но меньше 1.

Решаем и поясняем

В барабане одинаковое количество белых и черных шаров. Из барабана наугад извлекают один шар. Дополните предложения:

- 1) Событие „Извлечен белый шар“ является _____ событием.
- 2) Событие „Извлечен черный шар“ является _____ событием.
- 3) Событие „Извлечен зеленый шар“ является _____ событием.
- 4) Шансы (вероятность) наступления событий 1) и 2) равны _____.

7.2. Среднее арифметическое

Исследуем и узнаем

1 Чтобы составить расписание дня, Даша записывала в течение недели время, необходимое для выполнения домашней работы. Сколько времени в среднем в день тратит Даша на выполнение домашней работы?

Решение:

$$\frac{1,3 + 1,5 + 2 + 1,2 + 1,5}{5} = 1,5 \text{ (часа).}$$

Ответ: 1,5 часа.

Чтобы ответить на вопрос задачи, мы вычислили среднее арифметическое чисел, данных в таблице.

День недели	Время (в часах)
Понедельник	1,3
Вторник	1,5
Среда	2
Четверг	1,2
Пятница	1,5

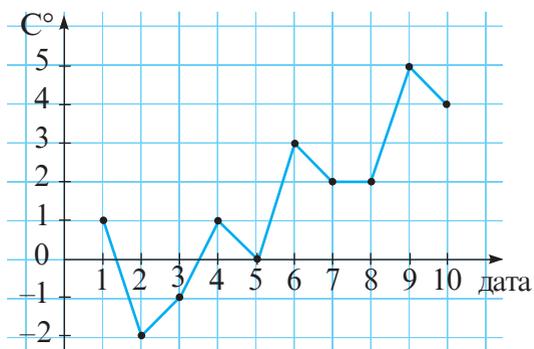
Возьмите на заметку

- ♦ Средним арифметическим двух чисел a и b является число $m_a = \frac{a+b}{2}$.
- ♦ Средним арифметическим рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ называется результат деления суммы этих чисел на число слагаемых:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Применяем

2 Всезнайка изобразил с помощью графика изменение температуры воздуха в муниципии Кишинэу за первые 10 дней марта (см. рисунок). Какой в среднем была температура воздуха за эти 10 дней?



Решение:

$$t_m = \frac{1 + (-2) + (-1) + 1 + 0 + 3 + 2 + 2 + 5 + 4}{10} = \text{■} \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Ответ: ■ °C.

РАБОТАЕМ В ПАРАХ!



- 3 а) Найдите среднее арифметическое a_m чисел 2,7 и $-1,3$.
 б) Отметьте на числовой оси точки $A(2, 7)$; $B(-1, 3)$ и $C(a_m)$.
 в) Где на отрезке AB расположена точка C ? Сделайте вывод.

7.3. Представление данных

Исследуем и узнаем

1 Ученики VI класса получили следующие оценки за решение теста по математике: две „4“, шесть „5“, четыре „6“, четыре „7“, три „8“, две „9“ и четыре „10“. Представьте в виде таблицы данные об оценках за решение теста.

Решение:

Оценка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
К-во оценок	0	0	0	2	6	4	4	3	2	4

В таблице записаны результаты тестирования по математике в VI классе. В этом случае говорят, что выполнен *статистический анализ, сбор и регистрация данных*.

Возьмите на заметку

Математическая статистика – это наука, занимающаяся сбором, регистрацией, обработкой, анализом и интерпретацией данных, относящихся к некоторому явлению (из экономики, социальной жизни, метрологии, сельского хозяйства, биологии и др.).

Статистические данные можно представить с помощью:

- таблиц;
- диаграмм (квадратных, столбчатых, круговых и др.) (рис.1, рис.2);
- графиков (рис. 3).

Решаем и поясняем

• Представьте с помощью столбчатого графика результаты решения теста по математике из задачи 1.

• Найдите среднее арифметическое полученных отметок.

Решение:

• Графическое представление дано на рисунке 1. Проанализируйте этот рисунок.

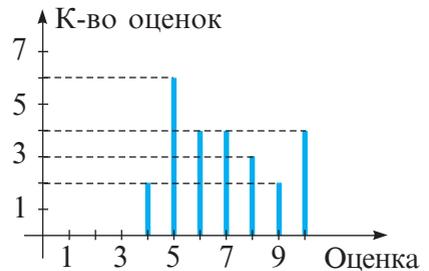


Рис. 1

$$\bullet \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 4}{25} = \frac{162}{25} = 6,48.$$

2 В школьной библиотеке 50% книг на русском языке, 25% на румынском, 10% на английском и 15% книг на французском языке.

Представьте эти данные с помощью круговой диаграммы.

Решение:

Графическое представление дано на рисунке 2.

Проанализируйте этот рисунок.

На графике, изображенном на рисунке 3, представлено помесячное количество сока, изготовленного на заводе за первое полугодие 2020 года.

Проанализируйте этот график. Прокомментируйте создавшуюся ситуацию на заводе в первом полугодии. Какие рекомендации вы можете дать администрации завода?



Рис. 2



Рис. 3

Упражнения и задачи



- Приведите по два примера экспериментов и событий, связанных с этими экспериментами (достоверных, невозможных, случайных).
- Провели эксперимент „Бросание баскетбольного мяча в корзину“.
 - Сформулируйте события, связанные с этим экспериментом.
 - Являются ли эти события достоверными? Невозможными? Случайными?
 - Каковы шансы наступления сформулированных событий.
- В коробке 12 красных и 12 синих карандашей. Наугад взяли один карандаш из коробки.
 - Сформулируйте события, связанные с этим экспериментом.
 - Определите шансы наступления каждого события.
 Сделайте выводы.
- Приведите примеры экспериментов и определите возможные события, связанные с этими экспериментами.
- В коробке с леденцами красного, желтого и зеленого цвета половина конфет красного цвета, четверть – желтого цвета, а остальные – зеленого. Наугад извлекается одна конфета.
 - Какой из этих цветов более вероятен при извлечении одного леденца?
 - У конфет какого цвета одинаковые шансы быть извлеченными?

6. Соберите статистические данные относительно роста учащихся вашего класса. Представьте полученные данные:
- в виде таблицы;
 - в виде столбчатого графика.
7. На рисунке 4 представлены в виде столбчатой диаграммы продажи учебников в книжном магазине за неделю.
- Сколько всего было продано учебников?
 - Найдите процент проданных учебников за каждый день.
 - В какие дни было продано больше всего учебников?
8. В таблице представлено количество пациентов поликлиники за один день.

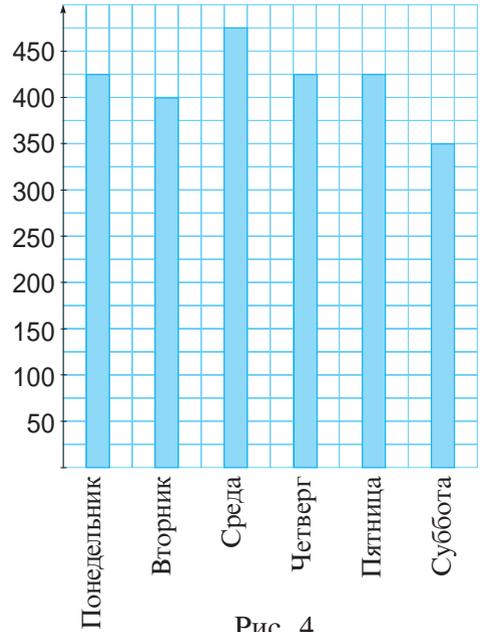


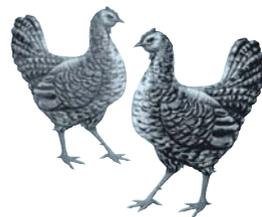
Рис. 4

- Представьте в виде столбчатой диаграммы эти статистические данные.
- Вычислите процент пациентов за каждый период времени.
- В какой период времени поликлинику посетила большая часть пациентов: до обеда (до 13 часов) или после него? На сколько процентов больше?

Период времени	К-во пациентов
с 9 до 10	88
с 10 до 11	102
с 11 до 12	185
с 12 до 13	80
с 13 до 14	110
с 14 до 15	164
с 15 до 16	76
с 16 до 17	58

9. Монету бросают 20 раз.
- Определите события, связанные с выпадением орла или решки при бросании монеты.
 - Каковы шансы наступления данных событий?
 - Повторите этот эксперимент еще 20 раз. Сделайте вывод.
10. Бросают игральную кость.
- Сформулируйте хотя бы 6 случайных событий этого эксперимента.
 - Сформулируйте хотя бы 3 достоверных события этого эксперимента.
 - Сформулируйте хотя бы 2 невозможных события этого эксперимента.

11. Из 24 сыгранных матчей футбольным клубом „Удача“ 11 матчей выиграно и 8 ничьих. Из 24 сыгранных матчей футбольным клубом „Успех“ 14 матчей выиграно и 5 ничьих. За каждую победу команда получает 3 очка, а за ничью – 1 очко. Осталось сыграть 5 матчей. Какой из двух футбольных клубов имеет больше шансов занять первое место в чемпионате?
12. Имеют ли равные шансы наступления следующие события, связанные с экспериментом „Бросание игральной кости“:
- а) „выпадут 8 очков“ и „выпадут 12 очков“;
 - б) „выпадет 2 очка“ и „выпадет 6 очков“;
 - в) „выпадет четное число очков“ и „выпадет нечетное число очков“?
13. Найдите среднее арифметическое числа:
- а) 10,3 и 9,8;
 - б) $1\frac{1}{7}$ и $2\frac{3}{7}$;
 - в) 3,8; 3,9; 4,3.
14. Вычислите среднее арифметическое ваших оценок за I семестр учебного года. Округлите результат до десятых.
15. В школьной секции по волейболу двум игрокам по 11 лет, трем – по 12 лет и одному игроку 14 лет. Какой средний возраст игроков волейбольной секции?



16. Масса четырех цыплят равна 5,5 кг, а шести – 7,4 кг. Найдите средний вес одного цыпленка.
17. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Во время матча один из игроков был удален с поля. После этого средний возраст оставшихся игроков снизился до 21 года. Сколько лет выбывшему игроку?
18. В коттеджном поселке 350 домов: 210 из них – одноэтажные дома, 120 – двухэтажные дома и 20 – трехэтажные.
- а) Представьте эти данные в виде таблицы.
 - б) Представьте эти данные с помощью столбчатой диаграммы.
19. **Практическая работа.** Определите количество разноуровневых домов вашего квартала/села и представьте полученные данные с помощью столбчатой диаграммы.
20. **Практическая работа.** Представьте в виде круговой диаграммы в процентах наличие сегодня в вашем рюкзаке учебников и тетрадей.

21. На диаграммах, изображенных на рисунке 5, допущены ошибки. Найдите их и постройте правильные диаграммы.

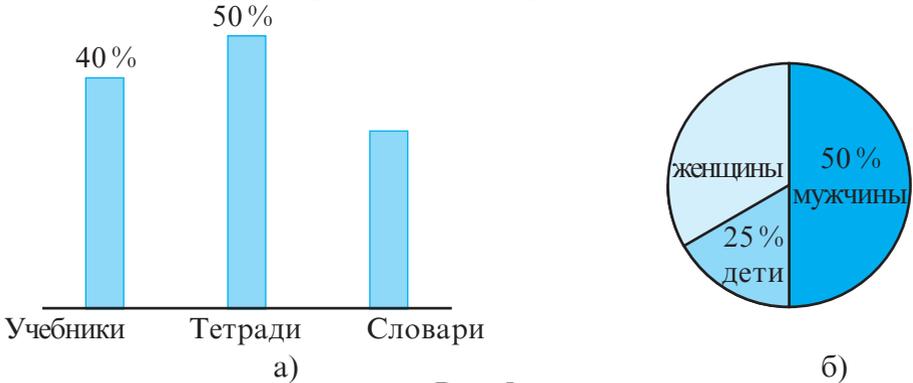


Рис. 5

22. Представьте в виде столбчатой диаграммы следующие данные:
- расстояние от Солнца до планеты Меркурий ≈ 58 миллионов км;
 - расстояние от Солнца до планеты Венера ≈ 108 миллионов км;
 - расстояние от Солнца до планеты Земля ≈ 150 миллионов км;
 - расстояние от Солнца до планеты Марс ≈ 228 миллионов км.
- (Возьмите за 1 см 10 миллионов км.)

23. а) Представьте в виде столбчатой диаграммы следующие данные:
- длина реки Днестр 1 400 км;
 - длина реки Днепр 2 200 км;
 - длина реки Дон 1 900 км;
 - длина реки Волга 3 500 км.

б) Определите, по территории каких стран протекает каждая река.

в) Найдите, округлив до десятых, во сколько раз Днестр короче Днепра.

г) Определите, округлив до десятых, во сколько раз Волга длиннее Днепра.

24. Семь гномов сидят вокруг костра. Известно, что рост каждого гнома равен среднему арифметическому ростов двух гномов, сидящих рядом. Докажите, что все гномы одного роста.



25. В баскетбольной команде 5 человек. Их средний рост 2,04 м. После того как одного члена команды заменили новым игроком, средний рост игроков команды вырос до 2,08 м. Какой рост у нового игрока, если рост выбывшего равен среднему арифметическому ростов игроков команды?

26. В Стране Лилипутов Гулливер выше лилипута в 12 раз, а в Стране Великанов Гулливер ниже великана в 12 раз. Можно ли утверждать, что рост Гулливера равен среднему арифметическому росту лилипута и великана?



27. Представьте следующие данные в виде круговой диаграммы, а затем в виде столбчатой:
- В селе 120 домов, из которых 25 – покрыты шифером, 35 – черепицей, а у 60 домов крыши дощатые.
 - В коробке с цветными карандашами 12 красных, 8 синих, 5 черных и 15 желтых карандашей.
28. В урне 50 шаров, пронумерованных числами $1, 2, 3, \dots, 50$. Выбирают наугад один шар. Какое из событий имеет больше шансов наступить:
- „Выбрали шар с числом, которое при делении на 5 дает в остатке 1“;
 - „Выбрали шар с числом, которое является точным квадратом“.
29. Приведите три примера экспериментов, события которых имеют равные шансы произойти.
30. Представьте в виде столбчатой диаграммы количество учащихся во всех классах вашей школы.
31. Проведите какое-либо исследование с одноклассниками и представьте полученные данные наиболее удобным способом.



ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

32. Среднее арифметическое четырех чисел – 34. Найдите эти числа, если известно, что они прямо пропорциональны четырем простым натуральным числам.



Задания для осмысления

1. Что называют отношением двух чисел?
2. Приведите примеры отношений из повседневной жизни.
3. Спросите у родителей и укажите, чему равно отношение количества сахара к фруктам, использованным для приготовления варенья, компота.
4. Чем отличается отношение от дроби?
5. Сформулируйте примеры отношений из физики, экономики, геометрии, кулинарии.
6. Что представляет собой пропорция?
7. В каком случае из четырех ненулевых чисел можно получить верную пропорцию?
8. Приведите свои примеры пропорций из разных областей знания и жизни.
9. Какие величины называются прямо пропорциональными?
10. Приведите примеры прямо пропорциональных величин из разных областей знания и жизни.
11. Дополните предложения:
 - а) „Зарплата родителей прямо пропорциональна...“
 - б) „Расстояние, пройденное автомобилем, прямо пропорционально ... и ...“.
12. Составьте задачу, которую можно решить, используя *Простое правило трех*.
13. Какие величины называются обратно пропорциональными?
14. Приведите примеры обратно пропорциональных величин из разных областей знания и жизни.
15. Что такое 1 %?
16. Верно ли, что $\frac{3}{4} = 75\%$? Обоснуйте ответ.
17. „Газ в Республике Молдова подорожал на 12%“. Объясните смысл этого высказывания.
18. Какие типы задач на проценты вы знаете?
19. Как найти процент $p\%$ от числа n ?
20. Как найти число, зная, что число m составляет $p\%$ от искомого числа?
21. Как найти процентное отношение?
22. Составьте задачу по каждому типу задач на проценты.
23. Приведите примеры применения процентов в разных областях знания.
24. Для чего нужны проценты? Обоснуйте.
25. Приведите примеры событий: достоверных, невозможных, возможных.
26. Как вычисляется среднее арифметическое?
27. Как можно представить статистические данные?

Упражнения и задачи на повторение



1. Вычислите значение отношения:

а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{7}{2}$; в) $\frac{0,504}{1,4}$; г) $\frac{4,35}{2,9}$.

2. Запишите три отношения, равные отношению:

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{9}{4}$; в) $\frac{1,2}{0,4}$; г) $\frac{0,1}{11,1}$.

3. Сравните числа a и b , если:

а) $\frac{a}{b} = 0,93$; б) $\frac{a}{b} = \frac{2,015}{2,104}$; в) $a = 1,6b$;
г) $b = 0,99a$; д) $\frac{b}{a} > 1$; е) $\frac{a}{b} < 1$.

4. Найдите значение отношения между:

- а) количеством дней в январе и в августе;
- б) количеством дней недели и дней весенних месяцев;
- в) своим ростом и ростом соседа по парте;
- г) количеством страниц в учебниках по математике и физике.

5. Сравните с помощью отношения:

- а) возраст родителей;
- б) свой вес и вес соседа по парте;
- в) измерения учебника по математике;
- г) валютный курс доллара и евро.

6. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\frac{5}{6} = \frac{20}{\square} = \frac{\square}{36} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{9}$; б) $\frac{\square}{0,5} = \frac{7}{\square} = \frac{\square}{2} = \frac{8,4}{\square} = \frac{\square}{9,6} = \frac{49}{7}$;
в) $\frac{9}{\square} = \frac{3}{\square} = \frac{12}{16} = \frac{\square}{22}$; г) $\frac{1}{\square} = \frac{2}{\square} = \frac{3}{\square} = \frac{4}{6}$.

7. Сравните цены.

- а) 3 кг пшеничной муки стоят 63 лев, а 2 кг кукурузной муки – 28 лев.
- б) 1,5 л томатного сока стоят 25,6 лев, а 2 л яблочного сока – 30,4 лев.
- в) 0,8 м² керамической плитки стоят 130 лев, а 1,2 м² паркета – 150 лев.
- г) 5 м железной трубы стоят 140 лев, а 3 м оцинкованной трубы – 100 лев.

8. Восстановите пропорцию:

а) $\frac{8}{9} = \frac{\square}{18}$; б) $\frac{\square}{6} = \frac{5}{4}$; в) $\frac{2,4}{\square} = \frac{4}{1,6}$; г) $\frac{10}{0,4} = \frac{2}{\square}$.

9. Определите, являются ли данные числа членами пропорции:

а) $\boxed{18} \quad \boxed{4} \quad \boxed{2} \quad \boxed{9}$;

б) $\boxed{1} \quad \boxed{7} \quad \boxed{3} \quad \boxed{21}$;

в) $\boxed{8} \quad \boxed{\frac{2}{9}} \quad \boxed{\frac{1}{3}} \quad \boxed{7}$;

г) $\boxed{12} \quad \boxed{5} \quad \boxed{6} \quad \boxed{10}$.

10. Из 25 л молока получают 3 л сметаны.

а) Сколько сметаны получится из 75 л молока? А из 180 л? А из 500 мл?

б) Сколько молока потребуется, чтобы получить 4,5 л сметаны?

А 600 мл? А 500 мл?



11. Фермер вскопал землю вокруг 5 деревьев за 30 минут. Если он будет продолжать работать в том же темпе, за какое время он вскопает землю вокруг 150 деревьев?

12. В таблице представлены данные о скорости и времени прохождения одного и того же расстояния разными видами транспорта.

Перечертите и заполните таблицу:

Скорость (км/ч)	40			90	120	50	10			200
Время (ч)	3	2	4					6	8	

13. Девочки составляют 55% всех учеников школы. Чему равно отношение числа мальчиков к числу девочек?

14. Запишите в процентном отношении:

а) $\frac{1}{4}$;

б) $\frac{7}{25}$;

в) $\frac{9}{10}$;

г) $\frac{15}{2}$;

д) 0,91;

е) 2,14;

ж) $1\frac{1}{4}$;

з) $2\frac{5}{8}$.

15. Сколько процентов составляют:

а) 5 от 12;

б) $\frac{4}{9}$ от $\frac{2}{3}$;

в) 25 от 40;

г) $1\frac{1}{3}$ от $2\frac{1}{9}$?

16. а) Уменьшите сумму в 180 леев на 15%.

б) Уменьшите сумму в 240 леев на 20%.

в) Увеличьте сумму в 2100 леев на 25%.

г) Увеличьте сумму в 1480 леев на 30%.

17. Из 2500 семян взойшли 2175. Найдите процент всхожести семян.

18. Провели эксперимент: „Выбрали наугад одну цифру“. Приведите два примера событий: а) достоверных; б) невозможных.
19. В коробке 16 зеленых и 14 синих карандашей. Какое из событий имеет больше шансов наступить:
A: „Извлекли наугад зеленый карандаш“ или *B*: „Извлекли наугад синий карандаш“?



20. Телевизор потребляет 180 W (читаем „ватт“) электроэнергии за 3 часа. Сколько электроэнергии будет израсходовано работающим телевизором за 5 часов? А за 8 часов?
21. Фотографию размером 5 см на 6 см пропорционально увеличили таким образом, что ее длина стала 108 мм. Какова теперь ширина фотографии?
22. В таблице указаны тарифы телефонных переговоров для двух пакетов.

Пакет	Включенные минуты	Абонемент (леев)	Тариф за дополнительные минуты (банов)
Стандарт	300	24	9,6
Эконом	200	6	24



Господин Копейкин за месяц в среднем расходует 200 мин телефонного времени, а его квартирант Иван – 250 мин в среднем.

- а) Какой пакет более удобен для них?
 б) Какую сумму денег должен заплатить каждый из них за телефон? (Рассмотрите оба случая.)
23. Увидев персидский ковер размером 3 м на 4 м и стоимостью 4080 леев и индийский ковер размером 2,5 м на 4,5 м стоимостью 3825 леев, господин Копейкин сделал вывод, что персидский ковер дороже индийского (хотя их периметры одинаковы!). Прав ли господин Копейкин?
24. Известно, что $\frac{x}{y} = 3,4$ и $\frac{z}{y} = 17$. Найдите $\frac{z}{x}$.
25. Отношение двух натуральных чисел $-\frac{2}{3}$, а их разность -3 . Найдите эти числа.



26. Произведение двух натуральных чисел – 96, а значение их отношения – 1,5. Найдите эти числа.
27. Значение отношения двух чисел – 5,92, а их сумма – 17,3. Найдите эти числа.
28. Величины x и y прямо пропорциональны. Зная, что если $x = 8$, то $y = 3$, найдите:
- а) значение y , если $x = 12$; б) значение y , если $x = 2$;
 в) значение x , если $y = 30$; г) значение x , если $y = 0,9$.
29. Величины u и v обратно пропорциональны. Зная, что если $u = 12$, то $v = 20$, найдите:
- а) значение v , если $u = 5$; б) значение v , если $u = 8$;
 в) значение u , если $v = 60$; г) значение u , если $v = 3$.
30. Зарплата рабочего составляла 1 600 леев. Сейчас он получает 2 320 леев. На сколько процентов выросла зарплата рабочего?
31. Зарплата учителя составляла 3 600 леев. Ее повысили на 35%. Какова теперь зарплата учителя?
32. Определите, сколько пищевой соды растворили в 50 г воды 25%-ного раствора.
33. Сколько получается 15%-ного раствора, если в воде растворить 30 г сахара?
34. Для перевозки урожая подсолнечника фермер арендовал три машины. За первую он заплатил 1 000 леев, за вторую 1 200 леев, а за третью 2 000 леев. Какова средняя цена перевозки за одну машину?
35. Среднее арифметическое трех последовательных натуральных чисел равно 27. Найдите эти числа.
36. Какова средняя оценка Паулы по математике, если она получила следующие отметки: 7, 9, 8, 9, 7.
37. Измеряя температуру воздуха в 10:00 часов в течение 7 дней подряд, Ваня заполнил таблицу:

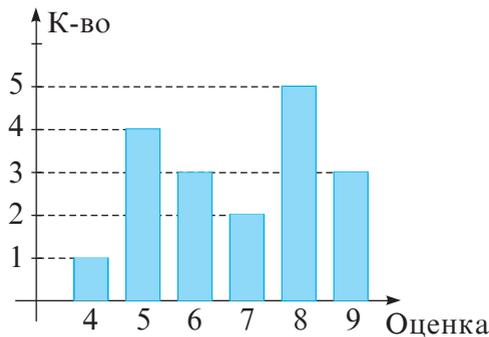
День	П	В	Ср	С	Пт	С	Вс
$t^{\circ}\text{C}$	20	21	22	18	19	23	24



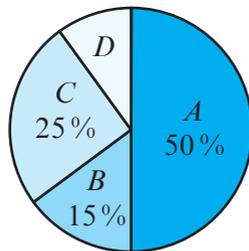
Узнайте, какая была средняя температура в 10:00 часов на той неделе.

38. Оценки, полученные шестиклассниками за тест, представлены на диаграмме.

- а) Найдите среднее значение оценок, полученных за тест.
 б) Определите процент успеха (округлите до десятых).
 в) Найдите процент качества знаний (округлите до десятых).



39. Сумма 1 200 000 леев распределяется между лицами A , B , C и D как показано на диаграмме. Определите, сколько леев получает каждый человек.



40. **Практическая работа.** Посетите школьную библиотеку и определите количество книг, изданных на разных языках. Изобразите полученные данные с помощью:

- а) таблицы;
 б) круговой диаграммы;
 в) столбчатой диаграммы.

41. Приведите примеры использования элементов представления данных в профессиональной деятельности родителей.

42. Миша потратил 20% всей суммы своих денег. На сколько процентов он должен увеличить оставшуюся сумму денег, чтобы получить первоначальную сумму?

43. Одно число составляет 80% от другого числа. Сколько процентов составляет второе число от: а) первого; б) их суммы?

44. Зная, что $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 5$, найдите: а) $\frac{x+y+z}{a+b+c}$; б) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$.

45. Дана пропорция: $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$. Найдите:

- а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x}{x+y}$; в) $\frac{x+2}{y+9}$; г) $\frac{3x+4y}{4y}$.

46. Дана пропорция $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$. Найдите каждое из отношений пропорции, если $a+b=27$.



ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

1. В соревновании участвуют 80 спортсменов, из которых $\frac{3}{5}$ – девушки.

а) *Истинно* или *Ложно*?

„ $\frac{3}{5}$ – рациональное число.”

б) Определите, какой процент от всех спортсменов составляют девушки.

в) Вычислите значение отношения между количеством юношей и количеством девушек, участвующих в одном из забегов, если в этом забеге участвовало на 12 девушек меньше, чем общее количество девушек.

2. Даны числа: 6; 0,4 и 1,6. Впишите пропущенное число:

$$\frac{6}{0,4} = \frac{\square}{1,6}$$

Обоснуйте ответ!

3. Масштаб карты равен 1:5000000. Найдите расстояние от города Бричаны до муниципия Кишинев, если на карте оно равно 4,8 см.

4. В V классе 30 учащихся, в VI – 28 учащихся, в VII – 32 учащихся, в VIII – 30 учащихся, а в IX классе – 36 учащихся.

а) Представьте статистические данные в виде таблицы.

б) Представьте те же данные в виде столбчатой диаграммы.

в) Найдите среднее количество учащихся в одном классе.

II вариант

1. В олимпиаде участвуют 60 учащихся, из которых $\frac{3}{4}$ – юноши.

а) *Истинно* или *Ложно*?

„60 – целое число.”

б) Определите, какой процент от всех участников составляют юноши.

в) Вычислите значение отношения между количеством юношей и количеством девушек, участвующих на одном из этапов олимпиады, если на этом этапе участвовало на 8 юношей меньше, чем общее количество юношей.

2. Даны числа: 8; 0,5 и 2,5. Впишите пропущенное число:

$$\frac{8}{\square} = \frac{0,5}{2,5}$$

Обоснуйте ответ!

3. Масштаб карты равен 1:4000000. Найдите расстояние от муниципия Кишинев до города Кагул, если на карте оно равно 4,3 см.

4. В V классе 18 учащихся, в VI – 24 учащихся, в VII – 30 учащихся, в VIII – 18 учащихся, а в IX классе – 28 учащихся.

а) Представьте статистические данные в виде таблицы.

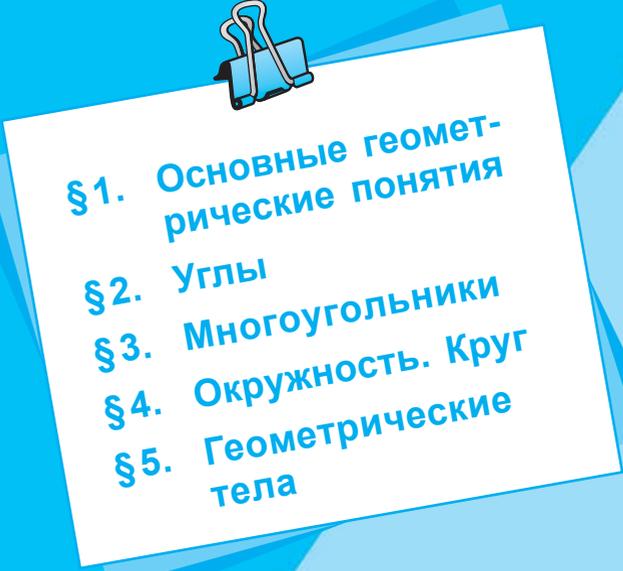
б) Представьте те же данные в виде столбчатой диаграммы.

в) Найдите среднее количество учащихся в одном классе.

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

- 
- §1. Основные геометрические понятия
 - §2. Углы
 - §3. Многоугольники
 - §4. Окружность. Круг
 - §5. Геометрические тела

1

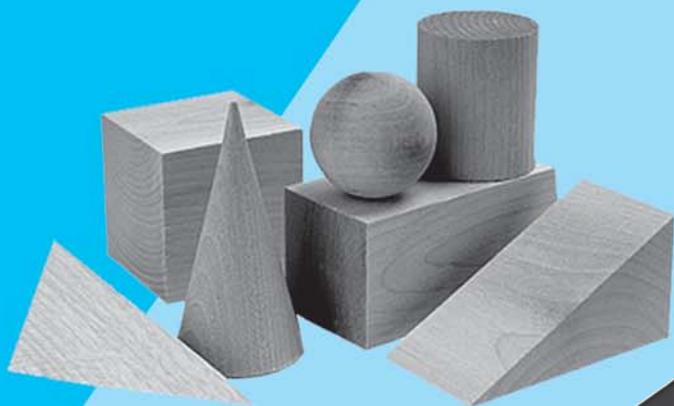
2

3

4



5



§1 Основные геометрические понятия

1.1. Геометрические понятия

Что знаем? Что узнаем?

1 Рассмотрите рисунки и обратите внимание на ассоциации, проведенные Всезнайкой.



- Линия горизонта → **прямая**
- Населенные пункты на карте → **точки**
- Луч света → **полупрямая**
- Траектория полета Кишинев–Бухарест → **отрезок**
- Рельсы → **параллельные прямые**

- Объясните понятие *геометрическая фигура*.
- Какая геометрическая фигура является самой простой?



Вспомним

- ♦ **Геометрическая фигура** – это множество точек.
- ♦ **Точка** – самая простая геометрическая фигура.

Изображаем:

A • или B ×

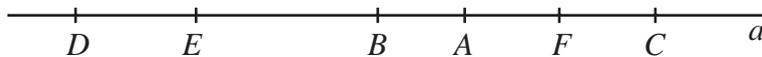
- ♦ **Прямая** не имеет ограничений.

Изображаем:

$\underline{\hspace{2cm} a \hspace{2cm}}$ или $\underline{\hspace{1cm} A \hspace{1cm} B \hspace{1cm}}$ или $\underline{\hspace{1cm} M \hspace{1cm} N \hspace{1cm}}$

- Три и более точки, лежащие на одной прямой, называются **коллинеарными**.
- Две непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, называются **параллельными прямыми**.
- Две прямые называются **пересекающимися прямыми**, если у них есть одна общая точка.

2 Рассмотрите рисунок и заполните пропуски:



- а) Точка A расположена *между* точками и .
- б) Точки A и C расположены *по разные стороны* от точки .
- в) Точки A, B, E, D расположены *по одну сторону* от точки .
- г) Точки расположены по одну сторону от точки B .
- д) Часть прямой a , ограниченная точкой B и состоящая из всех точек прямой a , расположенных по одну сторону с точкой A , называется .



Возьмите на заметку

- ♦ **Полупрямая** – это часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от некоторой точки, которая называется **началом** этой полупрямой.

Изображаем: $M \text{-----} N$ Читаем: Полупрямая MN Обозначаем: $[MN]$

- ♦ Точка O , принадлежащая прямой, делит эту прямую на две **противоположные полупрямые**. Данная точка является **началом** этих полупрямых.

Изображаем: $A \text{-----} O \text{-----} B$ Читаем: Полупрямые $[OA]$ и $[OB]$ противоположны

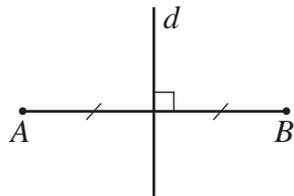
- ♦ **Отрезком** называется часть прямой, заключенная между двумя точками. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**.

Изображаем: $A \text{-----} B$ Читаем: Отрезок AB Обозначаем: $[AB]$

Отрезки одинаковой длины называются **конгруэнтными отрезками**.

Срединный перпендикуляр отрезка это прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину.

На рисунке прямая d – срединный перпендикуляр отрезка AB .



Исследуем

Воспроизведите рисунок выше. Отметьте на прямой d две точки M и N . Сравните: а) AM и BM ; б) AN и BN .

Сделайте вывод.

3 С какой геометрической фигурой ассоциируется поверхность воды озера в безветренный день?

Поясняем

Поверхность воды озера (без волн) похожа на часть плоскости.

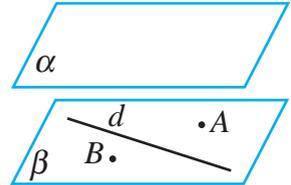
Возьмите на заметку

Плоскость не имеет ограничений.

Если прямая лежит в плоскости, то она разбивает эту плоскость на две части, называемые **полуплоскостями**.

На рисунке точки A и B принадлежат разным полуплоскостям, определяемым прямой d .

Изображаем плоскость α (альфа):



4 Истинно или Ложно?

Одно из высказываний ложно. Найдите его и объясните свой выбор с помощью рисунка.

- а) Через одну точку можно провести бесконечное множество прямых.
- б) Через две различные точки можно провести только одну прямую.
- в) Конгруэнтные отрезки имеют равные длины.
- г) Если каждая из прямых a и b параллельна прямой c , то прямые a и b параллельны.
- д) Если каждая из прямых a и b пересекает прямую c , то прямые a и b тоже пересекаются.



1.2. Обозначения и изображения

Исследуем и узнаем

1 Обратите внимание, как читаются обозначения.

Обозначаем:	Читаем:	Изображаем:
$A \in d$	Точка A принадлежит прямой d .	
$A \notin d$	Точка A не принадлежит прямой d .	
$\{A, B, C\} \subset d$	Точки A, B, C принадлежат прямой d .	
$A \in \alpha$	Точка A принадлежит плоскости α .	
$a \subset \alpha$	Прямая a принадлежит плоскости α .	
$[BC$	Полупрямая BC с началом в точке B .	
$a \parallel b$	Прямые a и b параллельны.	

Обозначаем:	Читаем:	Изображаем:
$a \nparallel b$	Прямые a и b не параллельны .	
$a \cap b = \{M\}$	Прямые a и b пересекаются в точке M .	
$a \perp b$	Прямые a и b перпендикулярны .	
$[AB] \equiv [CD]$	Отрезки AB и CD конгруэнтны .	
$AB > CD$	Длина отрезка AB больше длины отрезка CD .	
$A = B$	Точки A и B совпадают .	$A \bullet B$

Применяем и объясняем

2 Прочтите, затем изобразите рисунком:

- а) $[MN] \cap [KP] = \{E\}$; б) $AB \parallel d$; в) $C \notin AB$.

3 Задача для чемпионов

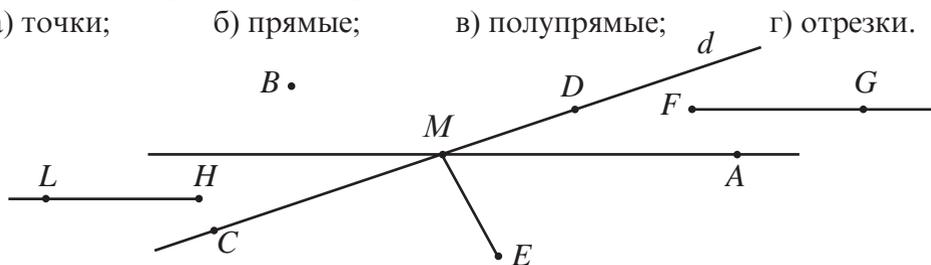


Как при помощи математических символов можно записать высказывание: „Точки M , N и K коллинеарны“?

Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и определите:

- а) точки; б) прямые; в) полупрямые; г) отрезки.



2. Рассмотрите рисунок задания 1 и заполните пропуски:

- а) Прямую d можно обозначить и как .
 б) Полупрямые и противоположны.
 в) Точки коллинеарны.
 г) Точка принадлежит прямой , а точки не принадлежат этой прямой.
 д) Прямые и пересекаются в точке .

3. Постройте и обозначьте:

- а) прямую и точку, принадлежащую ей;
- б) отрезок и точку, не принадлежащую ему;
- в) полупрямую и параллельный ей отрезок;
- г) пять точек, каждые три из которых неколлинеарные.

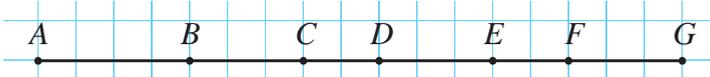
4. Обозначьте множество всех точек прямой:

- а) расположенных между точками A и B этой прямой;
- б) расположенных по ту сторону от точки A (этой прямой), что и точка B (этой прямой).

5. Прочтите: а) $M \in [AB]$; б) $N \notin [EF]$; в) $d \cap [MN] = \{K\}$;
г) $b \parallel BC$; д) $AB \perp l$; е) $M \notin \alpha$; ж) $b \subset \beta$.

6. Рассмотрите рисунок и выберите отрезки, длина которых:

- а) не больше 6 см;
- б) не меньше 3 см;
- в) от 3 см до 6 см;
- г) не больше $4\frac{1}{2}$ см.



7. Рассмотрите рисунок задания 6 и определите:

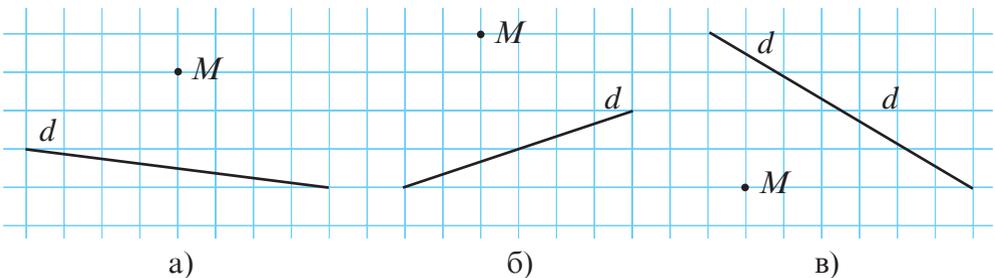
- а) $[AC] \cap [BD]$; б) $[BC] \cup [CE]$; в) $[AD] \setminus [BE]$;
- г) $[BC \cap [FE]$; д) $[AB \cup [DC]$; е) $[BF] \cap [CB]$.

8. Точки A , B и C коллинеарны и расположены в данном порядке. Найдите длину отрезка:

- а) AB , если $AC = 20$ см, $BC = 0,12$ дм;
- б) AC , если $AB = 9$ см, $BC = 1,5$ дм;
- в) BC , если $AB = 1,4$ см, $AC = 4,1$ дм;
- г) AC , если $AB = 2BC = 10,8$ см.



9. Перечертите рисунок. Используя линейку и угольник, проведите через точку M одну прямую, параллельную прямой d , а другую – перпендикулярную прямой d .



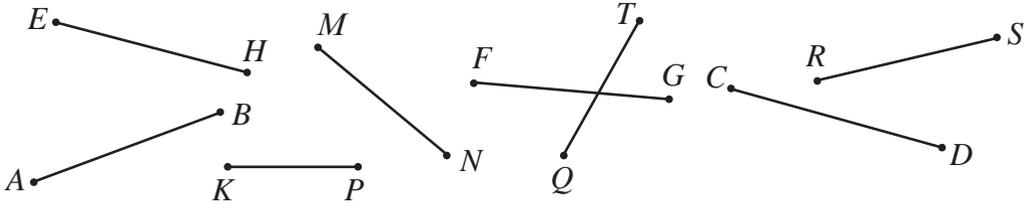
10. Сравните длины отрезков при помощи циркуля:

а) AB и CD ;

б) MN и KP ;

в) FG и EH ;

г) RS и TQ .



11. Сколькими способами можно обозначить прямую, изображенную на рисунке?



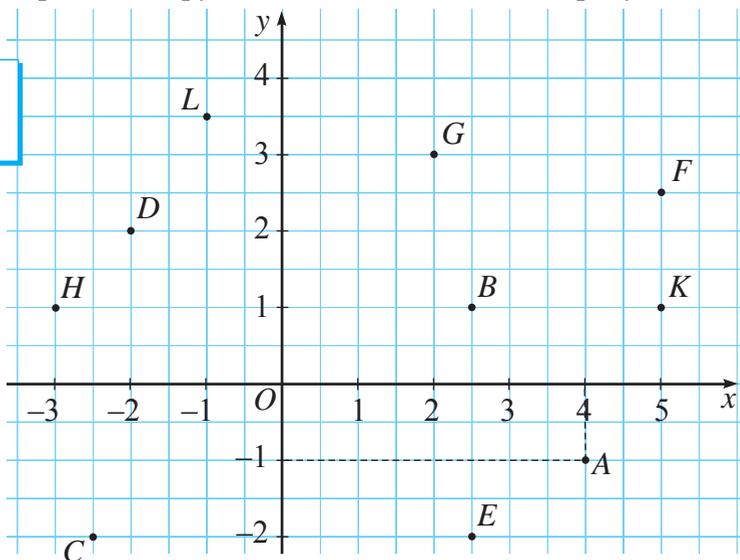
12. Точки A , B и C коллинеарны и расположены в данном порядке. Вычислите расстояние между серединами отрезков AB и BC , если $AB = 24$ см и $BC = 16$ см.

13. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой. Найдите BC , если $AB = 16$ см, а расстояние между серединами данных отрезков 14 см.

14. Точки A , B и C неколлинеарны. Через каждые две из них провели прямую. На сколько частей делят плоскость проведенные прямые?

15*. Числовые оси Ox и Oy перпендикулярны (см. рисунок). Обозначение $A(4; -1)$ читается как: „Точка A имеет координаты 4 и -1 ”. Это означает, что прямая, параллельная Oy и проходящая через точку A , пересекает ось Ox в точке деления 4, а прямая, параллельная Ox и проходящая через точку A , пересекает ось Oy в точке деления -1 . Аналогично определите координаты других точек, отмеченных на рисунке.

Образец:
 $B(2,5; 1)$.



2.1. Классификация углов

Что знаем? Что узнаем?

1 Прочитайте загадку Многознайки и отгадайте, о какой геометрической фигуре идет речь.

*У человека два плеча,
А в сутках – день и ночь.
Как назвали два луча
С началом в общей точке?*



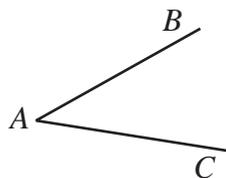
• Как называется инструмент в руках у Многознайки и что можно с его помощью построить?



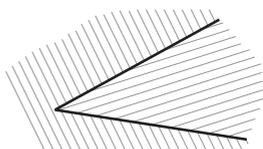
Вспомним

♦ **Углом** называется геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми (**стороны угла**) с общим началом (**вершина угла**).

Угол, образованный полупрямыми $[AB$ и $[AC$ обозначается как $\angle BAC$.



♦ **Внутренняя область угла** – это множество точек, заключенных между сторонами угла. Остальные точки образуют **внешнюю область угла**.

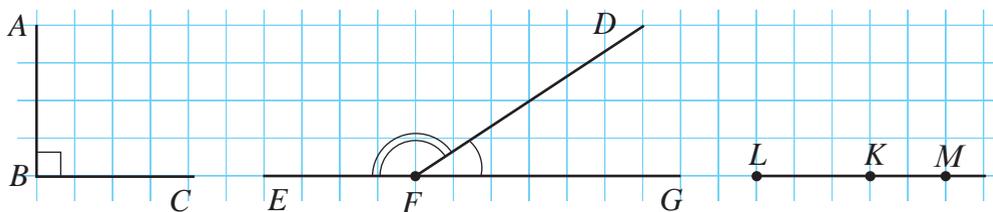


– внутренняя область угла BAC



– внешняя область угла BAC

2 Рассмотрите рисунок и впишите одно из слов: *нулевой, развернутый, острый, прямой, тупой*.



Угол $\angle ABC$

Угол $\angle DFG$

Угол $\angle DFE$

Угол $\angle EFG$

Угол $\angle KLM$

Угол $\angle LKM$

• Запишите упомянутые углы в порядке возрастания их величин.

2.2. Градусная мера углов

Исследуем и узнаем

1 Если учесть, что два различных отрезка отличаются друг от друга длинами, то в действительности при сравнении этих отрезков мы сравниваем их длины.

А как сравнить два угла?

Из V класса знаем, что „раскрытие“ угла соответствует его величине. Значит, чем больше „раскрытие“ угла, тем больше его величина. Следовательно, из всех углов развернутый угол имеет наибольшую величину.

Возьмите на заметку

Величину угла A обозначаем $m(\angle A)$.

Два угла называются **конгруэнтными**, если у них равные величины.

Если углы A и B конгруэнтны, то обозначаем $\angle A \equiv \angle B$.

Замечание. Конгруэнтные углы при наложении совпадают.

• Во сколько раз величина прямого угла меньше величины развернутого угла? Обоснуйте.

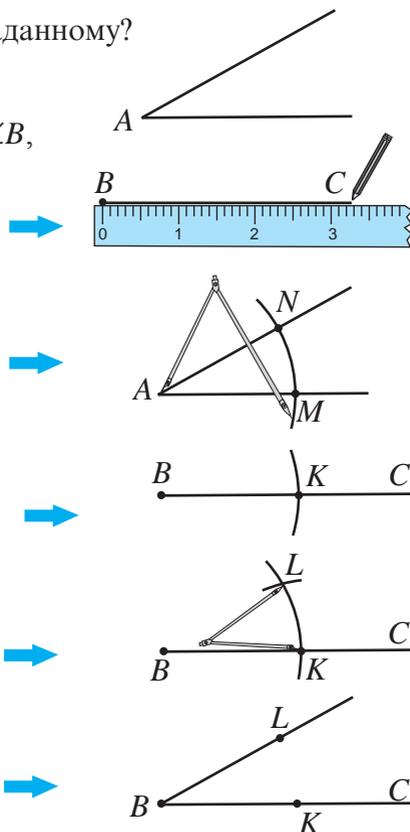
2 Как построить угол, конгруэнтный заданному?

Решение:

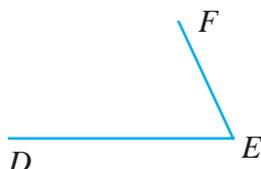
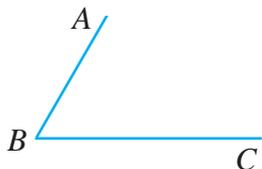
Пусть дан $\angle A$. Необходимо построить $\angle B$, конгруэнтный $\angle A$.

- 1 Строим полупрямую $[BC$.
- 2 Опишем дугу с произвольным радиусом и с центром в точке A , которая пересекала бы обе стороны данного угла (в точках M и N).
- 3 С тем же радиусом опишем дугу с центром в точке B так, чтобы она пересекла полупрямую $[BC$. Обозначим точку пересечения буквой K .
- 4 Измерим циркулем расстояние MN и опишем дугу с центром в точке K так, чтобы она пересекла в точке L дугу, описанную из точки B ($[KL] \equiv [MN]$).

Проведя полупрямую $[BL$, получим $\angle KBL \equiv \angle B \equiv \angle A$.



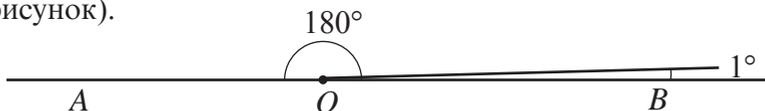
- 3 Маше надо сравнить величины углов ABC и DEF .



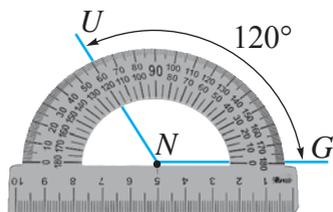
Прочитайте следующее правило и помогите Маше справиться с заданием.

Возьмите на заметку

- ♦ Чтобы получить единицу измерения углов, развернутый угол „разделили“ на 180 равных частей и посчитали, что одна часть (из 180) имеет величину, равную **одному градусу**, и обозначили как 1° (см. рисунок).



- Значит, величина развернутого угла равна 180° .
- Величина прямого угла равна 90° (читаем: „90 градусов“).
- ♦ Наиболее используемым инструментом для измерения углов является **транспортир**. Чтобы измерить величину угла, располагаем транспортир так, чтобы вершина угла совпала с центром полуокружности транспортира, а одна из сторон угла проходила через деление 0.



Таким образом, другая сторона угла пройдет через деление, показывающее величину угла.

Величина угла UNG , изображенного на рисунке, равна 120° .

Обозначаем: $m(\angle UNG) = 120^\circ$.

Практическая работа

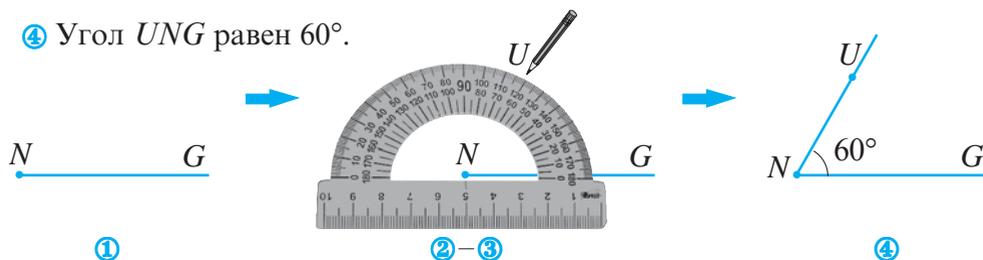
- Используйте транспортир для решения задачи Маше.

- 4 Как с помощью транспортира построить угол 60° ?

Решение:

- 1 Строим полупрямую $[NG$.
- 2 Располагаем транспортир так, чтобы центр его полуокружности совпал с точкой N , а полупрямая $[NG$ проходила через деление 0.
- 3 Отмечаем точку U напротив деления 60.

④ Угол UNG равен 60° .



Практическая работа

- Аналогично постройте угол: а) в 45° ; б) в 110° .
- Постройте отрезок AB длиной в 5 см и серединный перпендикуляр этого отрезка.

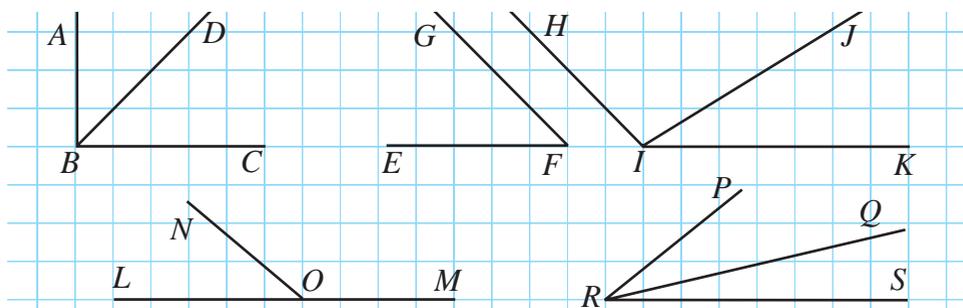
2.3. Классификация пар углов

Возьмите на заметку

- ♦ Два угла, лежащие в одной плоскости, называются **смежными углами**, если у них есть общая вершина и общая сторона, которая расположена между двумя другими сторонами.
- ♦ Углы A и B называются **дополнительными до 90°** , если сумма их величин равна 90° . В этом случае угол A называется **дополнительным до 90°** углу B и наоборот.
- ♦ Углы A и B называются **дополнительными до 180°** , если сумма их величин равна 180° . В этом случае угол A называется **дополнительным до 180°** углу B .

Применяем

1 Рассмотрите рисунки, измерьте углы и дополните пропуски подходящим выражением (*дополнительны до 90°* , *дополнительны до 180°* , *смежные*).



- а) Углы ABD и CBD – .
- б) Углы EFG и HIK – .
- в) Углы HIJ и JIK – .
- г) Углы LON и MON – .
- д) Углы PRQ и QRS – .

2 Вычислите величину угла COD , изображенного на рисунке, если $m(\angle AOB) = 40^\circ$.

Исследуем и узнаем

Углы AOB и AOC являются смежными и дополнительными до 180° .

Следовательно, $m(\angle AOC) = 180^\circ - \square$.

Углы AOC и COD являются смежными и дополнительными до 180° .

Следовательно, $m(\angle COD) = 180^\circ - \square = \square = m(\angle \square)$.

• Вычислите и сравните величины углов BOD и AOC . Сделайте вывод.

Возьмите на заметку

Два угла называются **вертикальными**, если у них общая вершина и их стороны являются дополнительными полупрямыми.

Возьмите на заметку

Свойство вертикальных углов

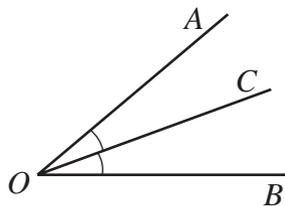
Вертикальные углы конгруэнтны.

• Сколько пар вертикальных углов образуют две пересекающиеся прямые?

2.4. Биссектриса угла

Возьмите на заметку

Биссектрисой угла называется полупрямая с началом в вершине угла, лежащая во внутренней области угла и образующая со сторонами этого угла два конгруэнтных угла.



[OC – биссектриса угла AOB .]

• Постройте прямой угол, затем с помощью транспортира постройте его биссектрису.

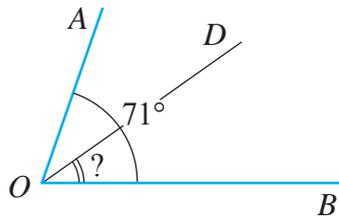
Применяем

Полупрямая OD делит угол AOB на два конгруэнтных угла. Чему равна величина угла AOD , если $m(\angle AOB) = 71^\circ$?

Решение:

Очевидно, можно посчитать, что $m(\angle AOD) = 71^\circ : 2 = 30,5^\circ$.

Но что означает $0,5^\circ$?



Поясняем

Для того чтобы более точно измерять углы, используют единицы измерения меньше одного градуса.

Таким образом, $\frac{1}{60}$ градуса называется **минутой** (обозначается $'$),

а $\frac{1}{60}$ минуты называется **секундой** (обозначается $''$).

Следовательно, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Таким образом, $30,5^\circ = 30^\circ 30'$.

Ответ: $m(\angle AOD) = 30^\circ 30'$.

Применяем

3 Вычислите:

а) $24^\circ 52' 48'' + 33^\circ 49' 27''$;

б) $61^\circ 32' 43'' + 47^\circ 36' 58''$.

Решение:

а) $24^\circ 52' 48'' + 33^\circ 49' 27'' = 57^\circ 101' 75'' = 57^\circ 102' 15'' = 58^\circ 42' 15''$.

$$75'' = 60'' + 15'' = 1' 15''$$

$$102' = 60' + 42' = 1^\circ 42'$$

б) $61^\circ 32' 43'' - 47^\circ 36' 58'' = 61^\circ 31' 103'' - 47^\circ 36' 58'' =$

$$32' = 31' + 60''$$

$$61^\circ = 60^\circ + 60'$$

$$= 60^\circ 91' 103'' - 47^\circ 36' 58'' = 13^\circ 55' 45''.$$

Упражнения и задачи



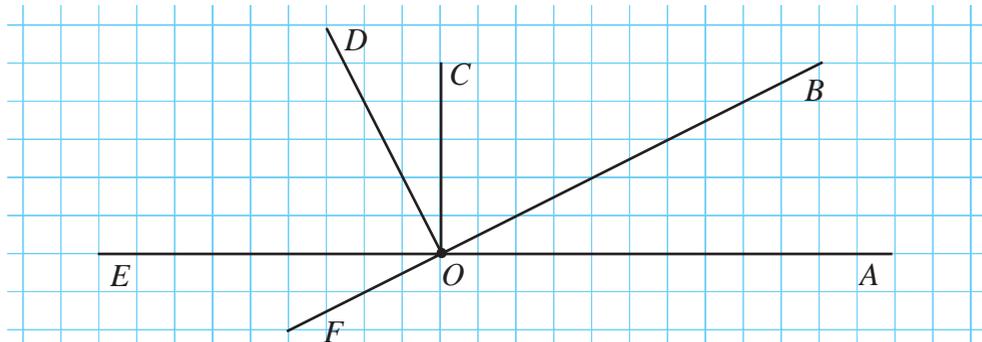
1. Рассмотрите рисунок и определите углы:

а) острые;

б) тупые;

в) развернутые;

г) прямые.



2. Рассмотрите рисунок задания 1 и укажите пары углов:

а) дополнительных до 180° ;

б) дополнительных до 90° ;

в) смежных;

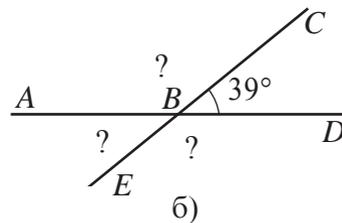
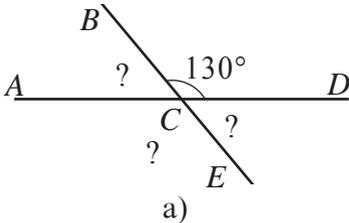
г) смежных и дополнительных до 90° ;

д) смежных и дополнительных до 180° .

3. Вычислите величину угла:

- а) дополнительного до 90° углу, равному 60° ;
- б) дополнительного до 90° углу, равному 38° ;
- в) дополнительного до 180° углу, равному 70° ;
- г) дополнительного до 180° углу, равному 11° .

4. Вычислите величины неизвестных углов, изображенных на рисунке:



- 5. Найдите величину угла, если известно, что величина ему дополнительного до 90° угла: а) в 2 раза больше; б) в 8 раз меньше; в) на 20° больше; г) на 40° меньше.
- 6. Найдите величину угла, если известно, что величина ему дополнительного до 180° угла: а) в 3 раза больше; б) в 5 раз меньше; в) на 50° больше; г) на 150° меньше.

7. Постройте углы:

- а) ABC и CBD так, чтобы полупрямые BD и BA были противоположными;
- б) ABC и DBE так, чтобы каждая из пар полупрямых BE и BC , BA и BD образовывала противоположные полупрямые.

8. Постройте два угла, у которых:

- а) общая вершина, но разные стороны;
- б) одна сторона общая, а две другие – противоположные полупрямые.
- в) одна сторона общая, а две другие – взаимно перпендикулярные.

9. Определите вид угла, если известно, что его величина равна:

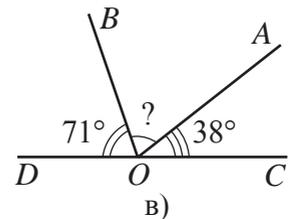
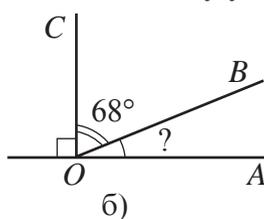
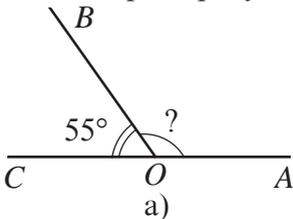
- а) 90° ; б) 180° ; в) 60° ; г) 135° ; д) 0° ; е) 87° .

10. Постройте угол, равный: а) 40° ; б) 135° ; в) 80° ; г) 155° .

11. Угол какого вида описывает минутная стрелка часов за:

- а) 15 мин; б) 30 мин; в) 25 мин; г) 10 мин?

12. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла AOB :



13. За какое время минутная стрелка часов описывает угол величиной в:

- а) 30° ; б) 60° ; в) 135° ; г) 1° ?

14. Вычислите:

а) $39^{\circ}24' + 25^{\circ}43'$;

б) $67^{\circ}18' + 15^{\circ}24'$;

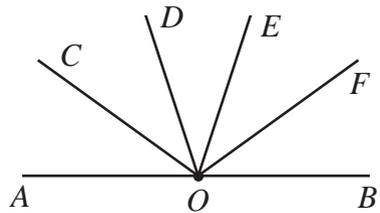
в) $51^{\circ}40' - 27^{\circ}33'$;

г) $120^{\circ} - 116^{\circ}52'$.

15. Развернутый угол AOB , изображенный на рисунке, разделили четырьмя полупрямыми на 5 конгруэнтных углов. Найдите:

а) $m(\angle AOC)$; б) $m(\angle COE)$;

в) $m(\angle BOC)$; г) $m(\angle FOC)$.



16. Постройте с помощью линейки и карандаша угол:

а) больше 90° ; б) меньше 90° .

Найдите величину построенного угла.

17. Вычислите:

а) $45^{\circ} : 2$;

б) $97^{\circ} : 2$;

в) $2 \cdot 75^{\circ}38'$;

г) $2 \cdot 67^{\circ}29'$.

18. Изображение представляет данные, собранные с приборной панели дрона: $47,14^{\circ}$ и $28,94^{\circ}$. Чтобы написать $47,14^{\circ}$ без запятой, то есть с указанием минут и секунд, поступим следующим образом:

$$\begin{aligned} 47,14^{\circ} &= 47^{\circ} + 0,14^{\circ} = \\ &= 47^{\circ} + (60 \cdot 0,14)' = 47^{\circ} + 8,4' = \\ &= 47^{\circ}8' + (60 \cdot 0,4)'' = \\ &= 47^{\circ}8' + 24'' = 47^{\circ}8'24''. \end{aligned}$$



Напишите без запятых (с указанием минут и секунд):

а) $28,94^{\circ}$;

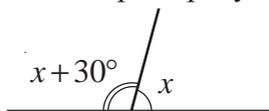
б) $40,15^{\circ}$;

в) $34,45^{\circ}$;

г) $89,22^{\circ}$;

д) $76,18^{\circ}$.

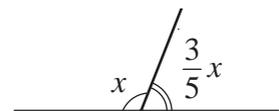
19. Рассмотрите рисунок и найдите значение x :



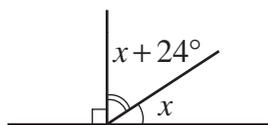
а)



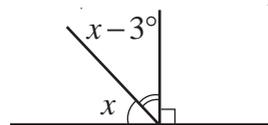
б)



в)



г)

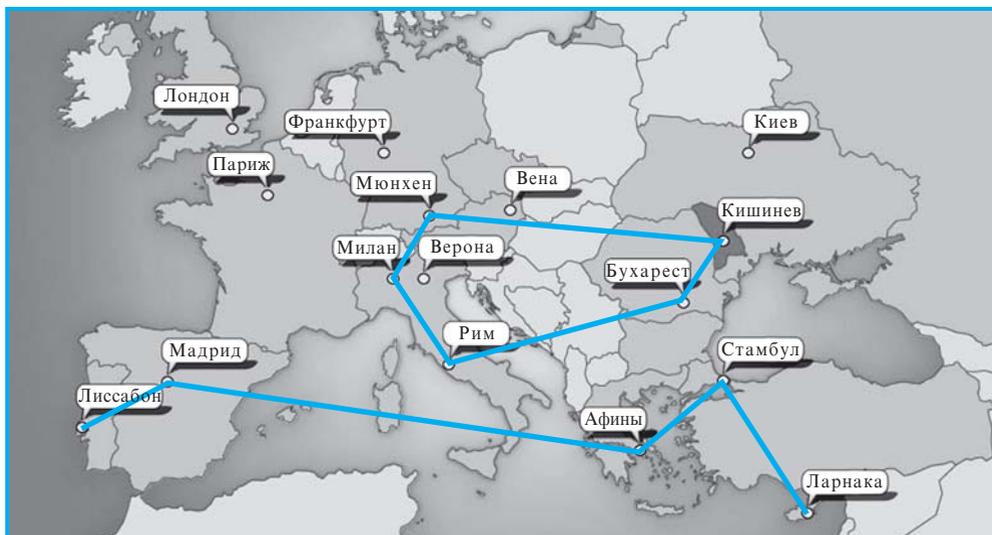


д)

3.1. Ломаные линии. Многоугольники

Исследуем и узнаем

1 Рассмотрите рисунок.



С какой геометрической фигурой можно ассоциировать траекторию полета:

- а) Ларнака, Стамбул, Афины, Мадрид, Лиссабон;
- б) Кишинев, Бухарест, Рим, Милан, Мюнхен, Кишинев?

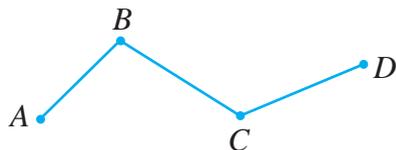
Решение:

а) Траектория полета по курсу Ларнака, Стамбул, Афины, Мадрид, Лиссабон описывает **незамкнутую ломаную линию с вершинами** в указанных городах.

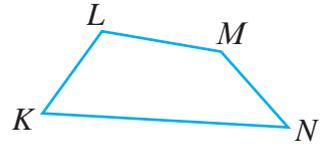
б) Траектория полета по курсу Кишинев, Бухарест, Рим, Милан, Мюнхен, Кишинев описывает **замкнутую ломаную линию**.

Возьмите на заметку

- ◆ Отрезки, из которых образована ломаная линия, называются **сторонами** (или **звеньями**), а концы отрезков – **вершинами** этой ломаной.
- ◆ Любые три последовательные вершины **ломаной линии** неколлинеарны.
- ◆ **Незамкнутая ломаная линия** имеет лишь две вершины, из которых исходят по одной стороне.



- ♦ Из всех вершин **замкнутой ломаной линии** исходят по две стороны.
- ♦ Ломаную линию обозначают, указав ее вершины в порядке их следования.
На рисунках изображены: незамкнутая ломаная линия $ABCD$ и замкнутая ломаная линия $KLMN$.

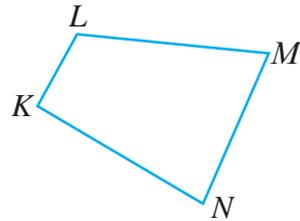
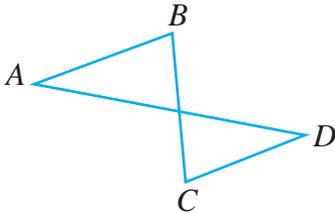


2 Постройте замкнутую ломаную линию:

- а) с 4-мя сторонами, две из которых не имеют общих вершин, а две другие пересекаются;
- б) с 4-мя сторонами, которые пересекаются лишь в вершинах линии.

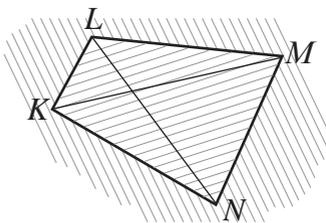
Решение:

- а) Строим ломаную линию $ABCD$.
- б) Строим ломаную линию $KLMN$.



Возьмите на заметку

- ♦ Замкнутая ломаная, стороны которой не имеют других общих точек, кроме ее вершин, называется **многоугольником**.
Ломаная линия $KLMN$, построенная в пункте б) (задание **2**), является многоугольником с 4-мя сторонами. Точки K, L, M, N являются вершинами данного многоугольника.
- ♦ **Диагональ** выпуклого многоугольника называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной и той же стороне.
- ♦ Часть плоскости, ограниченной сторонами многоугольника, называется **внутренней областью многоугольника**. Остальная часть плоскости называется **внешней областью многоугольника**.



$[KM], [LN]$ – диагонали многоугольника $KLMN$



– внутренняя область многоугольника $KLMN$



– внешняя область многоугольника $KLMN$.

3.2. Виды многоугольников

Что знаем? Что узнаем?

1 Как называется многоугольник с 3-мя сторонами? Какие многоугольники с 4-мя сторонами вам известны?

Решение:

Треугольник – это многоугольник с 3-мя сторонами. В предыдущих классах были рассмотрены квадраты и прямоугольники, которые являются многоугольниками с 4-мя сторонами. Существуют и другие виды многоугольников с 4-мя сторонами.

Возьмите на заметку

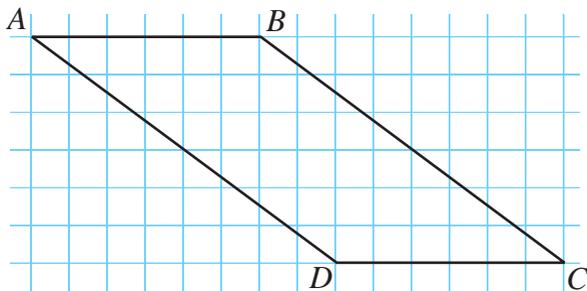
- ♦ Многоугольники классифицируются по количеству сторон или углов: треугольники – это многоугольники с 3-мя сторонами; четырехугольники – это многоугольники с 4-мя сторонами; пятиугольники – это многоугольники с 5-ю сторонами; шестиугольники – это многоугольники с 6-ю сторонами.

2 Постройте четырехугольник с двумя параллельными и конгруэнтными сторонами. Измерьте длины других двух сторон, затем определите взаимное расположение прямых, которые содержат эти стороны.

Решение:

У четырехугольника $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Измерив их, получим, что $AD = BC = 5$ см.

При помощи двух линеек убеждаемся, что прямые AD и BC не пересекаются. Следовательно, пара сторон AD и BC обладает теми же свойствами, что и пара сторон AB и CD : они конгруэнтны и параллельны.



Возьмите на заметку

- ♦ Четырехугольник, у которого две стороны параллельны и конгруэнтны, называется **параллелограммом**. У **параллелограмма** две пары параллельных и конгруэнтных сторон.
- ♦ **Ромб** – это параллелограмм, у которого стороны конгруэнтны.
- ♦ Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**.



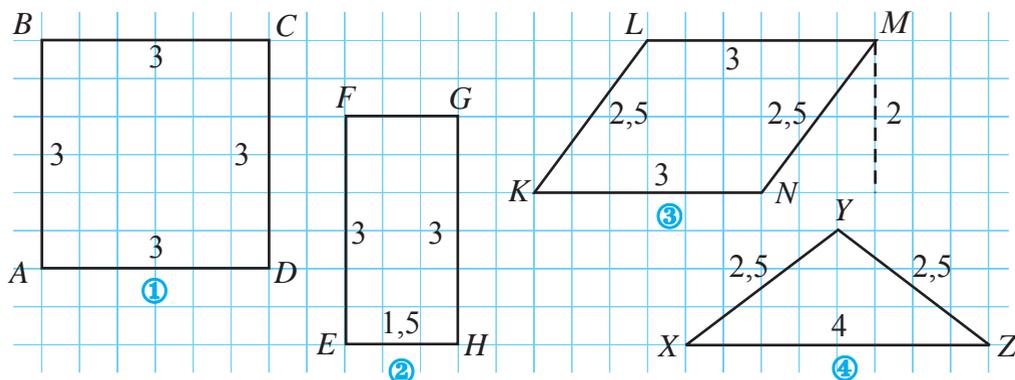
3 Рассмотрите схему и обратите внимание на виды параллелограммов:



• Как называется параллелограмм, который одновременно является и ромбом и прямоугольником?

3.3. Периметр многоугольника

Рассмотрите рисунки. Вычислите периметр каждого многоугольника.



Решение:

$$\mathcal{P}_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см)}.$$

$$\mathcal{P}_{EFGH} = 2EF + 2FG = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1,5 = 9 \text{ (см)}.$$

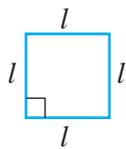
$$\mathcal{P}_{KLMN} = 2KL + 2LM = 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 3 = 11 \text{ (см)}.$$

$$\mathcal{P}_{XYZ} = XY + YZ + XZ = 2,5 + 2,5 + 4 = 9 \text{ (см)}.$$

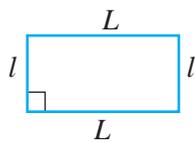


Вспомним

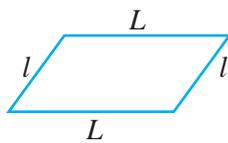
Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон.



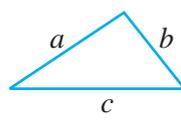
$$\mathcal{P}_{\square} = 4 \cdot l$$



$$\mathcal{P}_{\square} = 2(L + l)$$



$$\mathcal{P}_{\square} = 2(L + l)$$



$$\mathcal{P}_{\triangle} = a + b + c$$

3.4. Площадь квадрата. Площадь прямоугольника

Что знаем? Что узнаем?

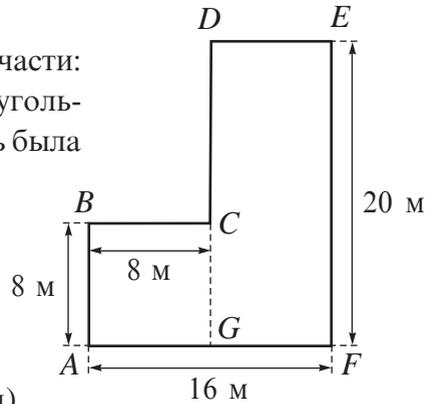
1 Фермер поделил свой участок на две части: одна имеет форму квадрата, другая – прямоугольника (см. рисунок справа). Меньшая площадь была засеяна луком, а большая – чесноком.

Какая площадь была засеяна луком, а какая – чесноком?

Решение:

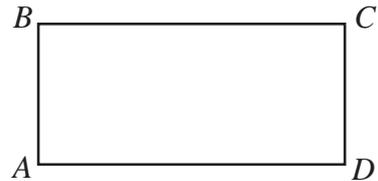
- ① $S_{ABCG} = AB^2 = 8^2 = 64 \text{ (м}^2\text{)}$.
- ② $DE = AF - AG = AF - BC = 16 - 8 = 8 \text{ (м)}$.
- ③ $S_{DEFG} = DE \cdot EF = 8 \cdot 20 = 160 \text{ (м}^2\text{)}$.
- ④ Заметим, что $S_{DEFG} > S_{ABCG}$, так как $160 > 64$.

Ответ: 64 м^2 – засеяны луком; 160 м^2 – чесноком.



Дополняем и поясняем

2 Периметр прямоугольника равен 96 м. Зная, что ширина прямоугольника составляет 50% его длины, найдите площадь прямоугольника.

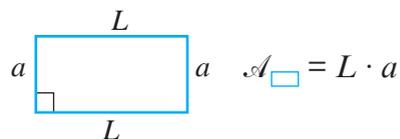
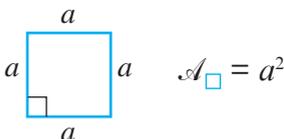


Решение:

- ① Так как AB составляет 50% от BC , то $BC = 2AB$.
- ② $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AB + 2AB) = 2 \cdot 3 \cdot AB = 6AB$.
- ③ $P_{ABCD} = 96 \text{ м}$, значит, $6AB = 96 \text{ м}$.
- ④ $AB = \square : \square \text{ (м)}$.
- ⑤ $BC = 2AB = 2 \cdot \square = \square \text{ (м)}$.
- ⑥ $S_{ABCD} = \square \cdot \square = \square \cdot \square = \square \text{ м}^2$.

Ответ: $\square \text{ м}^2$.

Возьмите на заметку

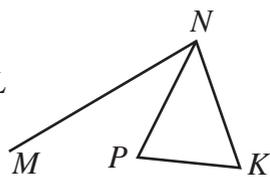
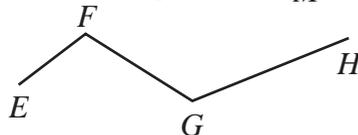
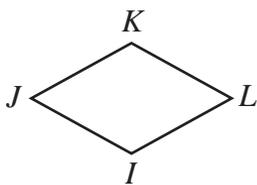
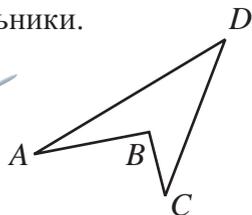


Упражнения и задачи



1. Наблюдайте за траекториями полета дрона. Определите:

- незамкнутые ломаные линии;
- замкнутые ломаные линии;
- многоугольники.



2. Постройте:

- замкнутую ломаную линию с 5-ю сторонами;
- незамкнутую ломаную линию с 6-ю сторонами;
- многоугольник с 5-ю сторонами;
- замкнутую ломаную линию с 5-ю сторонами, не являющуюся многоугольником.

3. Постройте:

- параллелограмм со сторонами, равными 6 см и 8 см;
- трапецию с основаниями, равными 3 см и 5 см;
- ромб с диагоналями, равными 4 см и 7 см;
- квадрат с диагоналями, равными 5 см.

4. Найдите периметр многоугольника, длины сторон которого:

- 3 см; 4,2 см; 5,8 см; 6 см;
- $\frac{2}{3}$ см; $\frac{4}{3}$ см; 1 см; 1,5 см.

5. Сколько диагоналей у многоугольника:

- с 5-ю сторонами;
- с 6-ю сторонами?

6. Найдите площадь квадрата со стороной, равной:

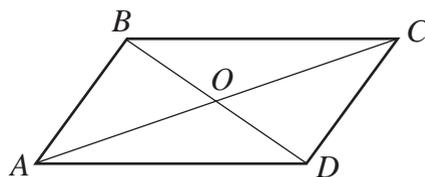
- 8 см;
- $3\frac{1}{4}$ см;
- 2,05 см;
- $7\frac{1}{3}$ см.

7. Найдите площадь прямоугольника со сторонами, равными:

- 6 см и 10 см;
- 8,5 см и 2,4 см;
- $4\frac{1}{6}$ см и 12 см.

8. На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$. Заполните пропуски:

- $BC \parallel$;
- \cap $= \{O\}$;
- $[AB] \equiv$;
- $\equiv [OC]$.



9. Какими общими свойствами обладают:

- а) параллелограмм и трапеция;
- б) параллелограмм и прямоугольник;
- в) ромб и квадрат;
- г) квадрат и прямоугольник?

10. Постройте параллелограмм $KLMN$.

Используя транспортир, измерьте углы, затем заполните пропуски:

- а) $\angle K \equiv$;
- б) $\angle N \equiv$;
- в) $m(\angle K) + m(\angle N) =$.

Сделайте вывод.

11. Найдите периметр:

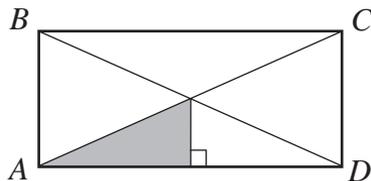
- а) треугольника со сторонами, равными $3\frac{1}{2}$ см; 4,6 см и 5,9 см;
- б) квадрата со стороной, равной $2\frac{7}{9}$ см;
- в) прямоугольника со сторонами, равными 25,6 см и 34,3 см;
- г) ромба со стороной, равной $5\frac{1}{9}$ см.

12. Улица прямоугольной формы была покрыта асфальтом. Найдите площадь заасфальтированной улицы, если ее длина равна 0,75 км, а ширина 10,5 м.

13. Бригада рабочих смонтировала 32 окна, каждое из которых имеет форму прямоугольника с измерениями 45 см и 75 см. Тариф оплаты монтажа одного квадратного метра окна – 80 леев. Найдите стоимость всей работы.

14. Сумма длин всех сторон четырехугольника – 66 дм. Найдите длину каждой стороны, зная, что эти длины равны последовательным числам.

15. Закрашенная площадь прямоугольника равна 12 см^2 . Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



16. Составьте задачи на:

- а) применение периметра прямоугольника и площадь квадрата;
- б) применение площадей квадрата и прямоугольника.

§4 Окружность. Круг

4.1. Элементы окружности

Что знаем? Что узнаем?

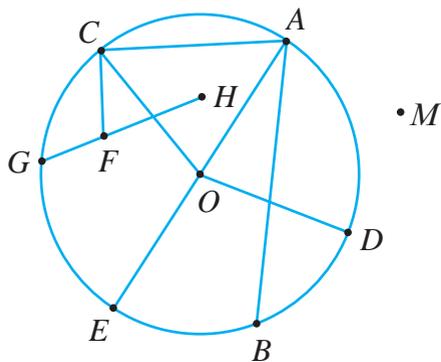
1 Рассмотрите рисунок. Какую геометрическую фигуру начертил коньками на льду каждый из ребят?



Поясняем

У Анны получилась **незамкнутая кривая линия**.
Денис изобразил **замкнутую кривую линию**.
Миша начертил **окружность**.

2 Рассмотрите рисунок (точка O – центр окружности) и заполните пропуски.



Вспомним

- ♦ Все точки окружности равноудалены от одной заданной точки, называемой **центром окружности**.
- ♦ Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо ее точкой, называется **радиусом**.
- ♦ Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**.
- ♦ Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.
- ♦ Для построения окружности используем **циркуль**.



а) $OA = \square = OE = \square$.

б) $[OD] \equiv \square \equiv \square$.

в) Отрезки \square являются радиусами окружности.

г) Отрезок \square – диаметр окружности.

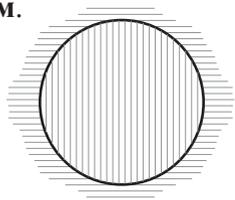
д) Отрезки \square являются хордами окружности.

е) Точки \square принадлежат внутренней области окружности.

ж) Точки \square не принадлежат окружности.

Возьмите на заметку

- ♦ Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **внутренней областью этой окружности**.
Другая часть плоскости называется **внешней областью окружности**.
- ♦ Окружность, объединенная со своей внутренней областью, называется **кругом**.



– внутренняя область окружности



– внешняя область окружности

4.2. Длина окружности. Площадь круга

Исследуем и узнаем

1 Миша при помощи портняжного метра измерил диаметр d основания и длину L окружности основания двух емкостей. Вычислите приблизительное значение отношения $\frac{L}{d}$ для каждой емкости.

Что вы заметили?



$$L \approx 79,8 \text{ см}, d \approx 25,4 \text{ см}$$



$$L \approx 59,7 \text{ см}, d \approx 19 \text{ см}$$



Решение:

$$\textcircled{1} \frac{L}{d} \approx \frac{79,8}{25,4} \approx 3,14.$$

$$\textcircled{2} \frac{L}{d} \approx \frac{59,7}{19} \approx 3,14.$$

Возьмите на заметку

- ♦ Отношение длины окружности к длине ее диаметра является числом постоянным (не рациональным). Его обозначают греческой буквой π (читается „Пи“).

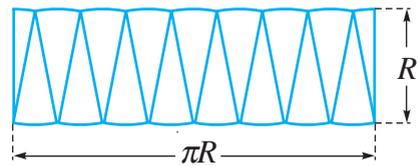
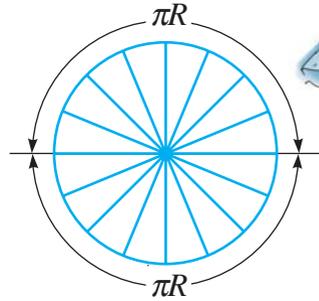
$$\pi \approx 3,1416.$$

- ♦ Длину любой окружности можно найти по формуле $L = \pi \cdot d$, где d – диаметр окружности. Если известен радиус R окружности, то длину этой окружности можно вычислить по формуле $L = 2 \cdot \pi \cdot R$.

- Найдите приблизительное значение длины окружности радиуса 5 см.

2 Всезнайка вывел формулу площади круга. Обратите внимание на ход его действий:

- Разделил круг на секторы.
- Расположил секторы таким образом, чтобы получить поверхность, похожую на прямоугольник с измерениями, приблизительно равными πR и R (см. рисунок справа).
- Площадь полученного прямоугольника равна $\pi R \cdot R = \pi R^2$.
- Следовательно, площадь круга можно вычислить по формуле: $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.



Возьмите на заметку

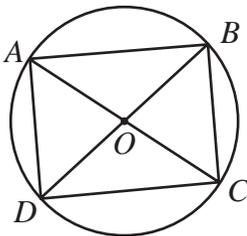
Площадь круга вычисляется по формуле: $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.

- Найдите приблизительное значение площади круга радиуса 10 см.

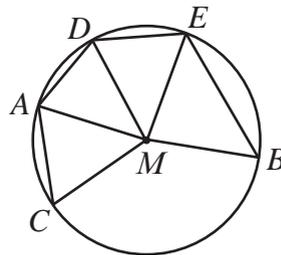
Упражнения и задачи



1. Постройте:
 - а) незамкнутую кривую;
 - б) замкнутую кривую;
 - в) окружность радиуса 4 см.
2. Рассмотрите рисунок и укажите элементы окружности (радиусы, хорды, диаметры, центр):

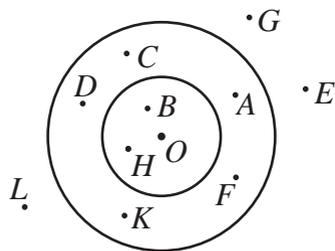


а)



б)

3. Рассмотрите рисунок (точка O – центр окружностей). Найдите множество:
- M – множество точек, которые принадлежат внутренней области малого круга;
 - N – множество точек, которые принадлежат внешней области большого круга;
 - P – множество точек, которые принадлежат внутренней области большого круга и внешней области малого круга;
 - Q – множество точек, которые принадлежат внешней области малого круга.



4. Постройте окружность радиуса 4 см и точку M , расположенную на расстоянии 7 см от центра окружности. Отметьте точки на окружности, расположенные на расстоянии:
- 5 см от точки M ;
 - 7 см от точки M ;
 - 11 см от точки M .

5. Дрон пролетел, описывая круг. Найдите длину траектории полета дрона, если радиус окружности равен:

- 3 м;
- $\frac{6}{\pi}$ м;
- $3\frac{2}{3}$ м.

6. Вычислите длину окружности, диаметр которой равен:

- 10 см;
- $6\frac{2}{5}$ см;
- $\frac{1}{\pi}$ см.

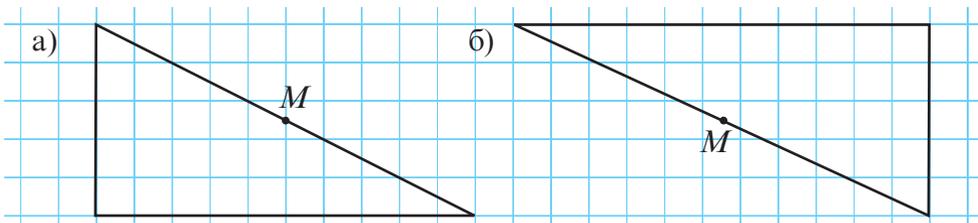
7. Дрон пролетел, описывая круг. Найдите площадь описанного дроном круга, если его радиус равен:

- 10 м;
- $2\frac{3}{4}$ м;
- $\frac{9}{\pi}$ м.

8. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен:

- 8 см;
- $1\frac{2}{5}$ см;
- $\frac{10}{\pi}$ см.

9. Точка M является серединой стороны, на которой она отмечена. Сравните при помощи циркуля расстояния от точки M до вершин треугольника. Сделайте вывод. Перечертите рисунок, затем постройте окружность с центром в точке M , проходящую через вершины треугольника.



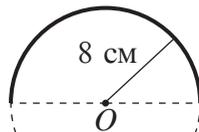
10. Постройте две окружности, чтобы расстояние между их центрами было:
- равно сумме их радиусов;
 - равно разности их радиусов;
 - больше, чем сумма их радиусов.
11. Радиус окружности равен 10 см. Точка O – центр окружности. Каково положение точки M относительно окружности, если:
- $MO = 7,5$ см;
 - $MO = 10$ см;
 - $MO = 12$ см;
 - $MO = 5\frac{2}{3}$ см?



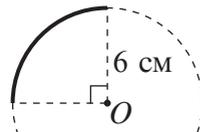
12. Сколько общих точек имеют две окружности, если расстояние между их центрами равно 8 см, а их радиусы равны:
- 5 см и 6 см;
 - $2\frac{1}{4}$ см и $5\frac{3}{5}$ см;
 - 2 см и 6 см;
 - 3 см и $4\frac{1}{7}$ см?
13. Истинно или Ложно?
- Любой диаметр разбивает окружность на две полуокружности.
 - Диаметр окружности в два раза меньше радиуса этой окружности.
 - Две окружности одного радиуса при наложении совпадают.
 - Хорда окружности – это отрезок, определенный двумя точками окружности.
 - Не существует окружности с несколькими диаметрами.
 - Две окружности могут иметь только одну общую точку.
 - Две окружности могут иметь 3 общие точки.
 - Прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек.



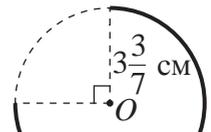
14. Рассмотрите рисунок и вычислите часть длины окружности (точка O – центр окружности):



а)



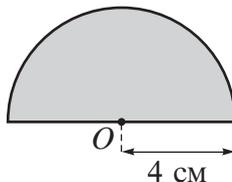
б)



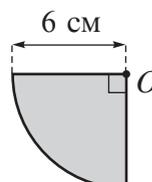
в)

15. Постройте отрезок AB длиной 3 см, затем окружность, проходящую через точки A и B . Сколько решений имеет задача?

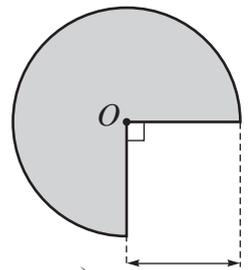
16. Рассмотрите рисунок и вычислите часть площади круга (точка O – центр круга):



а)



б)



в)

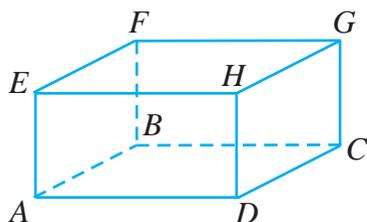
§ 5 Геометрические тела

5.1. Куб, кубоид, пирамида



Вспомним

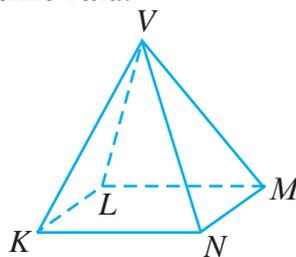
1 Рассмотрите изображенные геометрические тела.



①

Кубоид

(прямоугольный параллелепипед)

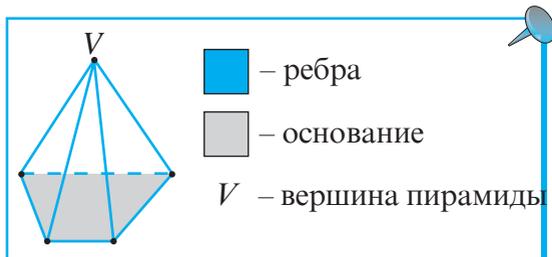
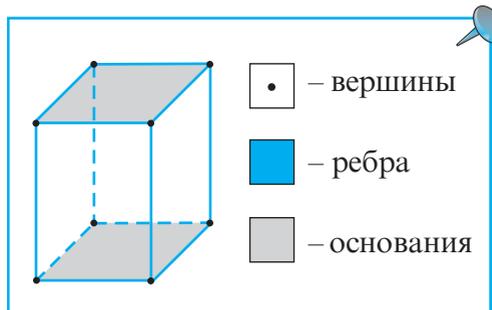


②

Пирамида

Заполните пропуски:

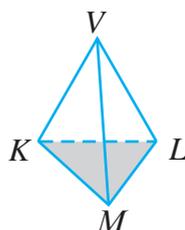
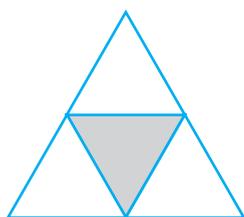
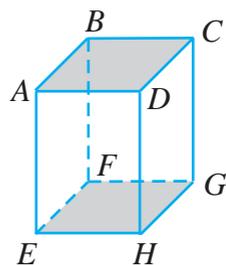
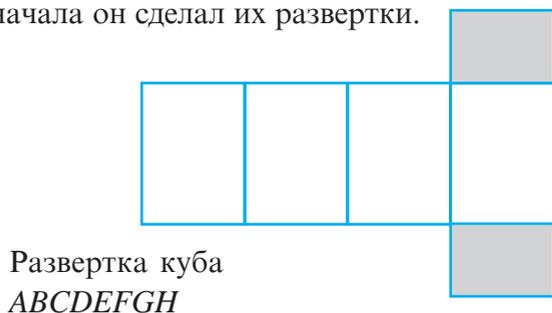
- ✓ Кубоид $ABCDEFGH$ имеет основания, боковых граней, вершин, 12 .
- ✓ Боковыми гранями кубоида являются .
- ✓ ограничены конгруэнтными прямоугольниками.



- ✓ Пирамида $VKLMN$ имеет одно основание, вершин, и 8 .
- ✓ является основанием пирамиды $VKLMN$.
- ✓ Основанием четырехугольной пирамиды является .
- ✓ Кубоид с конгруэнтными ребрами называется .

Исследуем и узнаем

2 Всезнайка смастерил из картона два геометрических тела. Для этого сначала он сделал их развертки.

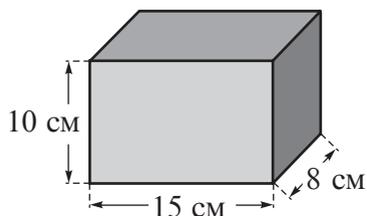


Развертка пирамиды *VKLM*

- Постройте другие развертки геометрических тел из задания 2.
- Начертите развертку куба, ребро которого равно 3 см.

Применяем

3 Кубоид, изображенный на рисунке справа, выполнен из картона. Найдите площадь \mathcal{A} всей поверхности развертки кубоида и площадь кубоида.



Решение:

Развертка кубоида состоит из 6 прямоугольных поверхностей:

- две с измерениями 8 см и 15 см;
- две с измерениями 10 см и 15 см;
- две с измерениями 8 см и 10 см.

Следовательно,

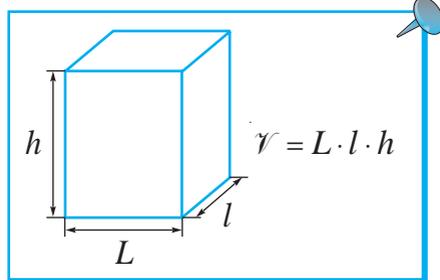
$$\mathcal{A} = 2 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot 10 \cdot 15 + 2 \cdot 8 \cdot 10 =$$

$$= 2(8 \cdot 15 + 10 \cdot 15 + 8 \cdot 10) = 700 (\text{см}^2).$$

Объем кубоида равен произведению трех его измерений.

$$\mathcal{V} = 8 \cdot 10 \cdot 15 = 1200 (\text{см}^3).$$

Ответ: $\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 700 \text{ см}^2$, $\mathcal{V} = 1200 \text{ см}^3$.



Возьмите на заметку

Площадь полной поверхности ($S_{\text{полн.}}$) кубоида равна сумме площадей всех граней кубоида и вычисляется по формуле:

$$S_{\text{полн.}} = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h),$$

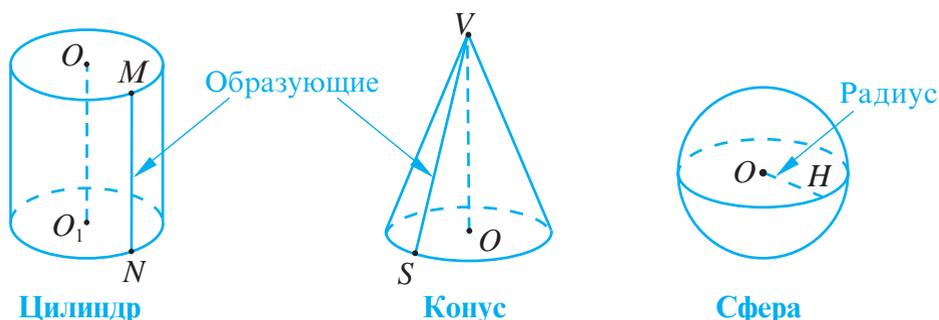
где L , l и h являются измерениями кубоида.

- Вычислите площадь полной поверхности и объем кубоида с измерениями 9 см, 6 см и $4\frac{1}{3}$ см.

5.2. Круглые тела

Что знаем? Что узнаем?

Рассмотрите изображенные геометрические тела.



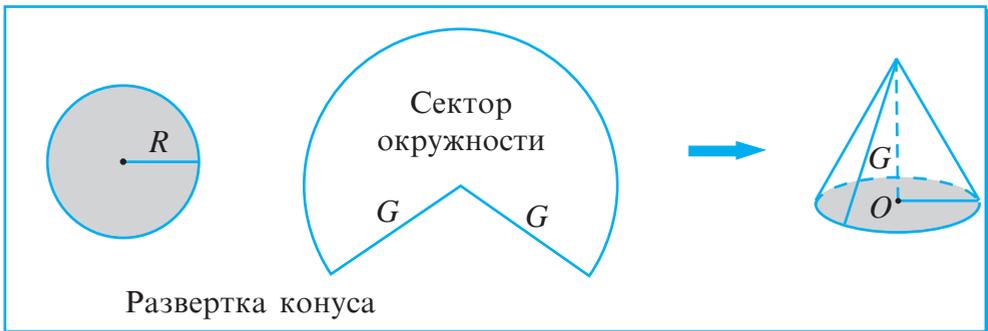
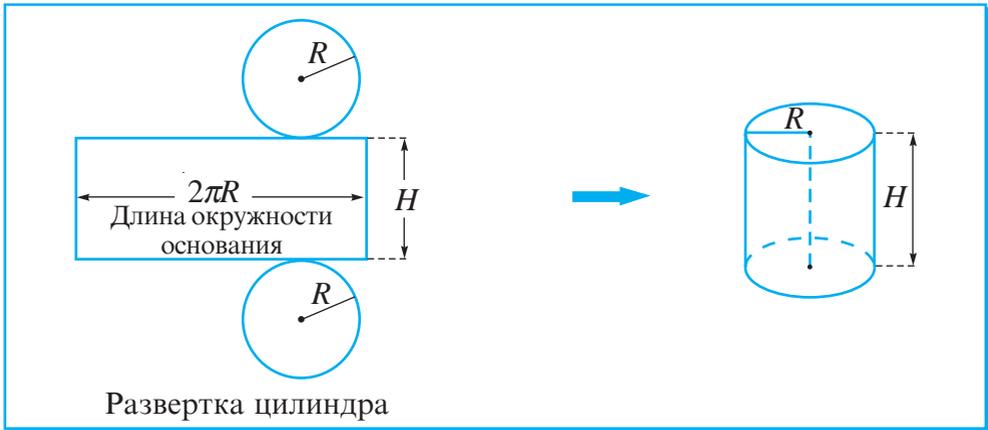
Заполните пропуски:

- ✓ Цилиндр имеет основания – круги одинакового радиуса, лежащие в параллельных плоскостях.
- ✓ Основание конуса – .
- ✓ Все точки равноудалены от одной точки, называемой .
- ✓ Радиус сферы – это отрезок, соединяющий с одной точкой сферы.
- ✓ Отрезок является высотой цилиндра, а отрезок – высотой конуса.

Возьмите на заметку

- ♦ **Образующей цилиндра** называется отрезок, соединяющий любые две точки окружностей оснований цилиндра и параллельный прямой, проходящей через центры этих оснований.
- ♦ **Образующей конуса** называется любой отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой, принадлежащей окружности основания конуса.

2 Рассмотрите развертки цилиндра и конуса.



• Начертите развертку:

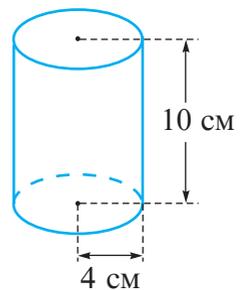
- а) цилиндра, высота которого равна 5 см, а радиус основания 3 см;
- б) конуса с образующей, равной 4 см, и радиусом основания 2,5 см.

Применяем

3 Найдите площадь поверхности развертки цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания 4 см.

Решение:

Развертка цилиндра (по условию задачи) состоит из прямоугольника с измерениями $2\pi \cdot 4$ см, 10 см и из двух окружностей радиуса 4 см.



$$\mathcal{A}_{\circ} = \pi R^2$$

$$\mathcal{A}_{\square} = L \cdot l$$

Следовательно,

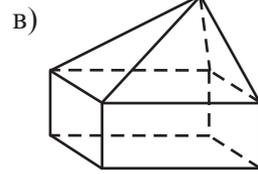
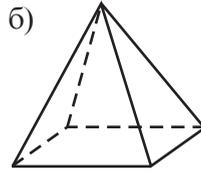
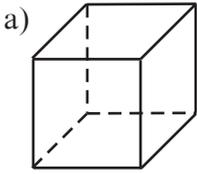
$$\mathcal{A} = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = \pi(80 + 32) = 112\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $112\pi \text{ см}^2$.

Упражнения и задачи



1. Рассмотрите рисунок и сосчитайте, сколько ребер у геометрического тела:



2. Рассмотрите рисунок задания 1 и сосчитайте, сколько граней у каждого геометрического тела.

3. Установите, сколько вершин у призмы:

а) четырехугольной; б) пятиугольной; в) шестиугольной.

4. Найдите объем куба, ребро которого равно: а) 10 см; б) $2\frac{2}{3}$ см.

5. Найдите объем кубоида, измерения которого равны:

а) 3 см, 5 см, 8 см; б) 4 см, $3\frac{1}{4}$ см, 8 см.

6. Найдите площадь полной поверхности куба, ребро которого равно:

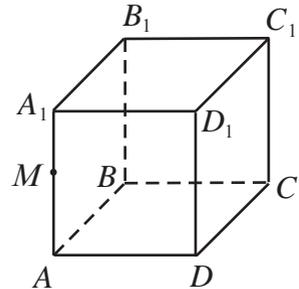
а) 8 см; б) $5\frac{1}{6}$ см.

7. Найдите площадь полной поверхности кубоида, измерения которого:

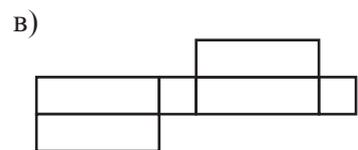
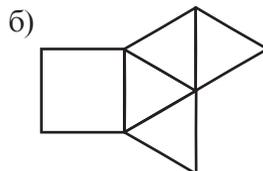
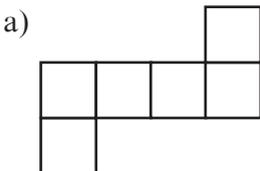
а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 4 см, 6 см, $2\frac{1}{6}$ см.

8. На рисунке изображен куб. Укажите:

- а) прямые, параллельные AD ;
- б) прямые, параллельные DC ;
- в) прямые, пересекающиеся в точке B ;
- г) три неколлинеарные точки;
- д) пары прямых, которые не параллельны и не пересекаются.



9. Развертки каких геометрических тел изображены на рисунке?



10. Начертите развертку: а) куба, ребро которого равно 5 см;

б) кубоида, измерения которого 4 см, 5 см, 6 см соответственно;

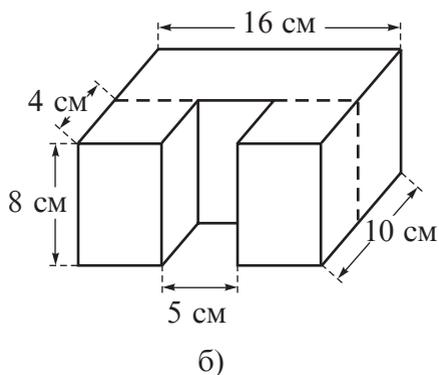
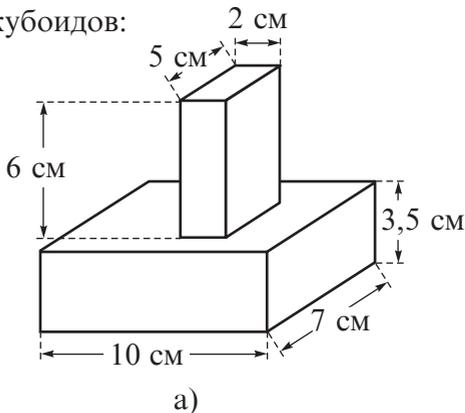
в) треугольной призмы, ребра оснований которой равны 3 см, а боковые ребра – 5 см.

11. Начертите развертку цилиндра:

- а) с радиусом оснований, равным 4 см, и высотой 3 см;
- б) с диаметром оснований, равным 7 см, и высотой 4 см;
- в) высота которого конгруэнтна диаметру оснований и равна 5 см.



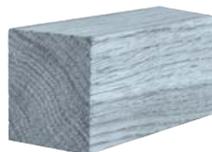
12. Найдите объем тел, изображенных на рисунке, которые состоят из кубоидов:



- 13. Бассейн имеет форму кубоида, длина и ширина которого равны 10 м и 15 м соответственно. Какова глубина бассейна, если его вместимость $352,5 \text{ м}^3$?
- 14. Амбар имеет форму кубоида, измерения которого равны 20,5 м, 6 м и 5 м соответственно. Сколько сена можно в нем хранить, если 1 м^3 сена весит 52 кг?
- 15. Миша вырезает кубики с ребром 2 см из бруска, имеющего форму кубоида, с измерениями 12 см, 16 см, 10 см. Какую длину будет иметь фигура, полученная из последовательно сложенных кубиков?
- 16. Найдите массу железного бруска, который имеет форму кубоида с измерениями, равными 6 см, 10 см, 15 см соответственно, если плотность железа $7,8 \text{ г/см}^3$.
- 17. Зная, что плотность железа $7,8 \text{ г/см}^3$, найдите длину ребра железного куба, если его масса: а) 975 г; б) 121 кг 875 г; в) 62,4 кг.



18. Деревянный кубоид имеет измерения 16 см, 10 см, 12 см. Какой максимальный объем будет иметь куб, сделанный из данного кубоида?



19. Мыло имеет форму кубоида, измерения которого равны 8 см, 4 см и 2 см соответственно. После 7 дней использования мыла все измерения уменьшились в 2 раза. На сколько дней хватит оставшегося куска мыла?



Задания для осмысления

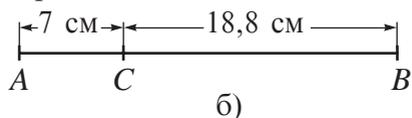
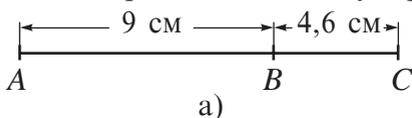
1. Какие основные геометрические понятия вы знаете?
2. Как обозначаются основные геометрические понятия?
3. Приведите примеры из окружающей среды ассоциаций с прямыми, точками, отрезками, параллельными прямыми, перпендикулярными прямыми, пересекающимися прямыми.
4. Какие отрезки называются конгруэнтными? Как они обозначаются?
5. Для чего используют линейку с делениями? А угольник? Циркуль?
6. С каким новым измерительным инструментом вы познакомились в VI классе? Для чего он нужен?
7. Как классифицируются углы?
8. Какие единицы измерения углов вы знаете?
9. Какие углы называются конгруэнтными? Как они обозначаются?
10. Какие виды ломаных линий вы знаете?
11. Что представляет собой многоугольник?
12. Какой многоугольник является самым простым?
13. Как классифицируются многоугольники?
14. Назовите элементы многоугольника.
15. Как классифицируются четырехугольники?
16. Чем отличается параллелограмм от трапеции?
17. В чем сходство квадрата и ромба?
18. Как классифицируются параллелограммы?
19. Что значит найти периметр многоугольника?
20. Как найти площадь квадрата? А площадь прямоугольника?
21. Как строится окружность? Какие элементы окружности вы знаете?
22. Чем отличаются окружность и круг?
23. Как найти длину окружности? А площадь круга?
24. Что вы знаете о числе π ?
25. Какие геометрические тела вы знаете?
26. Какие элементы куба, кубоида, пирамиды вы знаете?
27. Начертите несколько вариантов развертки куба, кубоида, пирамиды.
28. Как вычислить объем куба? А кубоида?
29. Какие плоские геометрические фигуры являются элементами изученных геометрических тел?
30. Какой вид имеют развертки круглых тел?
31. Какие элементы изученных круглых тел вы знаете?
32. Как вычисляются площади полных поверхностей изученных геометрических тел?
33. Приведите примеры строений, которые представляют собой изученные геометрические тела.

Упражнения и задачи на повторение



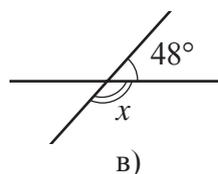
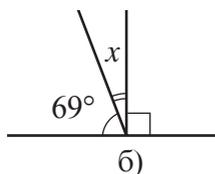
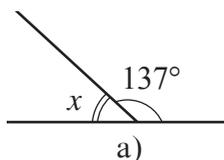
1. Постройте и обозначьте: а) две пересекающиеся прямые; б) два параллельных отрезка, пересеченных полупрямой; в) параллелограмм; г) ромб; д) трапецию, у которой боковые стороны конгруэнтны.
2. Прочитайте, а затем изобразите с помощью рисунка:
 - а) $M \in [CD]$, $CD \parallel AB$; б) $\{X, Y, Z\} \subset MN$, $MN \cap AB = \{Y\}$;
 - в) $[BA \perp [BC$, $[KM \parallel [BC$, $K \in [BA$;
 - г) $AB \parallel CD$, $KP \cap AB = \{M\}$, $KP \cap CD = \{N\}$.

3. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC .



4. Определите вид угла, зная, что его величина:
 - а) 21° ; б) 99° ; в) 135° ; г) 88° ; д) 180° .
5. Угол какого вида описывает часовая стрелка часов, показывая:
 - а) 3 часа; б) 6 часов; в) 2 часа; г) 5 часов?
6. Вычислите:
 - а) $44^\circ 38' 15'' + 29^\circ 46' 28''$; б) $66^\circ 58' 11'' + 17^\circ 24' 43''$;
 - в) $100^\circ 50' 42'' - 83^\circ 55' 28''$; г) $108^\circ 12' 14'' - 57^\circ 57' 16''$.

7. Рассмотрите рисунок и найдите значение x :

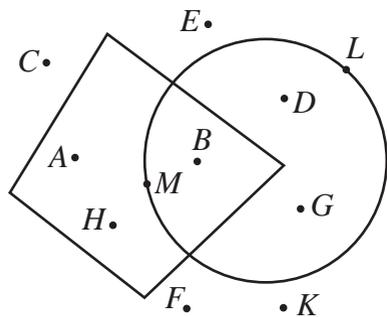


8. Постройте:
 - а) незамкнутую ломаную линию с 6-ю сторонами;
 - б) замкнутую ломаную линию с 5-ю вершинами;
 - в) замкнутую ломаную линию, которая не является многоугольником.

9. Найдите длину стороны пятиугольника, если известно, что все его стороны конгруэнтны, а периметр – 1,8 дм.

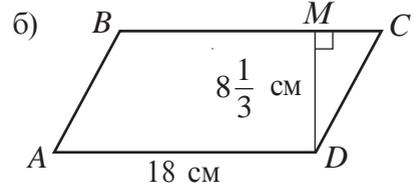
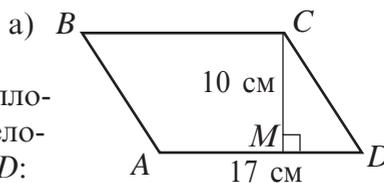
10. Рассмотрите рисунок, затем выберите точки, которые:

- а) принадлежат внутренней области четырехугольника и внешней области окружности;
- б) принадлежат окружности и внешней области четырехугольника;
- в) принадлежат внутренним областям обеих фигур;
- г) принадлежат внешним областям обеих фигур.



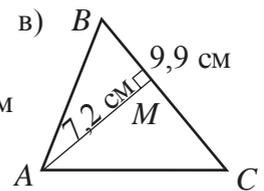
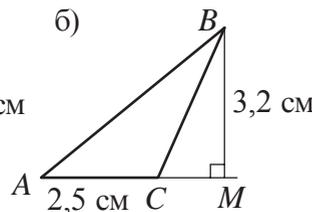
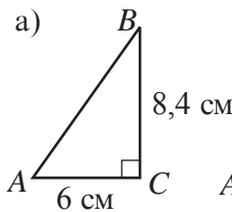
11. Вычислите периметр: а) ромба, стороны которого равны 8,3 см; б) прямоугольника, стороны которого равны 6 см и 2,4 см; в) параллелограмма, стороны которого равны 7,5 см и 3,8 см.
12. Вычислите площадь: а) квадрата со стороной 6,1 см; б) прямоугольника со сторонами 5 см и 8,2 см; в) ромба с диагоналями 0,75 см и 4 см; г) квадрата, периметр которого равен 1 м.
13. Найдите площадь круга, радиус которого равен:
а) $\frac{8}{\pi}$ см; б) 14 см; в) $\frac{1}{20}$ м.
14. Найдите объем кубоида, измерения которого равны:
а) 10 см, 11 см, 12 см; б) 4 см, $\frac{1}{8}$ см, 8 см.
15. Найдите площадь полной поверхности кубоида из задания 14.

16. Рассмотрите рисунок и вычислите площадь параллелограмма $ABCD$:



Указание: Сведите решение задачи к нахождению площади прямоугольника.

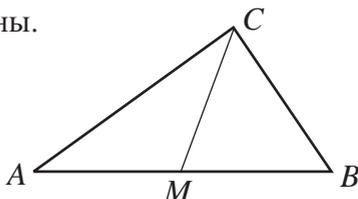
17. Рассмотрите рисунок и вычислите площадь треугольника ABC :



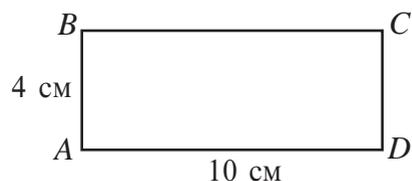
Указание: Сведите решение задачи к нахождению площади прямоугольника.

18. Найдите длины сторон прямоугольника, площадь которого равна 192 см^2 , если известно, что они относятся как 3 : 4.

19. Докажите, что если точка M является серединой стороны AB треугольника ABC , то площади треугольников AMC и BMC равны.



20. Рассмотрите рисунок и объясните, как можно разделить прямоугольник $ABCD$ на две части, площади которых относятся как 2 : 3.



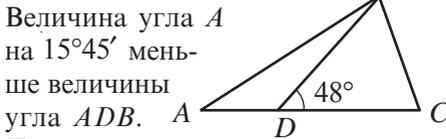


Итоговый тест

Время выполнения
работы: 45 минут

I вариант

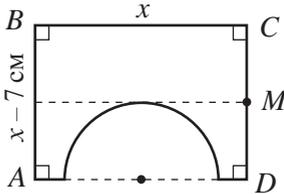
1. Рассмотрите рисунок.



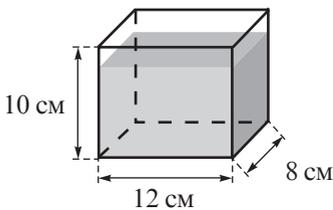
Допишите:

- а) Точки A , D и C – ...
 б) Полупрямые ... и ... – противоположные.
 в) $m(\angle BDA) = \dots$
 г) $m(\angle A) = \dots$

2. На рисунке $ABCD$ – прямоугольник, а точка M – середина стороны CD .



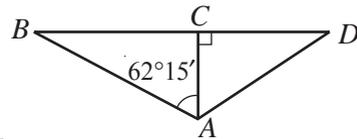
- а) Вычислите диаметр круга, частью которого является полукруг, изображенный на рисунке, если $x = 25,4$ см.
 б) Найдите периметр фигуры.
 в) Вычислите площадь фигуры.
3. В сосуд, имеющий форму кубоида с измерениями 12 см, 8 см и 10 см залили масло (смотри рисунок).



- а) Определите, на какую высоту поднимется уровень масла в сосуде, если оно занимает объем 864 см^3 .
 б) Сколько процентов объема кубоида занимает масло?
 в) Сколько весит масло, если 10 см^3 масла весят 8 г?

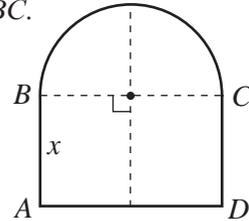
II вариант

1. Рассмотрите рисунок.

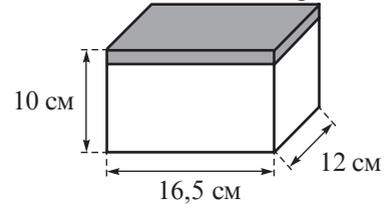


Допишите:

- а) $[CB \cup \dots = BD$.
 б) $AB \cap CD = \dots$
 в) $m(\angle ACB) + m(\angle ACD) = \dots$
 г) $m(\angle ACB) = m(\angle BAC) + \dots$
2. На рисунке $ABCD$ – прямоугольник и $AB = 0,6BC$.



- а) Вычислите диаметр круга, частью которого является полукруг, изображенный на рисунке, если $x = 14,4$ см.
 б) Найдите периметр фигуры.
 в) Вычислите площадь фигуры.
3. Слой шоколада на торте, имеющего форму кубоида (смотри рисунок), занимает 15% объема торта.



- а) Вычислите объем торта.
 б) Определите объем шоколада.
 в) Сколько весит шоколад, если 10 см^3 шоколада весят 13 г?

Схема оценивания теста

Оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Сумма баллов	27–26	25–24	23–21	20–17	16–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Глава 1

§1. 4. б) 13 км. 6. 54 м. 7. а) 212; б) 256; в) 1529; г) 390; д) 1820; е) 1540. 11. а) 3; б) 290; в) 289; г) 1100; д) 170; е) 240; ж) 6; з) 100. 12. а) 144; б) 675; в) 1; г) 4096; д) 1; е) 218; и) 5; к) 6. 13. 51 пассажир. 14. а) 6300; б) 1344; в) 630. 15. а) 1326; б) 4824; в) 3780; г) 12700; д) 105600. 17. 36 см². 18. а) 38000; б) 1050; в) 3480; г) 7420. 20. а) 1331; б) 341; в) 256; г) 800. 22. а) 10; б) 225; в) 10; г) 2401; д) 0; е) 900; ж) 256; з) 9; и) 625. 24. 93 страницы. 25. 20 мышек. 26. а) 1; б) 6; в) 1. *Указание:* Запишите 3^{20} в виде $3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5$.

§2. 2. а) {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90}; в) {15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95}.

3. а) $2456:5=491$, ост. 1; г) $1234:3=411$, ост. 1. 4. 6; 28. 5. а) 11211, 2880, 6666, 7728, 91917; б) 2880, 91917. 6. а) 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18; б) 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24; д) 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250. 7. б) 18, 36, 54, 72, 90; в) 35, 70; г) 19, 38, 57, 76, 95. 8. 311, 137, 211, 163. 9. б) $2^4 \cdot 5$; г) $2^3 \cdot 17$; д) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$. 10. б) 9; г) 12; д) 120. 11. б) $\frac{12}{31}$; в) $\frac{6}{7}$; г) $\frac{4}{5}$. 12. б) 45; в) 135; г) 36; д) 429; е) 192. 14. а) 1230, 1233, 1236, 1239; б) 2502, 2511, 2520, 2529, 2538, ..., 2592; в) 6300, 6390. 16. а) И; б) Л; в) Л; г) И. 17. В 9:00 часов. 18. 2. 19. а) И; б) Л; в) И; г) Л; д) И; е) Л. 21. а) 8 и 16; б) 9 и 36 или 18 и 27. 22. 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91. 23. Нет. 26. 15 м. 27. 22, 44, 66, 88. 28. *Указание.* Найдите [24, 40]. 31. Через 12 недель, то есть 2 августа. 32. 502.

§3. 2. в) 2,5; г) 2; д) 16; е) 6. 3. 2) в); г); е). 6. а) $S = \{6\}$; б) $S = \{55\}$; в) $S = \{20\}$; г) $S = \emptyset$; д) $S = \{1152\}$; е) $S = \{600\}$; ж) $S = \emptyset$; з) $S = \{5\}$. 8. 536 деталей. 9. 16 т. 10. а) 4 лея; б) 7 кроссвордов; в) 144 рыбы. 13. а) $3a + 3 = 30$, $S = \{9\}$. 16. а) $S = \{303\}$, $S = \{18\}$; б) $S = \{208\}$, $S = \{37\}$; в) $S = \{18\}$, $S = \{7\}$; г) $S = \{20\}$, $S = \{2778\}$; д) $S = \{430\}$, $S = \{172\}$; е) $S = \{9\}$, $S = \{11\}$. 17. а) 11 лет; б) 6 леев; в) 49. 21. а) $S = \emptyset$; б) $S = \{1\}$; в) $S = \emptyset$; г) $S = \emptyset$. 22. а) 40 автомобилей марки BMW; б) 93 книги на русском языке; в) 192 пассажира. 23. а) 27 яблонь; б) 13 коз; в) 80 леев; г) 10 гусят. 26. а) 118; б) 301. 29. 82 овцы и 18 коз. 30. Хлебный батон – 6 леев, пасхальный кулич – 30 леев. 31. 111, 112, 113. 32. 20 апельсинов, 10 мандаринов, 22 киви. 33. У Сергея – 62 лея, у Максима – 19 леев. 34. 40 кг цемента, 80 кг песка и 30 кг извести. 35. а) 37; б) 237; в) 75; г) в 25 раз. 37. а) 37,5; б) 0,125.

Глава 2

§1. 7. а) Л; в) И; г) Л; д) Л; е) И. 12. а) $M_1(-4)$; б) $M_2(0)$; в) $M_3(-7)$; г) $M_4(3)$; д) $M_5(7)$; е) $M_6(-12)$. 13. а) -11 и 11; б) -65 и 65; в) -78 и 78; г) -100 и 100. 16. а) 65, -18, 22, 30, -11, -100, 2011, 0. 20. а) 20; б) 8; в) 123; д) 0; з) 411. 21. а) 19; б) 33; в) 87; ж) 215; з) 98. 22. а) {5; 6; 9; 11; 29; 388}. 25. а) $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; г) $D = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. 28. -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, 0. 32. а) {0, 2, -5, 10}; в) {-9, 3, -1, 8}. 34. а) $a = 15$ или $a = -15$; б) $a = 123$ или $a = -123$; в) $a = 0$; г) $a = 63$ или $a = -63$. 37. а) 35; б) 14; в) 48. 39. а) $a = 12$; б) $a = 17$; в) $a = 25$. 42. а) $A = \{-2; 1; 0; 1; 2\}$; б) $B = \{-1; 0; 1\}$. 44. 1) Л; 2) И; 3) И; 4) Л.

§2. 6. б) $-18 < -17 < -16$; г) $21 < 22 < 23$; е) $18 < 18,25 < 19$. 10. а) -24, -19, -18, 15, 16, 21, 63. 13. $a > 0$. 15. а) $b > a$; б) Невозможно определить.

§3. 1. а) 10; б) -8; в) -9; г) 7. 2. а) -131; б) -35; г) -42. 6. а) -2; б) -10; в) -8; г) -13. 8. а) -6; б) -2; в) -1; г) 11; д) 12; е) -23; ж) 25; з) -1. 11. а) -9; б) 2; в) 6; г) -6; д) 8; е) 0. 13. а) 27; б) -151; в) -27; г) -16; д) -185. 14. б) -280; в) -180. 15. а) -6; б) 0; в) 15. 17. а) -10; б) -41; в) -10; г) -40. 18. а) -100; б) -200. 25. 100. 28. а) 0; б) -97778; в) -986667.

§4. 2. а) -19; б) -12; в) 0; г) -25; д) -14; е) 39; ж) 13; з) -22; и) 46. 3. а) 8; б) 12; в) 3; г) 3; д) -9; е) -6; ж) -7; з) -7; и) 2. 5. а) $AB=8$; б) $AB=9$; в) $AB=1$. 8. а) 8; б) -3; в) -18; г) 5; д) 1. 9. а) -8; б) -11; в) 2. 16. $C(4)$ и $AC=16$.

§5. 2. а) -54; б) -105; в) 44; г) -17; д) 0. 7. а) -1 800; б) -560; в) 0; г) 960. 8. а) 1; б) -32. 12. а) -3; б) -12; в) -5; г) 12. 13. а) -12 600; б) 1 000; в) -1 300; г) -29. 14. а) -1 210; б) -17 200; в) 15 000; г) -15 000. 18. а) -1 188; б) -1 919; в) 1 485; е) -14 443.

§6. 2. а) -13; б) 4; в) -7; г) -12; д) -19; е) -27; ж) 0; з) 51; и) -11. 4. а) 16; б) -4; в) 6; г) -8. 6. а) 3; б) -3; в) -4; г) -2. 8. В 12:00 часов. 9. а) -29; б) -6; в) 25; г) 3.

§7. 3. а) 1; б) 625; в) -1; г) 1; д) -343; е) 3 600; ж) 10 000. 9. а) -67; б) -1 010; г) 118. 10. а) 1 942; б) -363; в) -370. 15. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 18. а) 9; б) 7; в) 12; г) 8; д) 4; е) 3; ж) 8. 19. а) 1 000; б) 144; в) -7; г) 16; д) -1 000; е) 144; ж) 216; з) 100. 20. в) -815; г) 1 780. 23. а) $S = \{-2, 2\}$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \{-2\}$.

§8. 3. а) $S = \{-3\}$; б) $S = \{85\}$; в) $S = \{-1912\}$. 4. а) $S = \{-170\}$; б) $S = \{1992\}$; в) $S = \{-747\}$. 5. а) $S = \{27\}$; б) $S = \{-11\}$; в) $S = \{6\}$. 6. а) $S = \{160\}$; б) $S = \{380\}$; в) $S = \{342\}$. 7. а) $S = \{-24\}$; б) $S = \{100\}$; в) $S = \{-20\}$. 12. а) $S = \{4\}$; б) $S = \{5\}$; в) $S = \{-2 592\}$. 15. На I полке - 42 книги; на II полке - 57 книг; на III полке - 30 книг. 16. В I ящике - 24 кг; во II ящике - 12 кг; в III ящике - 9 кг. 20. а) $S = \{-18, 18\}$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \{-2, 5\}$; г) $S = \{5\}$.

Упражнения и задачи на повторение

4. а) 0; б) 0; в) 13. 6. а) $S = \{-4\}$; б) $S = \{-9\}$; в) $S = \{3\}$; г) $S = \{20\}$; д) $S = \{-3\}$; е) $S = \{-5\}$. 11. а) 35; б) -99; в) -11. 14. а) -14; б) -1. 17. а) $S = \{-5, 5\}$; б) $S = \{-7, 7\}$; в) $S = \emptyset$; г) $S = \{-6, 6\}$; д) $S = \{-4, -2\}$; е) $S = \{-3, 17\}$.

Глава 3

§1. 5. а) 4, 5; б) 0, 1; в) -1, 0, 1; г) -3, -2, -1, 0, 1, 2. 8. а) 10,6; б) 0,9; в) 10,24; г) $\frac{29}{48}$; д) $\frac{1}{8}$; е) 80. 9. а) $\frac{61}{5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{20}$; г) $-\frac{77}{25}$; д) $\frac{7}{8}$; е) $-\frac{12}{25}$; ж) $-\frac{48}{25}$; з) $\frac{3}{8}$. 10. а) $1\frac{1}{2}$; б) $-3\frac{1}{5}$; в) $5\frac{1}{4}$; г) $-3\frac{1}{8}$; д) $-7\frac{1}{200}$; е) $4\frac{1}{80}$. 11. д) 2,75; е) 0,35; ж) 0,04. 16. а) 5 и 6; б) -3 и -2; в) -10 и -9; г) -12 и -11; д) 0 и 1; е) -1 и 0. 23. а) -2,5; в) -3,7; г) -1,9; д) $-\frac{1}{6}$; е) $\frac{3}{20}$; ж) $-1\frac{8}{21}$; и) $-2\frac{11}{12}$; к) $-4\frac{3}{40}$; м) $-4\frac{3}{14}$; н) $\frac{13}{20}$; п) $-1\frac{5}{24}$; р) $1\frac{1}{8}$. 28. а) 4,26; б) $\frac{7}{12}$; в) 0,39; г) -13. 29. а) 0,4; в) $-2\frac{1}{8}$; г) 1; з) $1\frac{1}{2}$. 30. а) 0,96; б) -45; в) 2,4; г) $-\frac{2}{7}$; е) -6. 32. На 11,165 км. 34. а) -3; б) -20; в) 7,2; г) -9; д) 4; е) 0,3. 35. 40,5 лея. 36. 36,5 кг. 37. а) -3,56; б) -12,51; в) 0,3; г) -1,23. 38. а) $-\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{7}$; в) -1,9; г) -7. 40. 160 км. 42. 36. 43. 18 автомобилей. 44. 21 км. 46. 18 леев. 47. 28 учеников. 48. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; б) $(-1,3)^3$; в) $\left(-\frac{3}{5}\right)^5$. 49. а) И; б) Л; в) И; г) И; д) И. 50. а) $\frac{44}{45}$; б) -2; в) $\frac{5}{6}$. 52. а) -5,7; 7,3; $\frac{3}{4}$; $-7\frac{1}{3}$; 0,02; б) $\frac{10}{57}$, $-\frac{10}{73}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{3}{22}$, -50. 58. $\text{Card}A > \text{card}B$. 61. а) -2,754; б) -0,4; в) 0,01; г) -0,475. 64. а) -1,4; б) 5; в) -1,4; г) 1,4; д) 5. 68. а) $1\frac{37}{40}$; б) $-3\frac{1}{4}$. 70. а) -89; б) 12; в) -17; г) -323. 71. Второй муравей. 73. 95 кг. 74. Да. 75. 0,5 кг. 76. 105 учебников. 77. 420 см; 11016 см². 78. а) $1\frac{7}{9}$; б) $-1\frac{3}{5}$; в) $-\frac{1}{180}$. 80. 0,4 м. 82. 9 упаковок. 86. Знак +. 89. Одинаковое количество. 90. 27 персиков. 93. 0,7 кг.

§2. 1. а) 2,9 м и 4,5 м. 2. а) 340 леев; б) альбом стоит 11,5 леев; книга стоит 11,5 леев.
 3. 480,5. 5. а) 6 цыплят и 14 кроликов; б) 16 книг по 50 страниц и 6 книг по 90 страниц.
 6. а) На 2 года; б) 102 книги на испанском языке, 152 книги на французском языке и 204 книги на английском языке. 7. 560 м. 9. 75 гусей, 25 уток и 20 телят.
 §3. 2. а) $A = \{257, 275, 527, 572, 725, 752\}$; б) $\text{card } A = 6$. 4. а) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$; б) $\text{card } M = 12$. 6. а) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; б) $\{1, 3, 4, 5, 7\}$; д) $\{5\}$; з) \emptyset ; и) $\{4\}$; к) $\{2, 8\}$.
 7. а) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; б) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$; в) $\{0, 1, 4, 9, 16\}$. 8. а) $\{0, 1, 2\}$; б) $\{1, 2\}$; в) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$. 9. 3 куста. 11. а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$; б) $\{2, 4, 6\}$; в) \emptyset ; г) $\{2, 4, 6, 12\}$; д) $\{1, 3, 12\}$. 12. 410 учеников. 16. 3 ученика.

Упражнения и задачи на повторение

3. а) 0; б) 0. 4. 15 роз. 5. 32 ученика. 9. $\frac{8}{10}, \frac{20}{25}, \frac{24}{30}$. 10. а) И; б) Л; в) И; г) Л. 12. а) $1\frac{2}{5}$; б) $2\frac{6}{11}$; в) $16\frac{1}{3}$; г) $3\frac{4}{7}$; д) $2\frac{6}{19}$; е) $3\frac{5}{42}$. 15. а) $\frac{8}{24}$; б) $\frac{20}{24}$; в) $\frac{9}{24}$; г) $\frac{14}{24}$; д) $\frac{5}{24}$. 19. $4\frac{29}{30}$ м.
 20. $25\frac{7}{8}$ км/ч. 21. $6\frac{3}{20}$ л. 22. $2\frac{7}{20}$ кг. 23. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 1. 24. а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{6}$; д) $\frac{13}{28}$; е) $\frac{6}{35}$; ж) $\frac{1}{18}$; з) $\frac{7}{36}$; и) $\frac{13}{60}$; к) $\frac{17}{24}$. 25. а) $6\frac{1}{35}$; б) $2\frac{1}{30}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $7\frac{5}{11}$; ж) $3\frac{5}{8}$; з) $\frac{43}{60}$.
 26. $2\frac{2}{3}$ кг. 27. $7\frac{4}{9}$ кг. 29. $\frac{8}{21}$. 30. а) $\frac{13}{42}$; б) $1\frac{1}{60}$; в) $\frac{1}{10}$. 31. а) $4\frac{1}{5}$; б) $1\frac{5}{7}$; в) $1\frac{1}{5}$; г) $\frac{3}{10}$; д) $\frac{7}{30}$; е) $\frac{21}{44}$; ж) $\frac{7}{36}$; з) $\frac{1}{8}$; и) $\frac{3}{10}$; к) $\frac{7}{15}$. 34. а) $4\frac{3}{8}$; б) $4\frac{8}{9}$; в) $2\frac{5}{8}$; г) $37\frac{1}{2}$. 35. а) $2\frac{1}{3}$; б) $6\frac{2}{3}$; в) 0. 36. 23 км/ч. 37. $12\frac{4}{5}$ м². 41. а) $1\frac{1}{3}$; б) 9; в) 4; г) $1\frac{3}{7}$; д) 77; е) $\frac{3}{13}$; ж) $\frac{1}{3}$; з) 2; и) $2\frac{1}{10}$; к) $3\frac{3}{7}$.
 42. $\frac{25}{676}$ м². 43. $94\frac{1}{2}$ км/ч. 44. $7\frac{4}{5}$ кг. 49. а) 3 и 4; б) 7 и 8; в) 25 и 26; г) 0 и 1. 51. а) 16,12; б) 15,258; в) 30,644; г) 16,032. 52. 26,1 км/ч. 53. 0,4 кг. 54. а) 23,39; б) 12,423; в) 15,899; г) 23,643. 55. а) 37,287; б) 6,66; в) 91,89; г) 0,814. 59. 47,7 кг. 60. а) 3,628; б) 1,478; в) 21,773; г) 2,31. 62. а) 0,608; б) 0,3654; д) 0,024. 66. $\mathcal{P} = 21$ м; $\mathcal{A} = 25,46$ м². 67. а) 3,45; г) 19,55; е) 0,125; ж) 0,238. 68. 168 леев и 60 банов. 69. 352,5 км. 70. а) 8; б) 2,2; в) 18; з) 3000. 71. Во второй день. 73. а) 1; б) $5\frac{5}{8}$. 74. а) 5; б) 4,1. 75. 400 птиц. 78. а) $\frac{53}{300}$; б) $\frac{989}{1512}$; в) $1\frac{3}{5}$; г) $1\frac{1}{2}$. 80. а) $1\frac{3}{10}$; б) $\frac{9}{14}$; в) $\frac{3}{14}$; г) $2\frac{1}{10}$; д) $\frac{1}{4}$; е) 1. 81. а) $1\frac{4}{5}$; б) $7\frac{1}{12}$. 86. $16\frac{11}{18}$ кг.
 87. а) $1\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$. 88. $1\frac{1}{2}$ мин. 91. На 14,33 км. 98. а) 5,8; б) 1,0647; в) 10,7663; г) 74,82. 99. За сливы, на 20 леев 20 банов. 103. а) 31,03; б) 25,18; в) 9,76; г) 2,84. 105. 6,3 см. 106. Да. 108. а) 22,4 м²; б) 6 рулонов. 112. 4 км. 114. а) $2\frac{8}{9}$; б) $\frac{7}{13}$. 116. $1\frac{5}{18}$ дм². 117. 2 рулона. 119. а) 0,096 г. 120. 20,4 км/ч.

Глава 4

§1. 2. а) $\frac{1}{3}, \frac{14}{5}, \frac{4}{1}$. 5. а) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{10}{25} = \frac{18}{45}$; б) $\frac{9}{4} = \frac{18}{8} = \frac{4,5}{2} = \frac{36}{16} = \frac{45}{20}$. 7. а) $x > y$; б) $x < y$; в) $x > y$; г) $x > y$. 10. а) „<“; б) „<“; в) „=“; г) „<“”. 13. а) 5,625; б) 4; в) 2,65; г) 7. 16. а) 20; б) 20; в) 8; г) 0,0028. 18. 0,6. 20. 0,25. 21. 75 г. 24. 750 кг. 25. а) 15 м; б) 1,49. 26. а) 4,14 г/см³; б) 1300 кг/м³; в) 6500 кг/м³. 27. 10,5 леев. 28. а) 2,8; б) -1. 29. $\frac{5}{9}$. 30. 84 км/ч. 31. $AC = 7$ см, $BC = 8$ см. 32. а) 45 г; б) 0,09. 33. 0,125. 34. Да. 37. 100 м. 39. а) $x = 1000, y = 520, z = 500$; б) $x = 70, y = 130, z = 1820$. 40. 10. 41. $a = 100, b = 300, c = 600$. 42. 3080 леев. 44. 5.

§2. 4. а) 1; б) 18; в) 12,5; г) 18; д) 1,2. 6. 6 решений. Одно из решений: а) $\frac{5,89}{6,08} = \frac{6,2}{6,4}$;
 б) $\frac{21}{37,8} = \frac{44}{79,2}$; в) $\frac{675}{1080} = \frac{1240}{1984}$; г) $\frac{0,06}{0,08} = \frac{0,3}{0,4}$. 7. б) $\frac{12}{8} = \frac{18}{12}$. 8. а) Да, так как $5 \cdot 18 = 6 \cdot 15$;
 б) да; в) нет; г) да; е) нет. 10. а) 1,5 км; б) 1,3 км; в) 4 км; г) 1,65 км. 11. б) 5,575;
 в) $2\frac{71}{180}$; г) 14. 12. а) 16; б) $ac = 60, bd = 15$. 14. 1200 см. 17. 70 кг.

§3. 1. а) Да; б) нет; в) да; г) да. 3. а) И; б) Л; в) Л; г) И. 4. а) За 6 дней; б) за 10 дней. 5. а) 9,6 кг;
 144 кг; 200 г; б) 0,875 л; 3,75 л. 6. а) 5 мин 20 с; б) 25 л; 45 л; 300 л. 7. Для 6 порций:
 450 г капусты, 150 г колбасы, 9 яиц, 150 г ветчины, 120 г майонеза, 3 луковицы. 8. а) 5 г;
 б) 20 г. 9. а) 9,36 г; б) 15,328 г. 11. а) 37,5 кг; 22,5 кг; б) 300 л; 60 л. 14. а) $x = 1000$ леев,
 $y = 1860$ леев, $z = 2108$ леев. 15. $9 \cdot 200 = 2100 + 3300 + 3800$. 16. 9,84 см. 17. а) 126 л; б) 94,5 л;
 в) 18,9 л. 18. а) 36,4 лея; б) 91 лей. 20. а) 261 лей; б) 43,5 лея; в) 290 леев. 21. 9; 10,5; 18.
 22. Из 240 кг. 23. Из 1200 кг. 25. 12,8 м. 26. 15, 20, 25. 27. 15000, 30000, 45000.

§4. 1. а) Да; б) нет; в) да; г) да. 3. а) И; б) Л; в) И; г) Л. 4. 32 км/ч. 5. 4 дня. 6. 15 рабочих.
 7. а) 12 ч; 4 ч; 48 ч; б) 16 человек; 3 человека; 48 человек. 8. а) 10 мин; б) 6 мин 40 с.
 9. а) 75 банок; б) 20 банок; в) 50 банок. 10. а) 48 минут; б) 45 минут; в) 72 минуты. 11. 20 полок.
 12. 4 мин 48 с. 14. 240, 180, 144. 15. 15 грузовиков. 17. а) $y = \frac{12}{x}$. 19. 4 км 800 м.

§5. 3. а) 10%; б) 20%; в) 26%. 5. а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 10%; д) 0,5%; е) 0,1%. 6. а) 62%;
 б) 83%; в) 98,89%. 7. а) 50%; б) 25%; в) 75%; г) 40%; д) 48%; е) 45%; ж) 0,5%; з) 54%;
 и) 0,75%; к) 175%; л) 150%; м) 37,5%. 8. а) 4%; б) 50%; в) 25%; г) 97%; д) 101%;
 е) 223%; ж) 20,4%; з) 679,1%; и) 33,(3)%; к) 1060%; л) 512,3%; м) 100%. 9. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{5}$;
 в) $\frac{6}{25}$; г) 1; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{3}{5}$; ж) $\frac{3}{20}$; з) $\frac{1}{20}$; и) $\frac{13}{2}$; к) $\frac{1}{200}$; л) $\frac{1}{400}$; м) $\frac{3}{400}$; н) $\frac{11}{5}$. 10. а) 0,03; б) 0,07;
 в) 0,18; г) 0,44; д) 0,009; е) 0,0025; ж) 0,394; з) 0,621; и) 0,4159; к) 0,5648. 12. а) 22%; б) 40%;
 в) 25%; г) 37,5%; д) 0,05%; е) 1%; ж) 80%; з) 100%; и) 0,1(6)%. 13. АРИСТОТЕЛЬ.
 14. 24 г. 15. 25%. 16. а) 40%; б) 60%; в) 36%; г) 40%. 19. На 50%. 20. а) 3960 леев;
 б) 102,6 лея; в) 1500 бланков; г) 150 га; д) 1) 18,75%; 2) 81,25%. 22. а) Да.

§6. 1. а) 2; б) 4; в) 20; г) 48; д) 1,5 лея; е) 6 см; ж) 18 долларов; з) 144; и) 342; к) 256; л) 385 леев;
 м) 138,6 лея. 2. б) 200; в) 128; г) 800; д) 80; е) 80; ж) 200; з) 125; и) 225. 3. а) 300 леев; б) 120 леев;
 в) 140 м; г) 72 см; д) 10300 леев; е) 13800 леев; ж) 1 м 1 мм; з) 1 л 90 мл. 5. а) 5%; б) 10%;
 в) 25%; г) 9%. 7. а) Л; б) И; в) Л; г) И. 8. 1 м 47 см. 9. 168 детей. 10. 2736000 избирателей.
 11. $\approx 8,26\%$. 12. 800 г. 13. На 1,495%. 14. На 56%. 15. 72%. 16. б) 21 мальчик. 17. $3\frac{1}{3}\%$.
 18. 54292. 19. 12 мальчиков. 21. 720 г. 22. 2,7%. 23. а) 1,98%. 24. 20%. 27. 1500 леев.
 28. 1000 леев. 29. 60%. 31. а) 250%; б) 83,(3)%; в) 600%; г) 13,(3)%. 32. Одновременно.

§7. 5. а) Конфета красного цвета; б) конфеты желтого и зеленого цвета. 7. а) 2500 учеб-
 ников; в) в среду, понедельник, четверг и пятницу. 8. в) До обеда. 12. в) Да. 13. а) 10,05;
 б) $1\frac{11}{14}$; в) 4. 15. 12 лет. 16. 1,29 кг. 17. 32 года. 25. 2,06 м. 26. Нет. 28. а).

Упражнения и задачи на повторение

1. а) 0,4; б) 3,5; в) 0,36; г) 1,5. 3. а) $a < b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$; д) $a < b$;
 е) $a < b$. 4. а) 1; б) $\frac{7}{92}$. 6. а) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24} = \frac{30}{36} = \frac{10}{12} = \frac{7,5}{9}$; б) $\frac{3,5}{0,5} = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{8,4}{1,2} = \frac{67,2}{9,6} = \frac{49}{7}$.
 7. а) Пшеничная мука дороже; б) томатный сок дороже; в) керамическая плитка дороже;
 г) оцинкованная труба дороже. 8. а) $\frac{8}{9} = \frac{16}{18}$; б) $\frac{7,5}{6} = \frac{5}{4}$; в) $\frac{2,4}{0,96} = \frac{4}{1,6}$; г) $\frac{10}{0,4} = \frac{2}{0,08}$.

9. а) Да; б) да; в) нет; г) да. 10. а) 9 л; 21,6 л; 60 л; б) 37,5 л; 5 л; $4\frac{1}{6}$ л. 11. 15 часов. 13. $\frac{9}{11}$.
 14. а) 25%; б) 28%; в) 90%; г) 750%; д) 91%; е) 214%; ж) 125%; з) 262,5%. 15. а) 41,(6)%;
 б) 66,(6)%; в) 62,5%; г) $63\frac{3}{19}$ %. 16. а) 153 лея; б) 192 лея; в) 2 625 леев; г) 1 924 лея.
 17. 87%. 20. 300 W; 480 W. 21. 9 см. 22. а) Пакет *Стандарт*; б) За пакет *Стандарт*,
 господин Копейкин заплатит 17,07 лея, а Иван – 21,33 лея. За пакет *Эконом*, господин
 Копейкин заплатит 29,33 лея, а Иван – 36,67 лея. 23. Одинаковая цена: 340 леев/м².
 24. 5. 25. 6 и 9. 26. 8 и 12. 27. 14,8 и 2,5. 28. а) 4,5; б) 0,75; в) 80; г) 2,4. 29. а) 48; б) 30; в) 4;
 г) 80. 30. На 45%. 31. 4860 леев. 32. 12,5 г. 33. 200 г. 34. 1400 леев. 35. 26, 27, 28.
 36. 8. 39. *A* – 600 000 леев; *B* – 180 000 леев; *C* – 300 000 леев; *D* – 120 000 леев. 42. На
 25%. 43. а) 125%; б) 44,(4)%. 44. а) 5; б) 25. 45. а) $1\frac{2}{9}$; б) $\frac{2}{11}$; в) $\frac{2}{9}$; г) $1\frac{1}{6}$. 46. 3.

Глава 5

§1. 8. а) 18,8 см; б) 24 см; в) 39,6 см; г) 16,2 см. 11. 12 способов: *AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC*. 12. 20 см. 13. 12 см. 14. На 7 частей. 15. *C*(-2,5; -2), *D*(-2; 2),
E(2,5; -2), *F*(5; 2,5), *G*(2; 3), *H*(-3; 1), *L*(-1; 4,5), *K*(5; 1).

§2. 11. а) 90°; б) 180°; в) 150°; г) 60°. 12. а) 125°; б) 22°; в) 71°. 13. а) 5 мин; б) 10 мин;
 в) 22 мин 30 с; г) 10 с. 14. а) 65°7'; б) 82°42'; в) 24°7'; г) 3°8'. 15. а) 36°; б) 72°; в) 144°;
 г) 108°. 17. а) 22°30'; б) 48°30'; в) 151°16'; г) 134°58'. 18. а) 28°56'24"; б) 40°9'; в) 34°27';
 г) 89°13'12". 19. а) 75°; б) 111°; в) 112°30'; г) 33°; д) 46°30'. 20. а) 136° и 44°; б) 68° и 112°.
 21. 22° и 68°. 22. 34° и 146°. 23. 130° и 50°. 24. а) И; б) Л; в) И; г) И. 25. 20°, 20°, 160°, 160°.
 26. а) $m(\angle BOC) = m(\angle AOD) = 156^\circ$, $m(\angle COD) = 24^\circ$.
 27. $m(\angle AMN) = m(\angle MND) = m(\angle CNK) = 63^\circ$,
 $m(\angle AMP) = m(\angle BMN) = m(\angle CNM) = m(\angle DNK) = 117^\circ$.

§3. 4. а) 19 см; б) 4,5 см. 5. а) 5 диагоналей; б) 9 диагоналей. 6. а) 64 см²; б) $10\frac{9}{10}$ см²;
 в) 4,2025 см²; г) 53,(7) см². 7. а) 60 см²; б) 20,4 см²; в) 50 см². 11. а) 14 см; б) 11,(1) см;
 в) 119,8 см; г) 20,(4) см.

§4. 6. б) 12,8π см; в) 2 см. 7. б) $7\frac{9}{16}\pi$ см²; в) $\frac{81}{\pi}$ см². 8. б) 0,49π см²; в) $\frac{25}{\pi}$ см². 11. а) При-
 надлежит внутренней области окружности; б) принадлежит окружности; в) принадлежит
 внешней области окружности; г) принадлежит внутренней области окружности. 12. а) 2;
 б) 0; в) 1; г) 0. 14. а) 8π см; б) 3π см; в) $5\frac{1}{7}\pi$ см. 16. а) 8π см²; б) 9π см²; в) 48π см².

§5. 4. а) 1000 см³; б) $18\frac{26}{27}$ см³. 5. а) 120 см³; б) 104 см³. 6. б) $160\frac{1}{6}$ см². 7. б) $91\frac{1}{3}$ см².
 12. а) 305 см³; б) 1120 см³. 13. 2,35 м. 14. 31 980 кг. 15. 4,8 м. 16. ≈ 7 кг 20 г. 17. а) 5 см;
 б) 25 см; в) 20 см. 18. 1000 см³. 19. На один день.

Упражнения и задачи на повторение

3. а) 6,8 см; б) 12,9 см. 4. а) Острый; б) тупой; в) тупой; г) острый; д) развернутый.
 5. а) 90°; б) 180°; в) 60°; г) 150°. 6. а) 74°24'43"; б) 84°22'54"; в) 16°55'14"; г) 50°14'58".
 7. а) 43°; б) 21°; в) 132°. 11. а) 33,2 см; б) 16,8 см; в) 22,6 см. 12. а) 37,21 см²; б) 41 см²;
 в) 0,0625 см². 13. а) $\frac{64}{\pi}$ см²; б) 196π см²; в) $\frac{\pi}{400}$ см². 14. а) 1320 см³; б) 4 см³. 15. а) 724 см³;
 б) 66 см³. 16. а) 170 см²; б) 150 см². 17. а) 25,2 см²; б) 4 см²; в) 35,64 см². 18. 16 см и 12 см.

Содержание

Глава 1. Натуральные числа.

Повторение и дополнения

§ 1. Множество натуральных чисел	4
§ 2. Делимость	13
§ 3. Решение уравнений на множестве \mathbb{N}	23
<i>Задания для осмысления</i>	35
<i>Итоговый тест</i>	36

Глава 2. Целые числа

§ 1. Множество целых чисел	38
§ 2. Сравнение и упорядочивание целых чисел	48
§ 3. Сложение целых чисел	52
§ 4. Вычитание целых чисел	58
§ 5. Умножение целых чисел	63
§ 6. Деление целых чисел	67
§ 7. Степень целого числа с натуральным показателем. Порядок выполнения действий	70
§ 8. Решение уравнений на множестве \mathbb{Z}	77
<i>Задания для осмысления</i>	81
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	82
<i>Итоговый тест</i>	84

Глава 3. Рациональные числа

§ 1. Множество рациональных чисел	86
§ 2. Решение задач на множестве \mathbb{Q}	115
§ 3. Множества. Операции над множествами	121
<i>Задания для осмысления</i>	127
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	128
<i>Итоговый тест</i>	142

Глава 4. Отношения и пропорции

§ 1. Отношения	144
§ 2. Пропорции	156
§ 3. Прямо пропорциональные величины	162
§ 4. Обратно пропорциональные величины	169
§ 5. Проценты	175
§ 6. Решение задач на проценты	181
§ 7. Элементы теории вероятности и представления данных	186
<i>Задания для осмысления</i>	194
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	195
<i>Итоговый тест</i>	200

Глава 5. Элементы геометрии

§ 1. Основные геометрические понятия	202
§ 2. Углы	208
§ 3. Многоугольники	217
§ 4. Окружность. Круг	224
§ 5. Геометрические тела	229
<i>Задания для осмысления</i>	235
<i>Упражнения и задачи на повторение</i>	236
<i>Итоговый тест</i>	238
Ответы	239

Математика



Издательство Prut предлагает
для VI класса серию книг по математике:

Учебник

Сборник задач и упражнений

Пособие для учителей

ISBN 978-9975-54-524-2



9 789975 545242

www.edituraprut.md