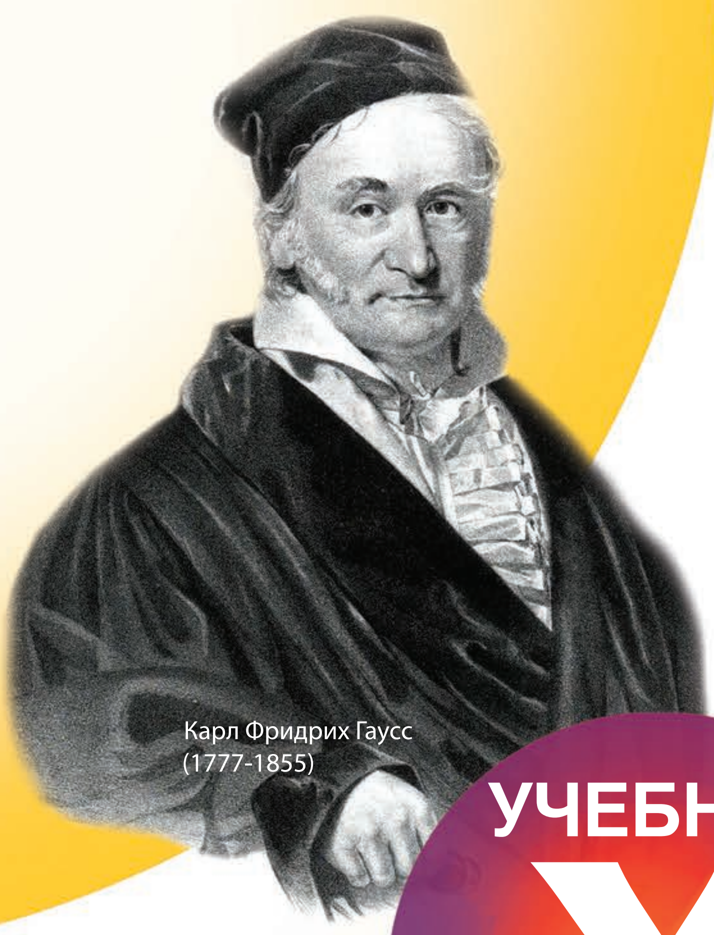
МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион АКИРИ Валентин ГАРИТ Петру ЕФРОС Николае ПРОДАН

МАТЕМАТИКА



Карл Фридрих Гаусс
(1777-1855)

УЧЕБНИК
X
класс

PRUT INTERNATIONAL

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион АКИРИ   Валентин ГАРИТ   Петру ЕФРОС   Николае ПРОДАН

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

X

класс

PRUT INTERNATIONAL

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova nr. 357 din 11 mai 2012.
Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul ....
Manualul nr. ....

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului care a primit manualul	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Profesorii vor controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu trebuie să facă nici un fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Comisia de evaluare:
Dorin Afanas, doctor, conferențiar universitar, UST
Ana Gangan, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „G. Călinescu”, Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Autori:
Ion Achiri, doctor, conferențiar universitar, IŞE (Modulele 4, 6, 7)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 9)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 9)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 1, 2, 3, 5, 7)

Traducere din limba română: *Ion Achiri*, *Petru Efros*, *Valentin Garit*, *Nicolae Prodan*
Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Lidia Paşa*
Coperta: *Sergiu Stanciu, Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu, Iana Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 83, Chişinău, MD 2071
Tel.: 75 18 74; tel./fax: 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro

Difuzare: Societatea de Distribuție a Cărții *PRO NOI*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: 51 68 17, 51 57 49; www.pronoi.md; e-mail: info@pronoi.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 7330

CZU 51(075.3)
M 34

ISBN 978-9975-54-052-0

Предисловие

Настоящий учебник составлен в соответствии с действующим куррикулумом для лицеев. Структура и концепция данного пособия позволят реализовать цели, предусмотренные куррикулумом для X класса.

Учебник разбит на модули. Для ориентации в начале каждого модуля приводятся основные цели, которые могут быть достигнуты в процессе его изучения. Цели, обозначенные звездочкой (*), предназначены лишь для реального профиля. Учебник содержит разделы по алгебре, геометрии, математической логике, комбинаторике, теории множеств, тригонометрии.

Учебник дает возможность реализовать на практике принцип конструктивности и формирующий принцип, положенные в основу реформы математического образования. С этой целью авторы уделили особое внимание как взаимосвязи понятий различных разделов, так и систематическому повторению основных понятий, раскрывая их различные аспекты. Для понимания и осмысления понятий приведены мотивационные задачи, а также примеры применения этих понятий в других областях человеческой деятельности, включая повседневную жизнь. С этой же целью в конце каждого модуля приведены понятийные карты (итоговые таблицы), которые помогут систематизировать материал и выделить главные связи между понятиями или между различными составляющими одного и того же понятия.

Структура учебника разработана с учетом преподавания математики как для реального профиля, так и для гуманитарного. Отметим, что **материал, предусмотренный только для реального профиля, обозначен вертикальной чертой слева. Для гуманитарного профиля этот материал предлагается как дополнительный**. Кроме того, в соответствии с образовательными целями, упражнения и задачи, приведенные в конце каждого параграфа (в частности, для некоторых пунктов), а также в конце каждого модуля, классифицированы по профилям: **А** и **Б**. Задания, обозначенные буквой **А**, предназначены для учащихся обоих профилей, а обозначенные буквой **Б** – для учащихся реального профиля. Более сложные задания, обозначенные звездочкой (*), не обязательны для учеников данного профиля. Проверочные работы предложены по профилям: гуманитарный профиль, искусство и спорт (**А**); реальный профиль (**Б**).

Учебник поможет в организации самостоятельной работы учеников. Система мотивационных примеров, примеров для закрепления, а также для применения понятий позволит ученикам лучше осмыслить и усвоить как новые понятия, так и некоторые аспекты уже известных (например, монотонность и экстремумы функций, уравнения и неравенства новых типов и др.). Для формирования обозначенных компетенций рекомендуем рассмотреть задания с решением, а также выполнить предложенные в учебнике задачи и упражнения.

Каждый модуль учебника завершается упражнениями и задачами на повторение, которые, как правило, имеют более высокий уровень внутри- и межпредметной интеграции. Решение этих заданий эффективно способствует формированию специфических компетенций по математике.

Учебник позволит ученикам, увлеченным математикой, расширить свои знания посредством усвоения дополнительных понятий и решения более сложных заданий.

Авторы

МОДУЛЬ 1 Действительные числа. Повторение и дополнения

Математика – царица всех наук,
а арифметика – царица математики.
Карл Фридрих Гаусс

Цели

- распознавание элементов изученных числовых множеств ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) и различные формы записи действительных чисел;
- применение терминологии, соответствующей понятию числа;
- переход от одной к другой форме записи действительных чисел;
- геометрическое изображение действительных чисел;
- сложение, вычитание, умножение, деление действительных чисел;
- применение свойств операций над действительными числами для упрощения вычислений;
- сравнение действительных чисел различными способами;
- нахождение десятичных приближений действительных чисел с недостатком или избытком с заданной точностью;
- применение модуля действительного числа в различных ситуациях.

§1 Рациональные, иррациональные, действительные числа

Напомним, что через K^*, K_+, K_- обозначают соответственно множество ненулевых чисел, множество положительных чисел, множество отрицательных чисел числового множества K.

Известно, что любое рациональное число можно записать в виде десятичного числа, и наоборот.

Примеры

а) $\frac{23}{1000}=0{,}023;$ б) $\frac{1}{3}=0{,}33...=0,(3);$ в) $\frac{1046}{495}=2{,}1(13);$

г) $0{,}023=\frac{23}{1000};$ д) $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$ е) $2{,}1(13)=2+0{,}1(13)=2+\frac{113-1}{990}=\frac{1046}{495}.$

Ряд задач можно решить с помощью числовых множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Однако рациональные числа недостаточны для решения некоторых задач.

Задача. Найдем длину диагонали прямоугольника, длины сторон которого равны 1 и 2.

Решение:

Пусть a – длина диагонали прямоугольника. Тогда, согласно теореме Пифагора, $a^2=1^2+2^2=5$. Попробуем найти решение этой задачи на множестве рациональных чисел. Пусть $a=\dfrac{m}{k}\in\mathbb{Q}$ – несократимая дробь. Тогда $\left(\dfrac{m}{k}\right)^2=5$, откуда следует, что $m^2=5k^2$ и $m^2\,\vdots\,5$, то есть $m\,\vdots\,5$ и $m=5t,\ t\in\mathbb{N}$. После подстановки в $m^2=5k^2$ получаем $25t^2=5k^2\Leftrightarrow 5t^2=k^2$, то есть $k\,\vdots\,5$. Следовательно, дробь $\dfrac{m}{k}$ сократима на 5, вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что число a не является рациональным, поэтому данная задача неразрешима на множестве $\mathbb{Q}$.

Таким образом, длина диагонали является нерациональным числом, квадрат которого равен 5, значит, его можно записать в виде $\sqrt{5}$.

Для записи числа $\sqrt{5}$ в виде десятичного числа, вычислим его приближенные значения, используя его *десятичные приближения с недостатком и избытком*. Так как $2^2<5<3^2$, то $2<\sqrt{5}<3$. Числа 2 и 3 являются десятичными приближенными значениями числа $\sqrt{5}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 1. Разделим отрезок [2, 3] на 10 равных частей и подберем числа 2,2 и 2,3, удовлетворяющие двойному неравенству $(2{,}2)^2<5<(2{,}3)^2$. Числа 2,2 и 2,3 являются десятичными приближениями числа $\sqrt{5}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-1}. Аналогично найдем десятичные приближения 2,23 и 2,24 числа $\sqrt{5}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-2}. Этот алгоритм может быть продолжен до бесконечности, так как квадраты полученных рациональных чисел отличны от 5 (доказали, что $\sqrt{5}$ не является рациональным числом). Полученное десятичное число 2,23... имеет бесконечное число десятичных знаков и не является (по той же причине) периодическим десятичным числом. Числа, которые могут быть представлены в виде непериодических десятичных чисел с бесконечным числом десятичных знаков, называются ***иррациональными числами***. Например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\pi=3{,}1415...$ (π – отношение длины окружности к длине ее диаметра) являются иррациональными.

Обобщая сказанное, десятичные числа α_n и α_n' с n цифрами после запятой называются ***десятичными приближениями с недостатком*** и соответственно ***десятичными приближениями с избытком*** иррационального числа α с точностью до 10^{-n}, если: 1) $\alpha_n<\alpha<\alpha_n'$ и 2) $\alpha_n'-\alpha_n=10^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, *каждому иррациональному числу* α *соответствуют две бесконечные последовательности рациональных десятичных чисел* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\alpha_n')_{n\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющие свойствам 1) и 2).

Условимся рассматривать аналогичные последовательности десятичных приближений рационального числа α, считая, что $\alpha_n=\alpha_n'=\alpha$, начиная с некоторого индекса n_k. Например, для $\alpha=2{,}719$ имеем: $\alpha_0=2$, $\alpha_0'=3$; $\alpha_1=2{,}7$, $\alpha_1'=2{,}8$; $\alpha_2=2{,}71$, $\alpha_2'=2{,}72$; $\alpha_3=2{,}719=\alpha_3'=\alpha_4=\alpha_4'=...=\alpha_n=\alpha_n'=\alpha$ $(n_k=3)$.

Эти последовательности применяются при введении операций над произвольными действительными числами.

Объединение множества рациональных чисел ($\mathbb{Q}$) и множества иррациональных чисел ($\mathbf{I}$) образует ***множество действительных чисел***, которое обозначается буквой $\mathbb{R}$. Следовательно, $\mathbb{R}$ – это множество чисел, которые могут быть представлены в виде десятичных чисел с конечным числом десятичных знаков или периодических/непериодических десятичных чисел с бесконечным числом десятичных знаков.

Для изученных числовых множеств справедливы соотношения: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; $\mathbf{I}\subset\mathbb{R}$; $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbf{I}$.

§2 Изображение действительных чисел на числовой оси. Сравнение действительных чисел

Известно, что каждому рациональному числу a соответствует на числовой оси Ox единственная точка M такая, что $OM = |a|$, и наоборот. Если $a > 0$, точка M принадлежит положительной полуоси, если $a < 0$, точка M принадлежит отрицательной полуоси, а если $a = 0$, точка M совпадает с точкой O. Число a называется ***координатой*** точки M. Используя это соответствие, действительные числа могут быть изображены геометрически.

В зависимости от формы представления действительных чисел применяются различные способы их сравнения.

1. Из двух действительных чисел, изображенных на числовой оси, бо́льшим является число, которое правее другого (в положительном направлении). Например, $x_2 > x_1$ (рис. 1.1).

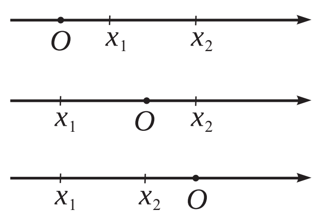


Рис. 1.1

2. Если положительные действительные числа представлены в виде десятичных чисел, то бо́льшим является число, которое содержит больше цифр до запятой.

Например, 11,13 > 9,99.

3. Если же у действительных чисел количество цифр до запятой одинаково, то бо́льшим является число, у которого первая цифра (слева направо) больше.

Например, 2,173**7**4 > 2,173**2**462, так как **7** > **2**.

4. Из двух отрицательных действительных чисел бо́льшим является число, модуль которого меньше.

5. Если хотя бы одно из чисел a и b записано в виде выражения, содержащего корень, то можно применить один из следующих способов:

а) записываем оба числа в виде корней, затем сравниваем числа под знаками корней;

б) определяем знак разности $a - b$;

в) допускаем, что верно неравенство $a > b$, затем применяем свойства неравенства (§ 3).

Задание с решением

Сравним числа:

а) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$; б) 3 и $6-\sqrt{5}$.

Решение:

а) $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$.

Поскольку $\sqrt{45} < \sqrt{75}$, то $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$.

б) $3-(6-\sqrt{5}) = -3+\sqrt{5}$. Так как $-3+\sqrt{5}$ отрицательно $(\sqrt{5} < 3)$, получаем, что $3 < 6-\sqrt{5}$.

§ 3 Арифметические операции над действительными числами

Пусть $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ и $(\alpha'_n)_{n\geq 0}$, $(\beta'_n)_{n\geq 0}$, $n\in \mathbb{N}$, – последовательности десятичных приближений действительных чисел α и β с недостатком и избытком соответственно.

Сумма действительных чисел α и β – это действительное число $\gamma = \alpha + \beta$, удовлетворяющее двойному неравенству $\alpha_n + \beta_n \leq \gamma \leq \alpha'_n + \beta'_n$, $n\in \mathbb{N}$.

Разность действительных чисел α и β – это действительное число $\delta = \alpha - \beta$, удовлетворяющее двойному неравенству $\alpha_n - \beta'_n \leq \delta \leq \alpha'_n - \beta_n$, $n\in \mathbb{N}$.

Произведение положительных действительных чисел α и β – это положительное действительное число $\eta = \alpha\cdot\beta$, удовлетворяющее двойному неравенству

$$\alpha_n\cdot\beta_n \leq \eta \leq \alpha'_n\cdot\beta'_n,\ n\in \mathbb{N}.$$

Частное положительных действительных чисел α и β – это положительное действительное число $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, удовлетворяющее двойному неравенству $\dfrac{\alpha_n}{\beta'_n} \leq \mu \leq \dfrac{\alpha'_n}{\beta_n}$, $n\in \mathbb{N}$, начиная с того индекса n, для которого значения β_n, β'_n отличны от нуля.

Для нахождения произведения (частного) двух произвольных действительных чисел находим произведение (частное) их модулей, а знак устанавливаем по известному правилу.

Сумма, разность, произведение и частное (с ненулевым делителем) любых двух действительных чисел существуют и каждое из них определяется однозначно.

Задание с решением

Что следует понимать под числом: а) $t=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; б) $\mu=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$?

Решение:

Так как $1<\sqrt{2}<2$, $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$, ... и $2<\sqrt{5}<3$, $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$, $2{,}22<\sqrt{5}<2{,}23$, ..., то:

а) t – это число, удовлетворяющее двойным неравенствам:

$$1\cdot 2<t<2\cdot 3;\quad 1{,}4\cdot 2{,}2<t<1{,}5\cdot 2{,}3;\quad 1{,}41\cdot 2{,}22<t<1{,}42\cdot 2{,}23;\ \ldots$$

б) μ – это число, удовлетворяющее двойным неравенствам:

$$\frac{1}{3}<\mu<\frac{2}{2};\quad \frac{1{,}4}{2{,}3}<\mu<\frac{1{,}5}{2{,}2};\quad \frac{1{,}41}{2{,}23}<\mu<\frac{1{,}42}{2{,}22};\ \ldots$$

Используя представление рациональных чисел в виде $\dfrac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$, очевидно, что сумма, разность, произведение, частное (с ненулевым делителем) двух рациональных чисел также являются рациональными числами. Отсюда следует, что сумма, разность, произведение или частное иррационального числа и ненулевого рационального числа – это иррациональное число. Действительно, если в равенстве $a+b=c$, где a рационально, b иррационально, было бы и c рационально, то из $b=c-a$ получили бы, что и b должно быть рационально. Противоречие доказывает сказанное.

Наоборот, сумма, разность, произведение, частное двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

Например, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}\in\mathbf{I}$, но $2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\in\mathbb{Z}$, $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})\in\mathbb{Z}$.

Задания с решением

1. Покажем, что $a=(\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}$ является рациональным числом.

Решение:

$$a=(\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=(2+4\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=$$
$$=2\sqrt{3}+4(\sqrt{3})^2+5-2\sqrt{3}=12+5=17\in\mathbb{Q}.$$

2. Выясним, является ли $a=\dfrac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ рациональным числом.

Решение:

$$a=\frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}+2}}{3\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3^2-2\cdot3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{|3-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$ Итак, a – число иррациональное.

Замечание. Для оценивания суммы, разности, произведения, частного двух действительных чисел, как правило, используют десятичные приближения действительных чисел.

Свойства операций сложения и умножения действительных чисел

1° коммутативность: $x+y=y+x;\ x\cdot y=y\cdot x$;

2° ассоциативность: $(x+y)+z=x+(y+z);\ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$;

3° существование нейтрального элемента: $x+0=x;\ x\cdot1=x$;

4° существование симметричного элемента: $x+(-x)=0;\ x\cdot x^{-1}=x\cdot\dfrac{1}{x}=1,\ x\neq0$;

5° дистрибутивность: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z;\ x\cdot(y-z)=x\cdot y-x\cdot z$
для любых $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$.

Модуль действительного числа a определяется так:

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{если } a\geq0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Так же, как и для рациональных чисел, можно доказать, что верна

Теорема 1 (свойства модуля действительного числа)

Для любых $a,b\in\mathbb{R}$ верно:

1° $|a|\geq0$;

2° $|a|=|-a|$;

3° $|a|\geq a$;

4° $|a|^2=|a^2|=a^2$;

5° $|a^n|=|a|^n,\ n\in\mathbb{N}^*$;

6° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

7° $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|},\ b\neq0$;

8° $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Напомним, что для любого $x\in\mathbb{R}$ верно равенство $\sqrt{x^2}=|x|$, применимое при различных преобразованиях. Например, известное равенство $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ a,b\in\mathbb{R}_+$, примет вид $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$ для $a,b\in\mathbb{R}_-$.

Примеры

1. $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=|2-x|$.

2. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$ (так как $\sqrt{2}-1>0$).

Если необходимо освободиться от знака модуля некоторого выражения, содержащего буквы, следует рассмотреть случаи в зависимости от знака этого выражения.

Пример

$$\sqrt{x^2-4x+4}\cdot(x-2)=\sqrt{(x-2)^2}\cdot(x-2)=|x-2|\cdot(x-2)=\begin{cases}(x-2)^2, & \text{если } x\ge 2,\\ -(x-2)^2, & \text{если } x<2.\end{cases}$$

Можно доказать, что числовые неравенства обладают теми же свойствами на множестве $\mathbb{R}$, что и на множестве $\mathbb{Q}$.

Теорема 2 (свойства отношения неравенства на множестве $\mathbb{R}$)

Отношение „≥“ обладает следующими свойствами для любых $a, b, c, d\in\mathbb{R}$:

1° $a\ge a$ (рефлексивность);
2° если $a\ge b$ и $b\ge c$, то $a\ge c$ (транзитивность);
3° если $a\ge b$ и $b\ge a$, то $a=b$ (антисимметричность);
4° если $a\ge b$, то $a+c\ge b+c$;
5° если $a\ge b$ и $c>0$, то $ac\ge bc$;
6° если $a\ge b$ и $c<0$, то $ac\le bc$;
7° если $a\ge b$ и $c\ge d$, то $a+c\ge b+d$;
8° если $a\ge b$ и $c\le d$, то $a-c\ge b-d$;
9° если $a\ge b$, то $a^n\ge b^n$, $n\in\mathbb{N}$, n – нечетное число;
10° если $a\ge b>0$, то $a^n\ge b^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$;
11° если $a\ge b$ и $a\cdot b>0$, то $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}$.

Доказательство:

Докажем, например, свойство 11°. Для разности $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ получаем: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}\le 0$, так как $a\cdot b>0$, $b-a\le 0$. Отсюда следует, что $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}$. ▶

Задание. Докажите свойства 1°–10°.

Замечание. Свойства 1°–11° верны и для отношений „>“, „≤“, „<“.

Приведенные в теореме 2 свойства применяются, в частности, и для сравнения чисел. Предполагается, что $a>b$ (или $a<b$) затем, используя свойства числовых неравенств, получают равносильное неравенство, которое проще проверить, верно оно или нет.

Задание с решением

Сравним $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ с $\dfrac{7}{20}$.

Решение:

Предположим, что $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<\dfrac{7}{20}$. Это неравенство равносильно неравенствам: $\sqrt{3}<\dfrac{7}{10}+1$, $3<\dfrac{289}{100}$. Так как последнее неравенство ложно, то ложно и первоначальное, то есть верно неравенство $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\geq\dfrac{7}{20}$. Поскольку числа не равны, то получаем, что $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}>\dfrac{7}{20}$.

Задачи и упражнения

A

1. Обратите в десятичное число дробь:
а) $\dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{4}{15}$; в) $\dfrac{3}{5}$; г) $\dfrac{1}{8}$; д) $\dfrac{2}{25}$; е) $\dfrac{1}{125}$; ж) $\dfrac{1}{6}$; з) $\dfrac{1}{9}$.

2. Обратите в дробь десятичное число:
а) 0,(13); б) 2,(5); в) 1,(2); г) 0,(23); д) 1,2(7); е) 0,2(73).

3. Определите, является ли рациональным числом значение числового выражения:
а) $\sqrt{2}+3$; б) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{12})$; г) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$.

4. Будет ли сумма $a+b$ рациональным числом, если:
а) a и b рациональные числа;
б) a и b иррациональные числа;
в) одно число рациональное, а другое иррациональное?

5. Найдите десятичные приближения с точностью до 10^{-2}:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}$; в) 0,(31); г) $\sqrt{3}+1$; д) $\sqrt{7}-1$.

6. Сравните числа:
а) 3,257129 и 3,258129; б) –7,123465 и –8,123466.

7. Приведите пример рационального числа, содержащегося между 0,62711 и 0,62712.

8. Сравните:
а) 0,428571 с $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3}$ с $\sqrt{5}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ с $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\sqrt{3}+1$ с $\sqrt{10}-1$.

9. Выясните, верно ли равенство для любого x из указанного множества:
а) $\dfrac{x}{|x|}=1,\ x\in\mathbb{R}^*$; б) $x=-|x|,\ x\in\mathbb{R}_-$; в) $(x-|x|)(x+|x|)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $|x+1|=2$; б) $|x+4|=x-3$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: а) $2x<3x+6$; б) $3-2x>7x-2$.

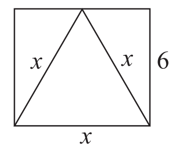
12. Температура воды на поверхности океана равна 14°C, а на глубине 44 м – 2°C. Считая, что температура t воды снижается пропорционально глубине h ($t = -ah + b$, $a > 0$), найдите температуру воды на глубине: а) 22 м; б) 15 м.

13. Площадь грани куба равна a см^2.
а) Найдите длину диагонали куба.
б) Вычислите объем куба с точностью до 10^{-2}, если $a = 15$.

Б

14. Сравните: а) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}$ с $\sqrt{6+5\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ с $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

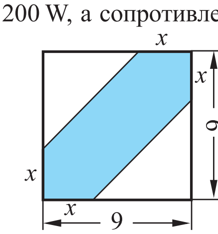
15. Вычислите: а) $\sqrt{\sqrt{625}}$; б) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{512}}}$.



16. Найдите значение x из изображенного прямоугольника.

17. Будет ли произведение $a \cdot b$ рациональным числом, если:
а) a и b рациональные числа;
б) a и b иррациональные числа;
в) одно число рациональное ненулевое, а другое иррациональное?

18. Мощность P, сила тока I и сопротивление R в электрической цепи связаны соотношением: $P = I^2 \cdot R$. Какой будет сила тока, если мощность источника равна 1200 W, а сопротивление – $500\ \Omega$?



19. Найдите значение x из рисунка, если площадь закрашенной области составляет 60% площади квадрата.

20. Выясните, является ли рациональным числом значение выражения:
а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-3}$; б) $\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-4}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

21. Покажите, что $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$, если $b > a > 0$.

22. Три магазина предлагают скидки на музыкальный центр одного и того же типа:
а) цена равна 99 д. е. и скидка составляет 25% от цены;
б) цена равна 111 д. е. и скидка составляет $\dfrac{1}{3}$ от цены;
в) цена равна 125 д. е. и скидка составляет 50 д. е.
В каком из магазинов будет наименьшая окончательная цена?

23. Парламент Руспублики Молдова состоит из 101 члена. Сколько мест будет отведено некоторой коалиции, если за нее проголосовали $\dfrac{2}{5}$ от общего числа избирателей?

24. Покажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ верно „неравенство треугольника“:
$$||a|-|b|| \le |a-b| \le |a|+|b|.$$
В каком случае каждый из знаков „$\le$“ можно заменить на знак „=“?

25*. Приведите пример иррационального числа, содержащегося между 0,62711 и 0,62712.

26*. Какими должны быть знаки a, b, ab, чтобы было верно равенство $|a|+|b|=|b-a|$?

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

В заданиях 1, 2 укажите верный вариант.

1. Действительные числа x, для которых справедливо неравенство $|x| \le |-x|$, принадлежат множеству 1

A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}_-^*$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $\mathbb{R}^*$.

2. Сумма двух произвольных иррациональных чисел – это 2

A рациональное число.
B иррациональное число.
C число, рациональность или иррациональность которого определить невозможно.
D целое число.

3. Найдите десятичные приближения иррационального числа $\sqrt{10}$ с недостатком и избытком с точностью до 10^{-3}. 2

4. Сравните $5\sqrt{3}$ с $4\sqrt{5}$. 2

5. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}$. 3

Б

В заданиях 1–3 укажите верный вариант.

1. Значение выражения $\sqrt{\dfrac{9}{4}-\sqrt{2}}$ принадлежит множеству 1

A $\mathbb{Z}$. **B** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. **C** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **D** $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$.

2. Множеством чисел x, для которых справедливо неравенство $\dfrac{x}{|x|} \le -1$, является 1

A $\mathbb{R}_+^*$. **B** $\mathbb{R}_-^*$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $\mathbb{R}^*$.

3. Если $x \in \mathbb{N}$ и $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, то 1

A $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$. **B** $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$. **C** $\sqrt{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **D** $\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$.

4. Найдите десятичные приближения иррационального числа $2-\sqrt{3}$ с недостатком и избытком с точностью до 10^{-3}. 1

5. Найдите пересечение и объединение отрезков $\left[1{,}9;\ \dfrac{\sqrt{5}+2}{2}\right]$, $\left[\dfrac{7}{5},\ \sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$. 2

6. Упростите выражение $\dfrac{a}{\sqrt{a}\sqrt{b}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{a}\sqrt{b}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$. 2

7. Выясните, является ли рациональным числом значение выражения $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$. 2

МОДУЛЬ 2 Элементы математической логики и теории множеств

Я мыслю – следовательно, я существую.
Рене Декарт

Цели

- распознавание и применение в различных контекстах понятий: *высказывание, истинностное значение*, *квантор, теорема, гипотеза, заключение*, *прямая теорема*, *обратная теорема*, *аксиома*, *необходимые условия*, *достаточные условия*, *необходимые и достаточные условия*;
- нахождение значения истинности высказывания с использованием примеров, контрпримеров, свойств алгебраических операций;
- применение в различных ситуациях терминологии, адекватной теории множеств;
- применение отношений включения и равенства множеств, отношения принадлежности элементов некоторому множеству;
- выполнение операций над множествами; аналитическое, синтетическое, геометрическое представления полученных результатов;
- *использование в различных ситуациях основных свойств операций над множествами;
- *применение в различных ситуациях терминологии, адекватной математической индукции;
- *применение метода математической индукции при доказательстве числовых тождеств.

§ 1 Элементы теории множеств. Повторение и дополнения

1.1. Понятие множества

Существуют математические понятия и отношения, которые не определяются. Таκими являются понятия *множество, элемент множества* и отношение *элемент принадлежит множеству*. Эти понятия иллюстрируются примерами, разъясняются, но не могут быть определены при помощи других понятий.

Множество – это совокупность каких-либо отличных друг от друга и объединенных по некоторому признаку объектов, называемых ***элементами множества***.

Выделим *три основных способа задания множества*:

1) перечислением элементов множества (синтетический способ);

2) описанием характеристического свойства элементов (аналитический способ);

3) при помощи диаграммы Эйлера–Венна.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется ***конечным***. В противном случае оно называется ***бесконечным***.

Число элементов конечного множества M называется ***кардиналом*** этого множества и обозначается $|M|$ или card$M$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством. Его обозначают $\varnothing$; card$\varnothing = 0$.

Задание с решением

Перечислите элементы множеств (заданных с помощью характеристического свойства элементов):

$A=\{x\in \mathbb{R} \mid 2x^2+3x+1=0\}$, $B=\{x\in \mathbb{Z} \mid 2x^2+3x+1=0\}$, $C=\{x\in \mathbb{N} \mid 2<x \text{ и } x<1\}$.

Решение:

Решив уравнение $2x^2+3x+1=0$, получим: $A=\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$, $B=\{-1\}$, а множество C является пустым множеством, то есть $C=\varnothing$.

1.2. Подмножества. Равенство множеств

Определение. Множество A называется **подмножеством** множества B (обозначается $A\subseteq B$), если любой элемент множества A является и элементом множества B.

Отношение $A\subseteq B$ называется ***отношением включения***. Оно означает, что любой элемент множества A является в то же время и элементом множества B. В этом случае говорят: „A включается в B“ или „A является подмножеством множества B“.

Определение. Множества A и B называются **равными**, если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$.

Обозначается: $A = B$.

Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Примеры

1. Множества $A=\{1, 3\}$ и $B=\{x\in \mathbb{R} \mid x^2-4x+3=0\}$ равны, так как $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$.

2. Множества $A=\{2, 3, 1, 7\}$ и $B=\{x\in \mathbb{N} \mid 1\le x\le 7\}$ не равны, поскольку множество B не является подмножеством множества A $(6\in B,\ 6\notin A)$.

Множество всех подмножеств множества A называется ***булеаном множества*** A и обозначается $\mathcal{B}(A)$. Булеан множества – не пустое множество (даже если $A=\varnothing$), поскольку множеству $\mathcal{B}(A)$ принадлежат по крайней мере множества A и $\varnothing$.

В модуле 4 будет доказана

Теорема 1. Если множество A содержит n, $n\in \mathbb{N}$, элементов, то множество $\mathcal{B}(A)$ содержит 2^n элементов.

Таким образом, card$\mathcal{B}(A)=2^n$.

Пример

Если $A = \{o, \Delta, a\}$, то: card$A=3$;

$\mathcal{B}(A) = \{\varnothing, \{o\}, \{\Delta\}, \{a\}, \{o, \Delta\}, \{o, a\}, \{\Delta, a\}, \{o, \Delta, a\}\}$; card$\mathcal{B}(A)=2^3=8$.

1.3. Операции над множествами

1 *Объединение множеств*

Определение. **Объединением** двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B.

Объединение множеств A и B обозначается $A \bigcup B$ и читается „A в объединении с B“ или „объединение A и B“.

Следовательно, $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ (рис. 2.1 а) – заштрихованная часть).

2 *Пересечение множеств*

Определение. **Пересечением** двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначается $A \bigcap B$ и читается: „A в пересечении с B“ или „пересечение A и B“.

Следовательно, $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (рис. 2.1 б) – заштрихованная часть).

Множества A и B называются ***непересекающимися***, если $A \bigcap B = \varnothing$, то есть если у них нет общих элементов.

3 *Разность двух множеств*

Определение. **Разностью двух** множеств A и B (в этом порядке) называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$ или $A - B$ и читается „A минус B“.

Следовательно, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ (рис. 2.1 в) – заштрихованная часть).

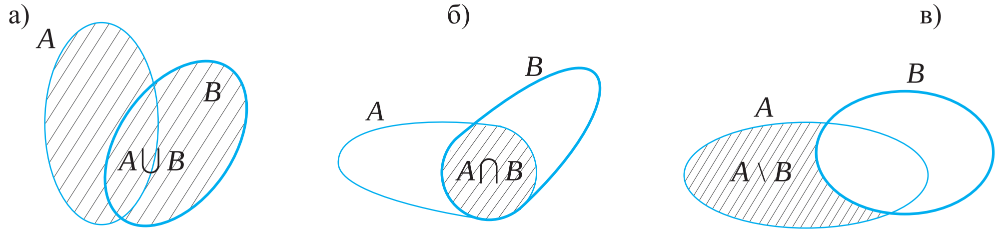


Рис. 2.1

Замечание. Объединение и пересечение множеств применяют при решении систем, совокупностей уравнений и/или неравенств (см. модули 6–8).

4 *Декартово произведение*

Определение. **Декартовым произведением** непустых множеств A и B называется множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$.

Декартово произведение множеств A и B обозначается $A \times B$.

Следовательно, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Примеры

1 Если $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, то

$A \times B = \{(1, а), (1, б), (1, в), (2, а), (2, б), (2, в)\}$, а

$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$.

2 Декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ играет важную роль в математике, физике и в других областях. Пары координат точек прямоугольной системы координат представляют собой элементы декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3 Декартово произведение $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ представляет собой пары координат точек I четверти прямоугольной системы координат.

Очевидно, что в общем случае, $A \times B \neq B \times A$.

5 *Свойства операций над множествами*

Операции над множествами обладают рядом свойств. Некоторые из них подобны свойствам операций сложения и умножения действительных чисел.

Теорема 2. Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

1° $A \cup B = B \cup A$;	1°′ $A \cap B = B \cap A$;
2° $A \cup A = A$;	2°′ $A \cap A = A$;
3° $A \cup \varnothing = A$;	3°′ $A \cap \varnothing = \varnothing$;
4° $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;	4°′ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5° $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;	5°′ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
6° $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.	6°′ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Задания с решением

1. Покажем, что $A \cup B = B$, если $A \subseteq B$.

Решение:

Очевидно, что $B \subseteq A \cup B$. Указанное равенство будет верным, если покажем обратное включение: $A \cup B \subseteq B$.

Пусть $x \in A \cup B$. Тогда $x \in A$ или $x \in B$. Если $x \in A$, то $x \in B$ (из условия $A \subseteq B$). Таким образом, $x \in B$, что влечет $A \cup B \subseteq B$, поэтому $A \cup B = B$.

2. Найдем объединение множеств $A = \mathbb{Z}_-$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \,\|\, |x| \leq 100\}$, $C = \mathbb{Z}_+$.

Решение:

На основании свойств 1°, 4° получим:

$$M = A \cup (B \cup C) = A \cup (C \cup B) = (A \cup C) \cup B = (\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+) \cup B.$$

Так как $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}$ и $B \subseteq \mathbb{Z}$, то $M = \mathbb{Z} \cup B = \mathbb{Z}$.

Упражнения и задачи

А

1. Выясните, равны ли множества:
а) $\{1, -1\}$ и $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$; б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 7\}$ и $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \mathbb{N}$.
Найдите множество:
а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

3. Найдите булеан множества $A = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\}$ и его кардинал.

4. Найдите три числа, удовлетворяющие условиям:
а) $a \in \mathbb{Z}$ и $a \notin \mathbb{N}$; б) $a \in \mathbb{Z}$ и $|a| < 5$.

5. Определите, каким из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ принадлежит число:
а) 2; б) $\sqrt{17}$; в) $(2 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$.

6. Найдите декартово произведение $A \times B$ множеств A, B, если:
а) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$; б) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$.
Верно ли, что $A \times B \neq B \times A$?

7. Даны множества:
а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$;
б) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0\}$.
Проверьте, равны ли множества A и B. Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

Б

8. Проверьте, равны ли множества $\{\sqrt{2}\}$ и $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 2 = 0\}$.

9. Даны множества $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 36 < 0\}$.
Найдите множество: а) $B \setminus A$; б) $A \setminus B$.

10. Найдите $\operatorname{card} A$, булеан множества A, $\operatorname{card} \mathcal{B}(A)$, если $A = [0, 4) \cap \mathbb{Z}$.

11. Найдите три числа, удовлетворяющие условиям:
а) $a \in \mathbb{R}$ и $a \notin \mathbb{Q}$; б) $a \in \mathbb{N}$ и $2 < |a| < 10$.

12. Определите, каким из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ принадлежит число:
а) $-\sqrt{2}$; б) $|\sqrt{3} - 2| - \sqrt{3}$; в) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

13*. Докажите равенство:
а) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

14*. Найдите множество действительных значений m, при которых истинно высказывание:
а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \varnothing$.
б) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - m < 0\} = \varnothing$.

15*. Найдите истинностное значение высказывания:
а) Если $C \cup A = C \cup B$, то $A = B$. б) Если $C \cap A = C \cap B$, то $A = B$.

§2 Элементы математической логики

2.1. Понятие высказывания. Повторение и дополнения

Задача. Рассмотрим повествовательные предложения:

1. Город Кишинев является столицей Республики Молдова.
2. $3x^2 - x = 0$.
3. Любой квадрат является ромбом.
4. $\sqrt{3} = 3$.

а) Выясните, какие из этих предложений являются высказываниями. Обоснуйте ответ.
б) Найдите истинностное значение каждого высказывания.

В математической логике ***высказыванием*** называется предложение, о котором имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Высказывания обозначаются строчными буквами латинского алфавита: $a, b, ..., p, q, ...$

В нашей задаче предложения 1, 3, 4 являются высказываниями: предложения 1 и 3 являются истинными высказываниями, а предложение 4 – ложным. Истинностное значение предложения 2, $3x^2 - x = 0$, невозможно определить, так как, например, для $x = 0$ получается истинное высказывание, а для $x = 1$ – ложное высказывание; однако значение x не известно.

> ***Замечание.*** В отличие от равенства 2 существуют равенства (неравенства), содержащие переменные и являющиеся тем не менее высказываниями, так как они обращаются в верные числовые равенства (неравенства) для любых значений переменных из некоторой области.
> Примерами могут служить свойства операций над действительными числами: $x + 0 = 0 + x$, $x \cdot y = y \cdot x$, $x, y \in \mathbb{R}$, и др.

С помощью логических связок „и“, „или“, „не“ („non“), „если..., то“ из высказываний p, q можно образовать (***составные***) ***высказывания***: „p и q“, „p или q“, „non p“ и т. д. Например: „число 2 является натуральным числом и –3 является целым числом“, „$\sqrt{3}$ не является рациональным числом“.

В продолжение займемся другой классификацией высказываний: *частные высказывания*, *общие высказывания*. Рассмотрим высказывания:

1. Число 171 кратно 3.
2. Любое целое число кратно 3, если сумма цифр в его десятичной записи делится на 3.
3. Число 2 является решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.
4. Любому правильному многоугольнику можно описать окружность.

По степени общности высказывания 1 и 3 относятся к частным случаям, являются ***частными высказываниями***, а высказывания 2 и 4 носят общий характер, касаются произвольного элемента некоторого множества (являются ***общими высказываниями***). Общие высказывания могут быть сформулированы более компактно, если использовать ***квантор общности*** ($\forall$) (читают „для любого“) или ***квантор существования*** ($\exists$) (читают „существует“). Например, высказывание „Для любого действительного числа x выполняется условие $x^2+1\geq 0$“ записывается $(\forall x\in \mathbb{R})$ $(x^2+1\geq 0)$. Высказывание „Существует правильный многоугольник, внутренние углы которого равны 110°“ можно записать $(\exists x\in M)$ (внутренние углы x равны 110°), где M – множество всех правильных многоугольников плоскости.

Особое место среди математических высказываний занимают теоремы и аксиомы. ***Теоремы*** – это общие высказывания, требующие, как правило, доказательства, т. е. строгого обоснования того, что они верны. В процессе доказательства используются другие истинные высказывания, из которых одни являются теоремами (уже доказанными), а другие могут быть аксиомами. ***Аксиомы*** – это высказывания, которые считаются верными без доказательства (их невозможно доказать). Они обозначают некие условия, свойства (возможно, общепризнанные) для понятий, изучаемых в рамках строго построенных теорий. Например, аксиомами являются высказывания: „Две различные точки определяют прямую, и притом только одну“, „Через любую точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной“.

Большинство математических теорем имеют один из видов: „Если A, то B“ или „A, если и только если B“ („A тогда и только тогда, когда B“, „A в том и только в том случае, когда B“) (или могут быть так сформулированы), где A, B обозначают некоторые ***условия***, касающиеся математических понятий.

Примеры

1 Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны.

2 Целое число a кратно 5, если и только если его последняя (справа) цифра в десятичной записи равна 0 или 5.

В теоремах вида „Если A, то B“ условие A называется ***достаточным условием*** (для B), а B – ***необходимым условием*** (для A). В теоремах вида „A, если и только если B“ условия A, B называются ***эквивалентными условиями*** или ***необходимыми и достаточными условиями***, т. е. A является необходимым и достаточным условием для B, а B – необходимым и достаточным условием для A.

Примеры

3 В теореме „Если натуральное число кратно 6, то оно кратно 2“ условие „натуральное число кратно 6“ является необходимым условием для условия „натуральное число кратно 2“, которое, в свою очередь, является необходимым условием для первого условия.

4 В теореме из примера 2 условия „целое число кратно 5“ и „последняя (справа) цифра в десятичной записи целого числа равна 0 или 5“ эквивалентны.

Любая теорема содержит следующие структурные составляющие: ***разъяснительная часть***, ***гипотеза***, ***заключение***.

Разъяснительная часть теоремы определяет множество объектов, о которых идет речь в теореме. Иногда разъяснительная часть присутствует явно, а иногда – неявно.

Любая теорема вида „Если A, то B“ может быть записана в виде

$$(x\in M)(A(x)\Rightarrow B(x)),$$

где $x\in M$ – пояснительная часть, $A(x)$ – гипотеза, $B(x)$ – заключение.

Пример

5 Рассмотрим теорему: „Пусть p – выпуклый четырехугольник в плоскости α. Если p является ромбом, то его диагонали перпендикулярны“.

Разъяснительная часть теоремы – это „p – выпуклый четырехугольник в плоскости α“, гипотеза теоремы – „p является ромбом“, заключение – „диагонали четырехугольника перпендикулярны“.

Поменяв местами гипотезу и заключение теоремы „Если A, то B“, получим другое высказывание: „Если B, то A“, названное ***обратным*** исходной теореме, которое может быть истинным (новая теорема) или ложным. Если высказывание „Если B, то A“ истинно, то исходная теорема называется ***прямой теоремой***, а обратная к ней – ***обратной теоремой***. Обратная теорема записывается $(x \in M)(B(x) \Rightarrow A(x))$.

Примеры

6 Обратной для теоремы „Если целое число a кратно 6, то оно кратно 2“ является „Если целое число a кратно 2, то оно кратно 6“, но данное высказывание ложно. Это можно проверить с помощью *контрпримера*: число 4 кратно 2, но оно не кратно 6.

7 Обратной для теоремы „Если точка пересечения диагоналей четырехугольника делит их пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм“ является „Если четырехугольник – параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам“ – и это истинное высказывание.

Если для теоремы „Если A, то B“ верна и ей обратная, то условия A и B эквивалентны, следовательно, верна теорема „A, если и только если B“. Таким образом, прямая и обратная теоремы из примера 7 могут быть сформулированы в виде одной теоремы: „Четырехугольник является параллелограммом, если и только если его диагонали точкой пересечения делятся пополам”. То есть $(x \in M)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$.

В дальнейшем рассмотрим некоторые методы доказательства теорем (отличные от прямого доказательства).

В гимназическом курсе математики применялся ***метод доказательства от противного*** теорем вида „Если A, то B“. Он состоит в следующем: предполагая, что заключение теоремы ложно, логическими выводами получаем противоречие (либо с условием теоремы, либо с другим истинным высказыванием). Отсюда следует, что исходное предположение ложно, следовательно, верно утверждение теоремы.

Пример

Методом от противного докажем высказывание „Если целое число a не кратно 3, то оно не кратно 6“. Предполагая обратное, что a кратно 6, покажем, что a кратно 3. Действительно, так как число a кратно 6, то его можно записать в виде $a = 6t,\ t \in \mathbb{Z}$, или $a = 3 \cdot (2t),\ 2t \in \mathbb{Z}$. Следовательно, a кратно 3, что противоречит гипотезе. На основе метода от противного получаем, что первоначальное высказывание истинно.

Другой метод доказательства некоторых высказываний излагается в пункте 2.2.

2.2. Математическая индукция

Процедуры получения частных высказываний из общих, или наоборот, применяются часто, так как любая математическая (и не только) теория строится дедуктивным методом: все (высказывания) теоремы выводятся из других, истинных высказываний.

Логический вывод, с помощью которого из общих высказываний получают частные высказывания, называется ***дедукцией***.

Пример

Высказывание „Любое уравнение II степени с действительными коэффициентами, у которого дискриминант неотрицателен, имеет действительные решения" является общим высказыванием, так как речь идет о произвольном элементе множества уравнений II степени с действительными коэффициентами и с неотрицательным дискриминантом.

Высказывание „Уравнение $2x^2+x-5=0$ имеет действительные решения" относится к конкретному элементу упомянутого множества, поэтому оно является частным высказыванием.

Пусть $P(x)$ – высказывание, относящееся к произвольному элементу x, $x\in M$. Если истинно общее высказывание $(\forall x\in M)P(x)$, то при помощи дедукции из него получаем частные истинные высказывания: $P(a)$ для $x=a$.

Истинные высказывания можно получить, используя ***индукцию***. С помощью индукции можно получить общие высказывания из частных высказываний. Применяют ***неполную индукцию***, когда общее высказывание формулируется на основе *некоторых* частных случаев, и ***полную индукцию***, когда общее высказывание формулируется на основе рассмотрения *всех* возможных частных случаев.

С помощью неполной индукции можно получить общие высказывания, которые могут быть истинными, а могут быть и ложными. Однако с помощью полной индукции получают общие высказывания, которые обязательно являются истинными.

Пример

Рассмотрим истинные высказывания „$1+2<11$" и „$1+3<11$". На их основе можно сформулировать несколько общих высказываний:
p: „Сумма любых двух натуральных чисел меньше 11";
q: „Сумма любых двух натуральных чисел, меньших 4, меньше 11".

Высказывание p ложно, а высказывание q истинно, что можно проверить, рассмотрев все частные высказывания:

$$1+1<11,\ \ 1+2<11,\ \ 1+3<11,\ \ 2+2<11,\ \ 2+3<11,\ \ 3+3<11.$$

Еще один способ доказательства общих высказываний (теорем) – это ***метод математической индукции***.

> Если для предложения $P(n)$, $n\in\mathbb{N}$, истинно частное высказывание $P(0)$ (или $P(m)$, где m – натуральное заданное число) и из предположения, что истинно высказывание $P(k)$ $(k>m)$ следует, что истинно высказывание $P(k+1)$, то истинно общее высказывание $(\forall n\in\mathbb{N})P(n)$ (соответственно $n\geq m$).

Заметим, что этот метод применим только к высказываниям, суть которых зависит от натуральных чисел. Доказательство методом математической индукции высказывания $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m)P(n)$ осуществляется в три этапа:

1. Проверяем истинность высказывания $P(m)$.
2. Предполагаем, что высказывание $P(k),\ k \geq m,$ истинно, и доказываем истинность высказывания $P(k+1)$.
3. Если оба этапа доказательства проверены, то истинно высказывание $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m)P(n)$.

Задание с решением

Используя метод математической индукции, покажите, что верно равенство:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение:

Используя квантор общности, это общее высказывание может быть записано в виде $(\forall n \in \mathbb{N}^*)P(n)$, где $P(n)$ обозначает „$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$“.

Последовательно пройдем этапы метода математической индукции.

1. Для $n=1$ получаем частное высказывание $1=\frac{1(1+1)}{2}$, и оно истинно.

2. Предположим, что для некоторого натурального k истинно частное высказывание $P(k):\ 1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Используя это равенство, проверим верность равенства $P(k+1):\ 1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

Поступим следующим образом:

$$(1+2+\ldots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Следовательно, высказывание $P(k+1)$ истинно.

3. На основании метода математической индукции заключаем, что равенство $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ верно для любого $n \in \mathbb{N}^*$.

Упражнения и задачи

A

1. Выявите, какие из следующих предложений являются высказываниями и найдите их истинностные значения.

а) Температура кипения воды при атмосферном давлении 760 мм ртутного столба равна 110°C.

б) Четырехугольник *ABCD* является квадратом.

в) Морская вода не имеет тот же удельный вес, что и дистилированная вода.

2. Найдите истинностное значение высказывания:

а) $(\exists x\in \mathbb{N})\ (x^2-x-2=0)$.
б) $(\exists x\in \mathbb{R})\ (x^2-x-2=0)$.
в) $(\exists x\in \mathbb{Z})\ (x^2-x-1=0)$.
г) $(\forall x\in \mathbb{R})\ (x^2-x-2=0)$.

3. Сформулируйте частные высказывания, полученные из общего высказывания:

а) Любое натуральное число, кратное 10, кратно 5.
б) Сумма величин внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

4. Рассмотрим теорему: „Если четырехугольник $ABCD$ – ромб, то его диагонали перпендикулярны“. Сформулируйте высказывание, обратное этой теореме, и найдите его истинностное значение.

Б

5. Найдите истинностное значение высказывания:

а) Температура кипения воды в горах (около 900 м над уровнем моря) меньше 100°С.
б) $\sqrt{725}\in \mathbb{Q}$.

6. Найдите истинностное значение высказывания:

а) $(\forall x\in M)$ (величина углов при основании равнобедренного треугольника x равна 30°), где M – множество равнобедренных треугольников некоторой плоскости.
б) $(\exists x\in U)$ (величины внутренних углов треугольника x не превосходят 50°), где U – множество равносторонних треугольников некоторой плоскости.
в) $(\exists x\in \mathbb{R})\ (|x+2|+|x+3|=0)$.
г) $(\forall x\in \mathbb{R})\ (|x+2|+x^2-x+1>0)$.

7. Найдите структурные компоненты:

а) теоремы Пифагора;
б) теоремы „Величина внутренних углов равностороннего треугольника равна 60°”.

8. Применяя метод математической индукции, докажите, что для любого n, $n\in \mathbb{N}^*$, истинно высказывание:

а) $1+2+...+2^{n-1}=2^n-1$.
б) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.
в) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
г) $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
д) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)=\dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$.

9. Применяя метод доказательства от противного, докажите, что истинно высказывание „Если целое число a не кратно 2, то оно не кратно 10“.

10. Рассмотрим теорему „Если числа a, b рациональны, то сумма $a+b$ является рациональным числом“. Сформулируйте высказывание, обратное этой теореме, и найдите его истинностное значение.

11*. Найдите истинностное значение высказывания:

а) Существует правильный многоугольник, внутренние углы которого равны 110°.
б) Цифра единиц числа 7^{162} равна 3.

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Выявите, какие из следующих предложений являются высказываниями, и найдите их истинностные значения.

а) $\sqrt{3}$ – действительное число.

б) Удельный вес льда меньше удельного веса воды.

в) В древнегреческой мифологии Афина является богиней мудрости.

г) Организация Объединенных Наций (ООН) была основана в 1945 г. для установления во всех странах общественного строя одинаковой ориентации.

д) Египетские пирамиды были построены в XVI веке.

е) Солнечная система состоит из 6 планет.

ж) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (|x+2|<2)$. з) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (|x+2|<2)$.

2. Сформулируйте такую теорему, чтобы обратное ей высказывание было истинным.

3. Найдите необходимое и достаточное условие теоремы; сформулируйте обратное ей высказывание и найдите его истинностное значение:

а) Если целое число a кратно 14, то оно кратно 7.

б) Если треугольник прямоугольный, то у него два острых угла.

4. Найдите истинностное значение высказывания:

а) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 - x + 1 > 0)$. б) $(\exists n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ (n \mid 3$ и $n \mid 7)$.

5. Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$.
Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$.

6. В классе 28 учеников и все они посещают либо волейбольную, либо баскетбольную секцию, либо обе секции. Сколько учеников посещают обе секции, если волейбольную секцию посещают 12 учеников, а баскетбольную – 20 учеников?

Б

7. Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2(x-5)^2 \le 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$.

8. Пусть S_1, S_2 – множества решений на $\mathbb{R}$ уравнений $x^2 - 5x - 6 = 0$ и $\sqrt{x-6}\cdot(x^3-1)=0$ соответственно. Найдите: а) $S_1 \cup S_2$; б) $S_1 \cap S_2$; в) $S_1 \setminus S_2$; г) $S_2 \setminus S_1$; д) $S_1 \times S_2$.

9. Определите булеан множества $A = [-2, 3) \cap \mathbb{Z}$.

10*. Найдите истинностное значение высказывания:

а) Множество положительных рациональных чисел имеет наименьшее число.

б) Для любого натурального n дробь $\dfrac{n}{n+1}$ несократима.

в) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\sqrt{2}x^2 - \sqrt[4]{31}x + 1 < 0)$.

11*. Покажите, что истинно высказывание:

а) Для любых рациональных чисел a, b, $a<b$, существует по крайней мере одно рациональное число c такое, что $a<c<b$.

б) Для любых иррациональных (рациональных) чисел a, b существует по крайней мере одно иррациональное число c такое, что $a<c<b$.

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Выясните, является ли предложение „У четырехугольника 3 диагонали“ высказыванием, и, в случае утвердительного ответа, найдите его истинностное значение. 1

2. Даны высказывания p: „$4|15$“, q: „$4|8$“. 2
   а) Составьте сложные высказывания: „p и q“, „p или q“, „non p“, „non q“.
   б) Найдите истинностное значение каждого полученного высказывания.

3. Дана теорема „Если четырехугольник является ромбом, то в нем можно вписать окружность“. 3
   а) Укажите необходимое условие, достаточное условие.
   б) Сформулируйте высказывание, обратное теореме, и найдите его истинностное значение.

4. Даны множества $A = \{0, 2, 3, 6\}$ и $B = \{2, 3, 7, 12\}$. Выясните, какое из множеств 2
   $M_1 = \{2, 3\}$, $M_2 = \{2, 3, 6\}$, $M_3 = \{0, 2, 3, 6, 7, 12\}$,
   $M_4 = \{0, 6\}$, $M_5 = \{7, 12\}$, $M_6 = \{0, 6, 7, 12\}$
   равно множеству:
   а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

5. Найдите истинностное значение высказывания: 2
   а) $\{x, y, z\} = \{y, z, x\}$; б) $3 \notin \{3\}$.

Б

1. Выясните, является ли предложение „Вытрите окно“ высказыванием, и, в случае утвердительного ответа, найдите его истинностное значение. 1

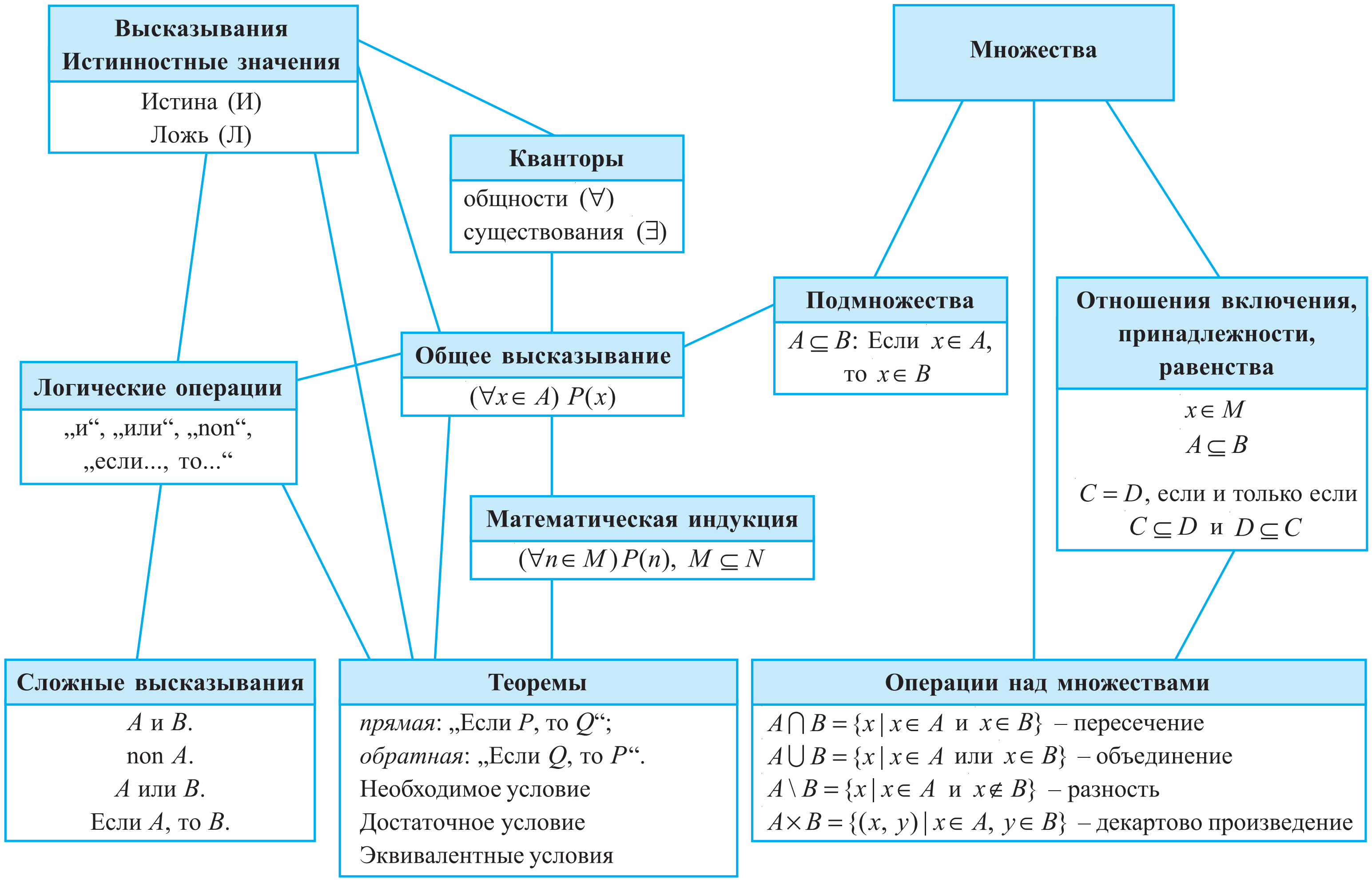
2. Даны высказывания p: „$4^2 = 15$“, q: „$\sqrt{16} = 4$“. 2
   а) Составьте сложные высказывания: „p и q“, „p или q“, „non p“, „non q“.
   б) Найдите истинностное значение каждого полученного высказывания.

3. Дана теорема „Если четырехугольник является прямоугольником, то ему можно описать окружность“. 3
   а) Укажите необходимое условие, достаточное условие.
   б) Сформулируйте высказывание, обратное теореме, и найдите его истинностное значение.

4. Пусть S_1, S_2 – множества решений на $\mathbb{R}$ уравнений $x^2 + 2x - 3 = 0$ и $(x-3)(x^3-1) = 0$ соответственно. 2
   Найдите:
   а) $S_1 \cup S_2$; б) $S_1 \cap S_2$; в) $S_2 \setminus S_1$; г) $S_1 \setminus S_2$.

5. Используя метод математической индукции, докажите, что: 2
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Элементы математической логики и теории множеств



МОДУЛЬ 3 Корни. Степени. Логарифмы

Всякое человеческое познание начинается с созерцаний, переходит к понятиям и заканчивается идеями.

И. Кант

Цели

- выполнение операций с действительными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с рациональным или действительным показателем; действий с корнями n-й степени, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, с логарифмами положительных чисел;
- применение свойств степеней, радикалов, логарифмов при выполнении вычислений с действительными числами;
- применение оцениваний и приближений для проверки достоверности вычислений с действительными числами с использованием степеней, радикалов, логарифмов.

§1 Корни

1.1. Понятие корня. Свойства

Известно, что n-я степень действительного числа b с натуральным ненулевым показателем n, обозначенная b^n, – это произведение n множителей, равных b. Следовательно, при заданных основании b и показателе n находим значение степени $b^n = a$.

Ранее мы рассмотрели одну из обратных задач: если известно a – значение степени и показатель степени n, $n = 2$, то можно найти основание b, для которого $b^2 = a$. Таким образом, решение уравнений II степени привело к введению понятия *квадратного корня*. Именно положительное решение уравнения $x^2 = a$, $a > 0$, обозначается через $\sqrt{a}$ и называется ***квадратным корнем***, или ***корнем второй степени*** из a.

Многие задачи приводят к решению уравнений степени больше, чем 2. Например, необходимо определить длину ребра куба, если его объем равен: а) 8 м^3; б) 5 м^3.

В случае а) длина ребра равна 2 м. В случае б) на множестве Q не существует точного значения длины ребра, так как не существует рационального числа x, для которого $x^3 = 5$. Решение этого уравнения обозначается через $\sqrt[3]{5}$, и является ***корнем третьей степени*** (***кубическим корнем***) из числа 5.

Определения. • Действительное число b называется **корнем нечетной n-й степени**, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, из действительного числа a, если $b^n = a$.

• Неотрицательное действительное число b называется **корнем четной n-й степени**, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, из неотрицательного действительного числа a, если $b^n = a$.

Корень n-й степени из числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$. Значит, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k+1$, и $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$.

Знак корня ($\sqrt[n]{\ }$) называется также ***радикалом n-й степени***, а a – ***подкоренным числом***.

Например, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; $\sqrt[3]{-0{,}125} = -0{,}5$; $\sqrt[4]{-16}$ не существует; $\sqrt[n]{0} = 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Замечание. Применив свойства числовых неравенств, можно доказать, что при указанных в определении условиях значение корня однозначно определено.

Корень n-й степени из числа a вычисляем на основании определения, то есть находим действительное решение уравнения вида $x^n = a,\ a \in \mathbb{R},\ n = 2k+1$, или неотрицательное решение уравнения $x^n = a,\ a \in \mathbb{R}_+,\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$. Решением данного уравнения может быть либо рациональное число, либо иррациональное число, поэтому (при необходимости) находим его десятичные приближения при помощи калькулятора, либо поступая как в следующей задаче.

Задача. Вычислим десятичные приближенные значения с недостатком и избытком для числа $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 10^{-2}.

Решение:

Из двойного неравенства $1^3 < 2 < 2^3$ получаем, что $1 < \sqrt[3]{2} < 2$, то есть 1 и 2 являются приближенными значениями числа $\sqrt[3]{2}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 1. Рассмотрим кубы чисел от 1 до 2 с шагом 0,1: $1{,}1^3$; $1{,}2^3$; ...; $1{,}9^3$; 2^3. Заметим, что $1{,}728 = 1{,}2^3 < 2 < 1{,}3 < 2{,}197$; значит, $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$. Числа 1,2 и 1,3 – это приближенные значения числа $\sqrt[3]{2}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-1}.

Рассмотрим кубы чисел от 1,21 до 1,29 с шагом 0,01: $1{,}21^3$; $1{,}22^3$; ...; $1{,}29^3$. Так как $1{,}953125 = 1{,}25^3 < 2 < 1{,}26^3 = 2{,}00376$, то $1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$, то есть 1,25 и 1,26 – приближенные значения числа $\sqrt[3]{2}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-2}.

Теорема 1 (свойства радикалов)

Для любых $a, b \in \mathbb{R}_+$ и четного натурального ненулевого n или для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и нечетного натурального n верно:

1° $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

2° $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

3° $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$;

5° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a},\ k \geq 2$;

6° $\sqrt[np]{a^{nk}} = \sqrt[p]{a^k},\ p \geq 2$;

7° $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$;

8° $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|,\ \sqrt{a^2} = |a|$;

9° $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|},\ a \cdot b \in \mathbb{R}_+$;

10° $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}},\ a \cdot b \in \mathbb{R}_+,\ b \neq 0$;

11° $\sqrt[2kp]{a^{2ks}} = \sqrt[p]{|a^s|},\ a \in \mathbb{R},\ p \geq 2$.

Доказательство:

Для доказательства этих свойств воспользуемся определением корня и тем обстоятельством, что значение корня (если оно существует) единственно. Следовательно, достаточно показать, что соответствующая степень выражения одной (правой) части равенства равна подкоренному выражению другой (левой) его части.

1° Если обозначить $b=\sqrt[n]{a}$, то $b^n=a$ и после подстановки выражения для b получим $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

2° Действительно, $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=a\cdot b$. По определению корня n-й степени получим, что $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

Свойство 3° является следствием свойства 2°, а свойства 4°, 5°, 6°, 9° и 10° доказывают аналогичным образом.

7° Предполагая противное, что $\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}$, получаем, что $(\sqrt[n]{a})^n\le(\sqrt[n]{b})^n$ (модуль 1, теорема 2, свойство 9°), то есть $a\le b$, вопреки гипотезе. Значит, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

8° Учитывая, что корень из неотрицательного числа является неотрицательным и что $(\pm a)^{2k}=a^{2k}$, получаем: $\sqrt[2k]{a^{2k}}=\sqrt[2k]{|a|^{2k}}=|a|$. ▶

Задание. Докажите свойства 3°–6°, 9°–11°.

Замечание. Если n – четное натуральное число, то при применении свойств 2°, 4°, 9°, 10°, 11° надо убедиться, что правая часть – число неотрицательное.

1.2. Преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под знака корня, внесение множителя под знак корня

Задания с решением

1. Упростим выражение $\sqrt[3]{7^4-7^3\cdot5}$.

Решение:

$\sqrt[3]{7^4-7^3\cdot5}=\sqrt[3]{7^3(7-5)}=\sqrt[3]{7^3}\cdot\sqrt[3]{2}=7\cdot\sqrt[3]{2}$.

Если степень корня четная и под знаком корня содержатся переменные, то могут быть использованы свойства 8°–11°.

2. Вынесем множитель из-под знака корня: $\sqrt[4]{x^6-5x^2}$, $x\in(-\infty,-\sqrt[4]{5}]\cup[\sqrt[4]{5},+\infty)$.

Решение:

$\sqrt[4]{x^6-5x^2}=\sqrt[4]{x^2(x^4-5)}=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^4-5}=\sqrt{|x|}\cdot\sqrt[4]{x^4-5}$.

Замечание. Было бы ошибочным применить свойства 1°–7°, если не известны знаки значений множителей, то есть *является неверной запись вида*:

$$\sqrt[4]{x^7(x^4-5)}=\sqrt[4]{x^7}\cdot\sqrt[4]{x^4-5}.$$

Действительно, областью допустимых значений (ОДЗ) выражения левой части равенства является множество $[-\sqrt[4]{5},0]\cup[\sqrt[4]{5},+\infty)$, а ОДЗ выражения правой части равенства является множество $[\sqrt[4]{5},+\infty)$.

При внесении множителя под знак радикала *могут быть допущены ошибки следующих видов*: $-7\sqrt{2}=\sqrt{(-7)^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{98}$; $\quad x\cdot\sqrt[4]{\dfrac{y}{x^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4y}{x^2}}=\sqrt[4]{x^2y}$.

Правильное решение: $-7\sqrt{2}=-\sqrt{98}$; $x\cdot\sqrt[4]{\dfrac{y}{x^2}}=\begin{cases}\sqrt[4]{x^2y}, \text{ если } x>0,\\ -\sqrt[4]{x^2y}, \text{ если } x<0.\end{cases}$

2 ***Избавлением от иррациональности в знаменателе*** алгебраического отношения называется преобразование, приводящее знаменатель этого отношения к рациональному виду. Это можно выполнить различными способами.

а) *Умножением числителя и знаменателя* отношения вида (A – произвольное выражение):

1) $\dfrac{A}{a\cdot\sqrt[n]{b}}$, $a, b\in\mathbb{R}^*$, на $\sqrt[n]{b^{n-1}}$;

2) $\dfrac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, $a, b\in\mathbb{R}^*_+$, на выражение, сопряженное знаменателю ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ – *сопряженные выражения*).

Пример

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}.$$

б) *Применением формул*:

$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ a, b\geq 0;$

$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b,\ n\in\mathbb{N},\ n$ – нечетное число.

Пример

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=$$

$$=2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}).$$

в) *Последовательным исключением радикалов алгебраической суммы в знаменателе*

Пример

$$\frac{1}{\sqrt{3}+5-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+5+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+5-\sqrt{2})(\sqrt{3}+5+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+5+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+5)^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+5+\sqrt{2})(26-10\sqrt{3})}{(26+10\sqrt{3})(26-10\sqrt{3})}=\frac{1}{376}(26\sqrt{2}-24\sqrt{3}-10\sqrt{6}+100).$$

Задание с решением

Упростим выражение $A=\sqrt{(x+2)^2-8x}:\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

Решение:

Поскольку выражения под радикалами содержат переменную, находим ОДЗ выражения A: $(0, 2)\cup(2, +\infty)$. Тогда:

$$A=\sqrt{x^2-4x+4}:\frac{x-2}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{(x-2)^2}\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\frac{|x-2|\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\begin{cases}-\sqrt{x}, \text{ если } x\in(0, 2),\\ \sqrt{x}, \text{ если } x\in(2, +\infty).\end{cases}$$

Упражнения и задачи

А

1. Вычислите:

а) $\sqrt{0{,}0025}$; б) $\sqrt{256\cdot 9\cdot 36}$; в) $\sqrt{\dfrac{25\cdot 324}{529\cdot 49}}$; г) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; д) $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}$.

В пунктах г), д) найдите для полученных чисел приближенные значения с недостатком и избытком с точностью до 10^{-2}.

2. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{32a^4b^3}$; б) $\sqrt{25a^2b^3}$, $a<0$; в) $\sqrt{(x-3)^2+12x}$;

г) $\sqrt[3]{x^3y^6}$; д) $\sqrt{169x^3y^2}$, $y<0$; е) $\sqrt[4]{8a^5b^6}$, $b<0$.

3. Внесите множитель под знак корня:

а) $-b\sqrt{3}$, $b<0$; б) $x\cdot\sqrt{\dfrac{-2}{x}}$; в) $-c\sqrt{7a}$; г) $x\cdot\sqrt[3]{2y}$; д) $a\cdot\sqrt[4]{2a}$;

е) $a\sqrt{3}$, $a>0$; ж) $y\sqrt{3}$; з) $x\cdot\sqrt{\dfrac{2}{x}}$; и) $x\cdot\sqrt[3]{2xy}$; к) $x\cdot\sqrt[4]{-x}$.

4. Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{3}+5)(5-2\sqrt{3})+(4-\sqrt{5})^2+8\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\dfrac{1}{7}\sqrt{147}$;

в) $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{30}-\sqrt{15}}$; г) $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$; д) $(1+\sqrt{5})^3\cdot(2+\sqrt{5})$.

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2y^3}}$; б) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$; г) $\dfrac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{18}}$; д) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

Б

6. Вычислите:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt[6]{27}$; б) $\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}$; в) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$;

г) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{12+2\sqrt{6}-2\sqrt{5}-2\sqrt{30}}$.

В пункте д) найдите для полученных чисел приближенные значения с недостатком и избытком с точностью до 10^{-3}.

7. Упростите выражение:

а) $\sqrt{1\,300}-2\sqrt{52}-12\sqrt{1\dfrac{4}{9}}+5\sqrt{\dfrac{13}{4}}$; б) $\left(\dfrac{7}{\sqrt{11}-2}+\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}\right)^{-2}:\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}-\sqrt{16\dfrac{1}{3}}\right)^{-2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$; г) $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$;

д) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$; е) $\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}-6}{1+\sqrt[4]{3}-\sqrt{5}}$; з) $\sqrt{13+\sqrt{48}}$.

8. Определите, верно ли равенство:

а) $\sqrt[3]{26+15\cdot\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=1$; б) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

9. Покрасили пол помещения размера $8{,}45\ \text{м}\times 4\ \text{м}$. Сколько граней куба с ребром 2,6 м можно покрыть тем же количеством краски при одинаковом расходе краски на $1\ \text{м}^2$?

10*. Найдите значение выражения $\sqrt{(7-a)(4+a)}$, если $\sqrt{7-a}+\sqrt{4+a}=5$.

11*. Покажите, что $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$ при $n\le 3m,\ m,n\in\mathbb{R}_+$.

§2 Степень с действительным показателем

1 Вам уже известно понятие ***степени с целым показателем***.

Для $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}^*$ было определено: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{множителей}}$; $a^0=1$; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, а $0^n=0$.

Замечания. **1.** Выражение 0^0 не определено.

2. $a^m>0$ для $a>0,\ m\in\mathbb{Z}$.

2 *Степень с рациональным показателем*

При изучении степени и ее свойств возникает вопрос о необходимости рассмотрения и степени с рациональным показателем. Положительный ответ на этот вопрос дает само развитие математики: множество $\mathbb{N}$ было расширено до $\mathbb{Z}$, потом до $\mathbb{Q}$, затем до $\mathbb{R}$ и на этих множествах были определены арифметические операции.

Многие задачи в различных областях также приводят к степени с рациональным показателем. Например, было установлено, что количество y бактерий, которые размножаются в некоторой среде, выражается в зависимости от времени t формулой $y=a^t$. Если $t=\dfrac{3}{2}$ часа, то количество бактерий в этой среде через $\dfrac{3}{2}$ часа будет $y=a^{\frac{3}{2}}$, то есть получили степень с рациональным показателем.

При определении степени с рациональным и иррациональным показателями естественно потребовать, чтобы оставались в силе свойства, которыми обладают степени с целым показателем.

Соблюдая это условие, выясним суть выражения $a^{\frac{m}{n}}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Для $a>0$ получаем $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Так как $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$, то логично считать, что $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Определение. **Степенью** $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$, где $a\in\mathbb{R}_+^*$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$, называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Замечания. **1.** $0^{\frac{m}{n}}=0$ для $m,n\in\mathbb{N}^*$, но выражение $a^{\frac{m}{n}}$ не имеет смысла, если $\dfrac{m}{n}\notin\mathbb{Z}$ и $a<0$.

Пример: $(27)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}=\sqrt[3]{(3^2)^3}=\sqrt[3]{9^3}=9.$

2. Значение степени $a^{\frac{m}{n}}$ не зависит от способа записи показателя $\frac{m}{n}$.

В самом деле, если $x=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, то, используя свойства корней, получаем:

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qn]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

3. Степень положительного числа с рациональным показателем положительна, так как значение корня любой степени из положительного числа положительно.

4. Справедливое для степени с целым показателем свойство $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ выполняется и для степени с рациональным показателем.

Действительно: $a^{\frac{-m}{n}}=\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Задание. Докажите, что если $\frac{m}{n}=k\in\mathbb{Z}$, то $a^{\frac{m}{n}}=a^k$.

Следующая теорема показывает, что степени с рациональным показателем обладают теми же свойствами, что и степени с целым показателем.

Теорема 2 (свойства степеней с рациональным показателем)

Для $a, b\in\mathbb{R}_+^*$, $x, y\in\mathbb{Q}$, верно:

1° $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; 2° $(a^x)^y=a^{xy}$; 3° $(ab)^x=a^x\cdot b^x$; 4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$; 5° $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

6° а) $(a>1,\ x>y)\Leftrightarrow a^x>a^y$; б) $(0<a<1,\ x>y)\Leftrightarrow a^x<a^y$;

7° а) $(a>b,\ x>0)\Leftrightarrow a^x>b^x$; б) $(a>b,\ x<0)\Leftrightarrow a^x<b^x$;

8° $(a^x=a^y,\ a\neq 1)\Leftrightarrow x=y$.

Доказательство:

Докажем свойства 1°, 2°, 4° (остальные свойства можно доказать аналогично).

Пусть $x=\frac{m}{k}$, $y=\frac{p}{r}$, $m, p\in\mathbb{Z}$, $k, r\in\mathbb{N}^*$. Используя свойства корней и степеней с целым показателем, получаем:

$$1°\ a^x\cdot a^y=a^{\frac{m}{k}}\cdot a^{\frac{p}{r}}=\sqrt[k]{a^m}\cdot\sqrt[r]{a^p}=\sqrt[kr]{a^{mr}}\cdot\sqrt[kr]{a^{kp}}=\sqrt[kr]{a^{mr+kp}}=a^{\frac{mr+kp}{kr}}=a^{\frac{m}{k}+\frac{p}{r}}=a^{x+y};$$

$$2°\ (a^x)^y=(a^{\frac{m}{k}})^{\frac{p}{r}}=\sqrt[r]{(\sqrt[k]{a^m})^p}=\sqrt[r]{\sqrt[k]{a^{mp}}}=\sqrt[rk]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{rk}}=a^{xy};$$

$$4°\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{k}}=\sqrt[k]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\sqrt[k]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{\sqrt[k]{a^m}}{\sqrt[k]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{k}}}{b^{\frac{m}{k}}}=\frac{a^x}{b^x}.\ ▶$$

Задание. Докажите свойства 3°, 5°–8°.

Задания с решением

1. Вычислим значение выражения $A=2^{-1}(4)^{\frac{5}{2}}\cdot(0{,}25)^5\cdot 8^2$.

Решение:

$$A=2^{-1}(4)^{\frac{5}{2}}\cdot(0{,}25)^5\cdot 8^2=2^{-1}(2^2)^{\frac{5}{2}}\cdot(2^{-2})^5\cdot(2^3)^2=2^{-1}\cdot 2^{2\cdot\frac{5}{2}}\cdot 2^{-10}\cdot 2^6=2^{-1+5-10+6}=2^0=1.$$

2. Сравним числа $(\sqrt[3]{5})^2$ и $(\sqrt{3})^5$.

Решение:

В силу очевидных числовых неравенств $4<5$, $\sqrt[6]{5}<\sqrt{3}$ и свойств 6° и 7° получаем: $(\sqrt[3]{5})^2=(\sqrt[6]{5})^4<(\sqrt{3})^4<(\sqrt{3})^5$.

3. Преобразуем выражение $A=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$.

Решение:

$$A=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}})=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y.$$

4. Представим в виде степени выражение $A=(\sqrt{a}\cdot b-b^{\frac{2}{3}})^2+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}$.

Решение:

$$A=(\sqrt{a}\cdot b-b^{\frac{2}{3}})^2+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}=(\sqrt{a}\cdot b)^2-2\sqrt{a}\cdot b\cdot b^{\frac{2}{3}}+(b^{\frac{2}{3}})^2+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}=$$

$$=ab^2-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}=(\sqrt{a}\cdot b+b^{\frac{2}{3}})^2.$$

5. Упростим на ОДЗ выражение $B=\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}y}$.

Решение:

$$B=\frac{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}y}=\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{2}{3}}y}=\frac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

6. Упростим выражение:

$$C=\frac{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2-4\cdot\sqrt[3]{xy}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}+2x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}.$$

Решение:

Чтобы упростить выражение C, разложим на множители числители и знаменатели отношений: $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})$; $x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$;

$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2-4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2$.

Произведение первых двух отношений выражения C принимает вид:

$$\frac{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})}=\frac{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})((x^{\frac{1}{6}})^2-(y^{\frac{1}{6}})^2)}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})}=\frac{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

Итак, получаем: $C=\dfrac{x^{\frac{2}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{2}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{2}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}.$

3 ***Степень положительного числа с иррациональным показателем*** определяем, используя десятичные приближения иррационального числа с недостатком и избытком (см. модуль 1). Известно, что для любого иррационального числа x существуют такие рациональные числа x_n, x'_n, что $x_n < x < x'_n$, $x'_n - x_n = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Степенью числа a, $a > 1$ $(0 < a < 1)$, обозначенной a^x, **с иррациональным показателем** x, называется действительное число t, которое для любого натурального n удовлетворяет двойным неравенствам $a^{x_n} < t < a^{x'_n}$ $(a^{x'_n} < t < a^{x_n})$, где x_n, x'_n – десятичные приближения числа x с недостатком и избытком соответственно.

По определению считаем, что $1^x = 1$ для любого иррационального числа x.

Задание с решением

Найдем несколько десятичных приближений с недостатком и избытком для:

а) $5^{\sqrt{2}}$; б) $(0{,}1)^{\sqrt{2}}$.

Решение:

а) Известны десятичные приближения числа $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2; \quad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5; \quad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42; \quad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415; \ \ldots$$

Следовательно, число $t = 5^{\sqrt{2}}$ удовлетворяет двойным неравенствам:

$$5^1 < t < 5^2; \quad 5^{1,4} < t < 5^{1,5}; \quad 5^{1,41} < t < 5^{1,42}; \quad 5^{1,414} < t < 5^{1,415}; \ \ldots$$

б) Используя десятичные приближения числа $\sqrt{2}$, получаем десятичные приближения числа $s = (0{,}1)^{\sqrt{2}}$:

$$(0{,}1)^2 < s < (0{,}1)^1; \ (0{,}1)^{1,5} < s < (0{,}1)^{1,4}; \ (0{,}1)^{1,42} < s < (0{,}1)^{1,41}; \ (0{,}1)^{1,415} < s < (0{,}1)^{1,414}; \ \ldots$$

4 ***Степень положительного числа с действительным показателем*** обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем. Докажем, например, свойство $1°$ теоремы 2.

Доказательство:

Из двойных неравенств $x_n \le x < x'_n$ и $y_n \le y < y'_n$, где x_n, x'_n, y_n, y'_n – десятичные приближения действительных чисел x, y, получаем, что $x_n + y_n \le x + y < x'_n + y'_n$ и при $a > 1$ имеем $a^{x_n} \le a^x < a^{x'_n}$, $a^{y_n} \le a^y < a^{y'_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Умножив почленно эти неравенства, получим $a^{x_n} a^{y_n} \le a^x a^y < a^{x'_n} a^{y'_n}$, или $a^{x_n + y_n} \le a^x a^y < a^{x'_n + y'_n}$. Поскольку a^{x+y} также должно удовлетворять последнему неравенству для $n \in \mathbb{N}$, то ввиду единственности числа, удовлетворяющего этим неравенствам, следует, что $a^x a^y = a^{x+y}$. ▶

***Замечания.* 1.** При $a \le 0$ степень с иррациональным показателем не определяется.

2. Для любого $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем $a^x > 0$, так как a^x содержится между двумя степенями с рациональными показателями числа a, которые, как известно, положительны.

Задания с решением

1. Вычислим $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}}$.

Решение:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-9}=(2^{-1})^{-9}=2^9=512.$$

2. Сравним действительные числа x и y, если известно, что $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^x\ge(\sqrt{7}-\sqrt{5})^y$.

Решение:

Поскольку даны две степени с одинаковым основанием, сравним с единицей это основание. Из двойных неравенств $2<\sqrt{7}<3,\ 2<\sqrt{5}<3$ следует, что $0<\sqrt{7}-\sqrt{5}<1$ (так как $\sqrt{7}>\sqrt{5}$). По свойству 6° теоремы 2 получаем, что $x\le y$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}_+$ уравнение $x^{\sqrt{2}}=7$.

Решение:

Так как показатель степени – иррациональное число, то x должно быть положительным числом. Тогда: $(x^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=7^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Leftrightarrow x=7^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Ответ: $S=\{7^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\}$.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}_+$ неравенство $x^{\sqrt{3}}>x^2$.

Решение:

Как и в задании 3, x принимает только положительные значения. Поскольку основания степеней одинаковы, сравним показатели. Учитывая, что $\sqrt{3}<2$, в силу свойства 7° получаем, что $0<x<1$.

Ответ: $S=(0,1)$.

Упражнения и задачи

A

1. Вычислите:

а) $3^{-1}\cdot5+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$; б) $\frac{9}{9{,}28\cdot10^{-5}-2{,}8\cdot10^{-6}}$; в) $\frac{0{,}04^{-2}\cdot25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{2\cdot5^4}$;

г) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^{4}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}\cdot\left(\frac{1}{625}\right)^{3}$; д) $(2{,}73)^0\cdot(0{,}4)^{-2}\cdot(2{,}5)^2$; е) $\frac{3\cdot7^{-1}\cdot\frac{7}{4}}{(0{,}5)^2\cdot3^{-1}}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; б) $\frac{x+2x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; в) $\frac{a-4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}$; г) $\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$;

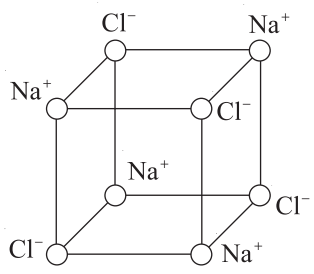
д) $\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)^4$; е) $(3^{-1})^6\cdot9^{\sqrt{3}}(9^{-1})^{\sqrt{27}}$; ж) $\left((27)^{-1\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{8}}$.

3. Сравните с 1:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{\pi}}$; в) $(\pi-3)^{-\sqrt{3}}$.

4. Цена футболки после двух последовательных повышений на один и тот же процент изменилась со 100 д. е. до 125,44 д. е. На сколько процентов повышалась цена каждый раз?

5. Кристалл поваренной соли (NaCl) состоит из 4 ионов натрия (Na^+) и 4 ионов хлора (Cl^-), расположенных в вершинах решетки в виде куба. Диагональ грани куба равна $4\cdot10^{-8}$ см. Сколько таких кубиков содержатся (приблизительно) в одной крупице соли объемом $0,1$ мм^3?



6. Найдите x, если одна сторона прямоугольника равна $x^{\frac{3}{2}}$ см, другая – x^2 см, а площадь прямоугольника равна 15 см^2.

Б

7. Вычислите:

а) $\dfrac{2\cdot5^{20}-9\cdot5^{19}}{5^{18}}$; б) $4^{-1}\cdot(0,34)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\cdot(6,25)^{0,5}$;

в) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot(0,3)^{-1}\cdot(7)^0\cdot(0,1)^{-4}$; г) $\dfrac{(0,2)^{-1}\cdot5^4\cdot25^4\cdot(0,2)^{-4}}{4\cdot5^2}$.

8. Упростите выражение (на соответствующей ОДЗ):

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a+b}$; б) $\left(1-\dfrac{x^{-3}-1}{x^{-1}-1}:\dfrac{1+x+x^2}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1-x^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{1-x^{-1}}\right)$;

в) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2}$; г) $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}}-8y\cdot\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$;

д) $\dfrac{m^5+m^4\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$; е) $\left((\sqrt{7})^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$; ж) $\dfrac{75^{\sqrt{48}}}{25^{\sqrt{108}}}\cdot\dfrac{5^{27\sqrt{3}}}{15^{\sqrt{27}}}$.

9. Сравните с 1:

а) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$; б) $(\sqrt{7}-1)^{\frac{1}{3}}$; в) $(\sqrt{3}-1)^{\frac{7}{2}}$; г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

10*. Проверьте справедливость равенства:

а) $((x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2)(x^4-x^2\sqrt{2}+1)^{-1}+x^2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=x^2+\sqrt{2}$;

б) $(x+2(x-1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+(x-2(x-1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2$, если $1\le x\le 2$.

11*. Докажите, что разность любого четырехзначного целого числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, кратно 9.

§3 Логарифмы

Логарифмы были изобретены шотландским ученым ***Джоном Непером*** *(1550–1617). Он сделал открытие, что умножение и деление чисел можно заменить соответственно на сложение и вычитание логарифмов этих чисел. И. Кеплер, например, использовал десятичные логарифмы для громоздких астрономических расчетов. В настоящее время сложно найти область науки, где бы не применялись логарифмы.*

3.1. Понятие логарифма

В предыдущем параграфе определили степень c положительного действительного числа a с произвольным действительным показателем b так, что $a^b = c,\ c > 0$. В связи с этим можно сформулировать две задачи:

1) найдите число a, если известны действительное число b и положительное число c;

2) найдите число b, если известны числа $c,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$.

Первая задача (для $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$) привела к введению понятия *корня* (*радикала*).

Вторая задача привела к введению понятия *логарифма*.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение

Теорема 3. Для любых положительных действительных чисел $a, c, a \neq 1$, существует единственное действительное число b, удовлетворяющее равенству $a^b = c$.

Замечание. Единственность числа b следует из свойства 8° степеней.

Определение. Логарифмом положительного числа c по основанию $a,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$, называется действительное число b, для которого $a^b = c$.

Обозначают: $\log_a c = b$.

Следовательно, $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$ (1). Подставив выражение для b в равенство (1), получим ***основное логарифмическое тождество***:

$$\boxed{a^{\log_a c} = c}.$$

Пример

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Задания с решением

1. Вычислим $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$.

Решение:

Обозначим $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = \alpha$. По определению логарифма $(\sqrt{3})^{\alpha} = \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$, откуда $3^{\frac{\alpha}{2}} = 3^{\frac{2}{3}}$. Приравнивая показатели степеней, получаем $\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$.

2. Найдем действительные числа x, при которых имеет смысл выражение $\log_x(3-x)$.

Решение:

По определению логарифма получаем $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0, 1)\cup(1, 3).$

***Замечания.* 1.** Условие $a\neq 1$ обязательно, поскольку в противном случае, согласно определению логарифма, $1^b=1$ для любого $b\in\mathbb{R}$ и, следовательно, число b не определяется однозначно.

2. Условие, чтобы числа a и c были положительными, исходит из понятия *степень числа с действительным показателем* и из того, что такая степень принимает только положительные значения. Поэтому выражения вида $\log_3(-6)$, $\log_{(-3)}9$ не имеют смысла.

3. В некоторых случаях в вычислениях используются ***десятичные логарифмы*** (обозначаются $\mathbf{lg}c=\log_{10}c,\ c>0$) и/или ***натуральные логарифмы*** (обозначаются $\mathbf{ln}c=\log_e c,\ c>0$, где $e=2{,}7182...$ – иррациональное число, которое будет определено позже.

4. К понятию логарифм числа мы вернемся в модуле 7.

3.2. Свойства логарифмов

Теорема 4 (свойства логарифмов)

Для любых $a, c, x, y\in\mathbb{R}_+^*$, $a\neq 1, c\neq 1, \alpha\in\mathbb{R}$, верно:

1° $\log_a a=1$;

2° $\log_a 1=0$;

3° $a^{\log_a x}=x$ (*основное логарифмическое тождество*);

4° $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;

5° $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;

6° $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$;

7° $\log_{a^\alpha} x=\frac{1}{\alpha}\log_a x$ $(\alpha\neq 0)$;

8° $\log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a}$;

9° $\log_a c=\frac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x=\log_a y\Rightarrow x=y$.

Замечание. Свойства 4°–7° могут быть обобщены в виде свойств 11°–14° для случаев, когда выражения левых частей имеют смысл и для отрицательных значений x и y; например, $\log_a(-3)^4$.

Теорема 4 (свойства логарифмов, продолжение)

Для любых $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u, v\in\mathbb{R}_-^*$, $\alpha=2k$, $k=\mathbb{Z}^*$, выполнены равенства:

11° $\log_a(uv)=\log_a|u|+\log_a|v|$;

12° $\log_a\frac{u}{v}=\log_a|u|-\log_a|v|$;

13° $\log_a u^\alpha=\alpha\log_a|u|$;

14° $\log_{u^\alpha} x=\frac{1}{\alpha}\log_{|u|} x$.

Доказательство:

Свойства 1° и 2° следуют из равенств $a^1=a$ и $a^0=1$ соответственно.

3° Пусть $a^b=x$, $a\neq 1$, тогда $b=\log_a x$. Подставив выражение для b в первое равенство, получим $a^{\log_a x}=x$.

4° Исходя из свойства 3°, получим $a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$. На основании свойства 8° степени получаем, что $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Свойства 5° и 6° доказывают аналогично свойству 4°.

7° $(a^\alpha)^{\log_{a^\alpha} x} = x = a^{\log_a x} = (a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\log_a x}$, следовательно, $\log_{a^\alpha} x = \dfrac{1}{\alpha}\log_a x$.

8° $a^{\log_a x} = x = c^{\log_c x} = c^{\log_c a \cdot \frac{\log_c x}{\log_c a}} = (c^{\log_c a})^{\frac{\log_c x}{\log_c a}} = a^{\frac{\log_c x}{\log_c a}}$. Приравнивая показатели степеней, получаем соответствующее свойство.

Свойство 9° следует из свойства 8° при $x = c$, с учетом, что $\log_c c = 1$.

Свойства 11°–14° следуют из свойств 4°–7° при замене uv на $|uv|$, $\dfrac{u}{v}$ на $\left|\dfrac{u}{v}\right|$, u^α на $|u|^\alpha$. ▶

Задания с решением

1. Используя свойства логарифмов, можно вычислить иначе логарифм задания 1, стр. 38: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = \dfrac{4}{3}$.

2. Упростим выражение $A = \log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \dfrac{1}{2}\log_4^2 x^4 + 2^{-3\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)}$.

Решение:

Применив свойства логарифмов, перейдем во всех слагаемых выражения A к логарифмам по основанию 2 (при $x > 0$, $x \neq 1$):

$\log_2 2x^2 = \log_2 2 + \log_2 x^2 = 1 + 2\log_2 x$; $x^{\log_x(\log_2 x + 1)} = \log_2 x + 1$;

$(\log_{2^2} x^4)^2 = \left(\dfrac{4}{2}\log_2 x\right)^2 = 4\log_2^2 x$; $2^{-3\log_{2^{-1}}(\log_2 x)} = 2^{3\log_2(\log_2 x)} = 2^{\log_2(\log_2 x)^3} = \log_2^3 x$.

Тогда $A = \log_2 2 + \log_2 x^2 + \log_2 x \cdot (\log_2 x + 1) + \dfrac{1}{2}(\log_{2^2} x^4)^2 + 2^{-3\log_{2^{-1}}(\log_2 x)} =$

$= 1 + 3\log_2 x + \log_2^2 x + 2\log_2^2 x + 2^{\log_2(\log_2 x)^3} = 1 + 3\log_2 x + 3\log_2^2 x + \log_2^3 x = (1 + \log_2 x)^3$.

Операция, при выполнении которой выражению E ставится в соответствие $\log_a E$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***логарифмированием***. Действие, обратное логарифмированию, то есть отыскание выражения по его логарифму, называется ***потенцированием***.

Замечания. **1.** Исходя из свойства 10°, заключаем, что равенства $\log_a b = \log_a c$ и $b = c$ равносильны для любых $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.

2. Сравнение логарифмов с одинаковыми основами выполняется следующим образом: если $c > 1$, то $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a < b$, а если $0 < c < 1$, то $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a > b$.

Задания с решением

1. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x^{\log_2 x} = 4$.

Решение:

ОДЗ: $x \in (0, +\infty)$.

Логарифмируя и используя свойства логарифмов, получаем:

$$\log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 2 \Leftrightarrow |\log_2 x| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -\sqrt{2}, \\ \log_2 x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Потенцируя, находим: $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$.

Ответ: $S = \{2^{-\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{2}}\}$.

2. Сравним $\log_2 3$ с 1,5.

Решение:

Полагаем, что $\log_2 3 < 1{,}5$. Потенцируя, на основании свойств степени получаем $2^{\log_2 3} < 2^{1{,}5} \Leftrightarrow 3 < 2^{1{,}5}$. Последнее неравенство неверно, поскольку $2^{1{,}5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} < 3$. Следовательно, верно, что $\log_2 3 > 1{,}5$.

Замечание. В силу свойств 3° и 6° любое положительное число можно представить как степень любого другого положительного, отличного от 1, числа или как логарифм положительного числа с произвольным положительным, отличным от 1, основанием. Действительно, $a = c^{\log_c a} = \log_c c^a$, $a, c \in \mathbb{R}_+^*$, $c \neq 1$. Эти представления применяются при решении уравнений, неравенств и т. д.

Упражнения и задачи

А

1. Упростите выражение:

а) $25^{\log_5 3}$; б) $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$; в) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$; г) $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$; д) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$.

2. Найдите число *x*, если $\lg x = 2\lg 5 - 3\lg 2 - 0{,}5\lg 625 + 0{,}25\lg 256$.

3. Найдите $\lg 56$, если $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

4. Упростите выражение $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$.

5. Докажите, что $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36} = 24$.

6. Запишите в порядке возрастания числа $\log_2 3$, 1, $\log_2 5$.

7. Докажите, что $\log_3 2 > 0{,}5$.

Б

8. Упростите выражение:

а) $\log_2 ab - \log_2 |b|$;

б) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$;

в) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$;

г) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

д) $(6(\log_b a \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$;

е) $\left(a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$;

ж) $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2} \cdot (\log_n p - \log_{np} p)\sqrt{\log_n p}$;

з*) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.

9. Найдите число x, если $\log_5 x = 2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2.$

10. Докажите (при допустимых значениях переменных), что:

а) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b;$ б) $\lg\dfrac{|a+b|}{3} = \dfrac{\lg|a| + \lg|b|}{2}$, если $a^2 + b^2 = 7ab;$

в) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c};$ г) $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}} = \lg a.$

11. Найдите:

а) $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b;$ б) $\log_{54} 168$, если $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b.$

12. Применив свойства степеней, докажите двойное неравенство $0{,}6 < \log_3 2 < 0{,}7.$

13*. Найдите значение выражения $2^a + 2^{-a}$, если $4^a + 4^{-a} = 23.$

14*. Упростите выражение $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \log_{a-b} m$, если $m^2 = a^2 - b^2.$

Упражнения и задачи на повторение

A

1. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{1024};$ б) $\log_{\sqrt{3}} 4 + \log_3 \dfrac{9}{2};$

в) $5\sqrt[3]{0{,}027} - (\sqrt[4]{0{,}0016})^{-2};$ г) $((0{,}6)^{-4})^{-0{,}75} \cdot (0{,}09)^{-2^{-1}} \cdot 0{,}1^{-4}.$

2. Найдите истинностное значение высказывания:

а) $7\sqrt{2} > 2\sqrt{7};$ б) $\log_{\sqrt{3}} 2 < \log_{\sqrt{3}} 0{,}5;$

в) $\sqrt{3} + 1 = \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}};$ г) $\log_3 \dfrac{5}{9} - \log_3 5 = 2;$ д) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}} = x^{\frac{1}{30}},\ x \ge 0;$

е) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}},\ \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+;$ ж) $\log_\pi(xy) = \log_\pi|x| + \log_\pi y,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+.$

3. Вычислите: а) $(\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{125} + \sqrt{3} - 6\sqrt{5});$ б) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}5^{-3} : 4.$

4. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{2x-1} + 2x + 1\right) : \left(2x + \dfrac{4x^2}{1-2x}\right);$ б) $\log_3 5 \log_4 9 \log_5 2.$

5. Сравните числа: а) $\sqrt[6]{35}$ и $\sqrt[7]{35};$ б) $(\sqrt{5})^{16}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-10}.$

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}};$ б) $\dfrac{1}{x + \sqrt{y}};$ в) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}};$ г) $\dfrac{1}{3 - \sqrt{2} - \sqrt{5}}.$

7. Бассейн санатория в виде параллелепипеда наполняют лечебной водой из цистерны до уровня 1,77 м. Основанием бассейна является прямоугольник со сторонами 2,0 м и 2,3 м. В наличии цистерны в виде куба с ребром: 1,9 м, 1,95 м, 2,0 м, 2,05 м, ... Какую цистерну следует выбрать, чтобы водой из нее максимально возможно наполнить бассейн, не превышая предусмотренного уровня?

8. Некто утверждает, что $3<2$, так как из $(0,5)^3<(0,5)^2$ последовательно следует:

$$\lg(0,5)^3<\lg(0,5)^2,\ 3\lg 0,5<2\lg 0,5,\ 3<2.$$

Где ошибка?

Б

9. Докажите, что:

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$, если $x\le 2$;

б) $\log_c \dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)$, если $a^2+b^2=7ab$.

10. Найдите истинностное значение высказывания:

а) $3+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$;

б) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9\sqrt{18}-9\sqrt{12}-3}$.

11. Упростите выражение (при допустимых значениях переменных):

а) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-16^{-0,25})(16^{-0,25}+(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}})$;

б) $3^{\frac{1}{\log_5\sqrt{3}}}-9^{\log_3 5}-3^{\log_9 36}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{a+\sqrt[6]{a^3b^2}}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^3b}+\dfrac{b\sqrt{a}-a^2}{\sqrt[3]{b}-\sqrt{a}}}$;

г) $\log_{\sqrt{6}}(a^3-2)+\log_6(a-2)+\log_{\frac{1}{6}}(a-2)$.

12. Сравните:

а) $\log_{0,3}\left(\dfrac{11}{6}\log_2 6-\dfrac{11}{6}\right)$ с 0;

б) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$ с $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^5}}}$ с $\sqrt[6]{\sqrt[4]{\sqrt{8^4}}}$;

г) $\log_{\sqrt{2}}7$ с $\log_{0,2}3$.

13. При каких значениях a верно равенство $\log_b a^2=2\log_b(-a)$?

14*. Вычислите $\log_{\sqrt{3}}8$, если $\log_{12}3=a$.

15*. Найдите натуральное число n, при котором верно равенство $3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{3n-1}=27^5$.

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

В заданиях 1, 8 укажите верный вариант.

1. Значения переменных a, b, для которых $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$, принадлежат множеству 1

A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $\mathbb{R}^*_+$. **D** $\mathbb{Z}$.

2. Сравните числа $3\sqrt{7}$ и $7\sqrt{3}$. 1

3. Вычислите $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{1,6}+3\sqrt{0,4})$. 1

4. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$. 1

5. Найдите истинностное значение высказывания: 1

а) $8^{\frac{2}{3}}=4^2$;

б) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$.

6. Расположите в порядке убывания числа $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$. 1

7. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. 1

8. Значение выражения $\left((\sqrt{8})^{-\frac{13}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$ 1

A больше 1. **B** меньше 1. **C** равно 1.

9. Вычислите $81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\log_9 16}+3^{\frac{2}{\log_7 9}}$. 1

10. Найдите ОДЗ переменных и упростите выражение: 1

$$a^{\frac{2}{\log_b a}+1}\cdot b-2a^{\log_a b+1}\cdot b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}.$$

Б

В заданиях 1, 8 укажите верный вариант.

1. Значения переменных a, b, для которых $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}$, $n\in\mathbb{N}^*$, принадлежат множеству 1

A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $\mathbb{R}_+^*$. **D** $\mathbb{Z}$.

2. Сравните $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}$ с $(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$. 1

3. Вычислите $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$. 1

4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}-\sqrt[4]{xy^4}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{x^5}}$. 1

5. Найдите истинностное значение высказывания: 1

а) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{5}{6}}$; б) $\left((-2)^{\frac{3}{4}}\right)^{2}=2^{\frac{3}{2}}$.

6. Расположите в порядке возрастания числа $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}, \left(\frac{4}{9}\right)^{-0,2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$. 1

7. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$. 1

8. Значение выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^{3}$ 1

A больше 1. **B** меньше 1. **C** равно 1.

9. Вычислите $-\log_2\sqrt{\sqrt[5]{\log_4\sqrt{256}}}$. 1

10. Найдите ОДЗ переменной a и упростите выражение: 1

$$(2^{\log_{4\sqrt{2}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a):(7^{4\log_{49} a}-a-1).$$

Корни. Степени. Логарифмы

$a^b = c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$

Нахождение c — Нахождение a, если $b = n \in \mathbb{N}^*$, $b \ge 2$ — Нахождение b

Степени

Определения

1) $b = n$, $n \in \mathbb{N}$: $a^0 = 1$ $(a \ne 0)$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$;

2) $b = -n$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \ne 0)$;

3) $b = \frac{m}{k}$: $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a > 0$;

4) $b = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a > 1$, $a^{x_k} \le a^{\alpha} \le a^{y_k}$;

$0 < a < 1$, $a^{y_k} \le a^{\alpha} \le a^{x_k}$, где x_k, y_k – десятичные приближения числа α;

$0^{\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

Свойства

Для $x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*_+$ верно:

1° $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2° $(a^x)^y = a^{xy}$;

3° $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

5° $a^x : a^y = a^{x-y}$.

Корни

Определения

1) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow a^n = c$, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$;

2) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = c, \\ a > 0, \end{cases}$ $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Свойства

Для $a, b \in \mathbb{R}_+$ (свойства 1°–5°), верно:

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2° $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;.

3° $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

4° $\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}$;

5° $\sqrt{a^2} = |a|$;

6° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}^*_+$;

7° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$, $ab \ge 0$;

8° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$, $ab \ge 0$, $b \ne 0$;

9° $\sqrt[mk]{a^k} = \sqrt[m]{|a|}$, k четно.

Логарифмы

Определения

$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$, $c, a \in \mathbb{R}^*_+$, $a \ne 1$, $b \in \mathbb{R}$.

$\lg c = \log_{10} c$ – десятичные логарифмы;

$\ln c = \log_e c$ – натуральные логарифмы,

где $e \approx 2{,}71\ldots$

Свойства

Для $a, c \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}^*_+$ (свойства 1°–9°) верно:

1° $\log_a a = 1$; 2° $\log_a 1 = 0$; 3° $a^{\log_a c} = c$;

4° $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

5° $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

6° $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$;

7° $\log_{a^{\alpha}} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x$, $\alpha \ne 0$;

8° $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$; 9° $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $x \ne 0$;

11° $\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$;

12° $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$, $xy > 0$.

модуль 4 Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

Исаак Ньютон

Учение – как золото – всегда в цене.

Эпиктет

Цели

- идентификация понятий: *упорядоченное множество*, *факториал*, *размещение*, *перестановка*, *сочетание элементов конечных числовых множеств*;
- использование размещений, перестановок, сочетаний при решении уравнений, неравенств, простых задач из повседневной жизни;
- *применение бинома Ньютона и/или формулы общего члена разложения степени бинома в действительных или смоделированных ситуациях;
- *применение свойств биномиальных коэффициентов и разложения степени бинома при решении различных задач.

§1 Элементы комбинаторики

1.1. Упорядоченные множества

Задача 1. Необходимо обеспечить 150 000 квартир номерами телефонов, каждый из которых состоит из шести различных цифр. Возможно ли это, если известно, что номер телефона может начинаться и с цифры 0?

Задача 2. Для выступления на конференции были зарегистрированы 7 рефератов. Сколькими способами можно запрограммировать эти выступления?

Задача 3. В X классе обучается 24 учащихся. Каждый день группа из 3 учеников дежурит по классу. Сколькими способами можно выбрать этих трех дежурных?

Заметим, что в подобных задачах речь идет о размещении элементов конечного множества в определенном порядке, о нахождении количества подмножеств данного конечного множества, обладающих определенными свойствами, о количестве тех или иных комбинаций элементов и т. п. Такие задачи называются ***комбинаторными задачами***. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют ***комбинаторикой***.

Комбинаторные задачи возникают как на практике, так и в различных областях науки и техники. Они встречаются при изучении теории вероятностей, теории чисел, математической логики, информатики, физики, химии и др. При решении комбинаторных задач в одних случаях мы будем искать хотя бы одно решение, в других – все решения или оптимальное из них, или только общее количество решений и т. д. Можно доказать, что

Леонард Эйлер

некоторые комбинаторные задачи не имеют решения. Например, Л. Эйлер (1707–1783) сформулировал задачу, а позже было доказано, что нельзя записать имена 36 офицеров, имеющих 6 различных воинских званий и принадлежащих к 6 разным родам войск (по одному офицеру данного звания в каждом роде войск), в 36 клетках квадрата размером 6×6 так, чтобы в каждой горизонтали и каждой вертикали были представлены все рода войск и все звания.

На рисунке 4.1 показано решение этой задачи для четырех родов войск (A, B, C, D) и четырех воинских званий (a, b, c, d). *Дополните таблицу и завершите решение.*

Aa	*Bd*		*Dc*
	Ac	*Da*	*Cd*
Cc		*Ad*	
	Ca	*Bc*	*Ab*

Рис. 4.1

Комбинаторные задачи возникают и в спортивных играх. Особенно часто они встречаются при игре в шахматы и шашки.

В данном учебнике приведем решения простейших (типовых) комбинаторных задач, то есть тех, в которых в каждой из учитываемых комбинаций элементы не повторяются.

Рассмотрим конечные числовые множества. Особое значение имеют в математике упорядоченные числовые множества. Каждое множество обладает собственной внутренней структурой, включающей как его элементы, так и порядок их расположения. Элементы множества могут быть упорядочены различными способами. Например, элементы множества $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ могут быть упорядочены следующим образом: $\{a_4, a_3, a_2, a_1\}$, $\{a_2, a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4, a_3\}$ и т. д. Каждое из этих множеств, несмотря на то, что состоит из одних и тех же элементов, отличается порядком их расположения.

Определение. Конечное множество $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется **упорядоченным множеством**, если его элементы расположены в определенном порядке. Другими словами, множество M называется **упорядоченным**, если каждому его элементу ставится в соответствие определенное натуральное число от 1 до n так, что различным элементам множества M соответствуют разные числа.

Одно и то же конечное множество может быть упорядочено различными способами. Например, множество учащихся X класса можно упорядочить по росту (в порядке возрастания или убывания), по массе тела или в алфавитном порядке фамилий.

***Замечания.* 1.** Упорядоченные множества, соответствующие данному множеству, принято записывать в круглых скобках.

Пример

$\{1, 2, 3\}$

$(1, 2, 3)$ $(1, 3, 2)$ $(3, 2, 1)$ $(2, 3, 1)$ $(2, 1, 3)$ $(3, 1, 2)$

2. Два упорядоченные множества ***равны***, если они состоят из одних и тех же элементов и у них одинаковый порядок расположения этих элементов.

Пример

Упорядоченные множества (a, b, c, d) и (a, b, c, e) различны. Также различны упорядоченные множества (8, 9, 10) и (8, 10, 9).

Произведение первых n ненулевых натуральных чисел обозначается $n!$, то есть $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Обозначение $n!$ читается „эн факториал“.

Примеры

$1!=1;\ 2!=1\cdot 2=2;\ 3!=1\cdot 2\cdot 3=6;\ 6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720.$

Замечание. Считаем, по определению, что $\boxed{0!=1.}$

Позже мы обоснуем это определение. В частности,

$$n!=(n-1)!\cdot n \text{ для } n\geq 1 \text{ или}$$
$$n!=(n-2)!\cdot (n-1)n \text{ для } n\geq 2, \text{ или}$$
$$n!=(n-3)!\cdot (n-2)(n-1)n \text{ для } n\geq 3, \text{ или}$$
$$n!=(n-4)!\cdot \boxed{}\cdot \boxed{}\cdot \boxed{}\cdot \boxed{} \text{ для } n\geq 4 \text{ и т. д.}$$

Примеры

1. $\dfrac{10!}{8!}=\dfrac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!}=90.$

2. $\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!}=\dfrac{(n-2)!\cdot (n-1)}{(n-2)!}=n-1.$

3. $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!}=\dfrac{(2n-1)!\cdot 2n}{(2n-1)!}=2n.$

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $\dfrac{(n+2)!}{2(n-1)!}=15(n+2).$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} n+2\geq 0 \\ n-1\geq 0 \\ n\in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\geq 1, \\ n\in \mathbb{N}. \end{cases}$

На ОДЗ имеем:

$$\frac{(n+2)!}{2(n-1)!}=15(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n-1)!\cdot n(n+1)(n+2)}{2(n-1)!}=15(n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)(n+2)=30(n+2) \Leftrightarrow n(n+1)=30 \Leftrightarrow n^2+n-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-6\notin \text{ОДЗ}, \\ n=5\in \text{ОДЗ}. \end{array}\right.$$

Ответ: $S=\{5\}$.

1.2. Размещения

Дано множество $M=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, $\operatorname{card} M=n$.

Выберем любые m элементов из данных n $(0\leq m\leq n)$ элементов множества M и составим различные упорядоченные множества.

Определение. Упорядоченные m-элементные, где $0\leq m\leq n$, подмножества множества M, $\operatorname{card} M=n$, называются **размещениями из *n* элементов по *m***.

Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m.

Считаем, по определению, что $A_n^0 = 1$.

Задание с решением

Дано множество $B = \{0, 2, 3\}$. Найдем число A_3^2.

Решение:

Из трех элементов 0, 2, 3 ($n = 3$) можно составить 6 упорядоченных подмножеств, содержащих по два ($m = 2$) элемента: (0, 2), (2, 0), (0, 3), (3, 0), (2, 3), (3, 2). Значит, $A_3^2 = 6$.

Найдем формулу для определения числа размещений из n элементов по m, то есть найдем формулу для вычисления числа A_n^m.

Очевидно, что $A_n^1 = n$. Один элемент из данных n элементов можно выбрать n способами, а из одного элемента можно составить только одно упорядоченное множество.

Чтобы разместить любые $m+1$ элементов из данных n элементов на $m+1$ местах, можно разместить любые m элементов на первые m мест. Это можно сделать A_n^m способами. Каждый раз при выборе m элементов из данных n остаются $n-m$ элементов, каждый из которых может быть размещен на $(m+1)$-ом месте. Значит, для каждого из A_n^m способов размещения элементов на первых m местах получаем $n-m$ возможностей, посредством которых $(m+1)$-е место занимает один из $n-m$ оставшихся элементов. Отсюда следует, что $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$. Учитывая, что $A_n^1 = n$, последовательно получаем: $A_n^2 = n(n-1)$, $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$, $A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$, ..., $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если m и n – натуральные числа, где $0 < m < n$, то

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

На практике удобнее пользоваться другой формулой для вычисления числа A_n^m.

Так как $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\times$

$\times\dfrac{(n-m)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, то

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.} \qquad (1)$$

Из формулы (1) для $m = 0$ получаем $A_n^0 = 1$, а для $m = n$ получаем $A_n^n = n!$. Таким образом, теорема 1 и формула (1) справедливы для любых натуральных чисел m и n, где $0 \le m \le n$.

Итак, задача 1 из пункта 1.1 решается следующим образом:

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!} = 151\,200.$$

Следовательно, возможны 151 200 телефонных номеров, и ответ положителен.

1.3. Перестановки

Задача 4. Дано множество $B=\{0, 2, 3\}$. Найдем число A_3^3.

Решение:

Из трех элементов 0, 2, 3 можно составить следующие 6 упорядоченных подмножеств, содержащих по три элемента:

$$(0, 2, 3), (0, 3, 2), (3, 0, 2), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (2, 0, 3).$$

Значит, $A_3^3=6=1\cdot 2\cdot 3=3!$.

Замечаем, что эти размещения получены путем соответствующей перемены мест данных трех элементов. Таким образом, получили перестановки.

Определение. Размещения из n элементов по n множества $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, называются **перестановками из n элементов**.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

На основании формулы $A_n^n=n!$ и определения перестановок получаем:

$$\boxed{P_n=n!,\ n\in \mathbb{N}^*.} \tag{2}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если $n\in \mathbb{N}^*$, то $P_n=n!$.

Итак, задача 2, предложенная в пункте 1.1, решается при помощи понятия перестановки. Имеем $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, тогда $P_7=7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5\,040$.

Следовательно, возможны 5 040 способов программирования 7 рефератов для выступления на конференции.

Из формул (1) и (2) получаем следующую формулу: $\boxed{A_n^m=\dfrac{P_n}{P_{n-m}}.}$

Замечание. Условимся, что пустое множество можно упорядочить единственным образом, то есть $P_0=1$. Следовательно, $0!=1$. Тогда формула (2) справедлива для любого $n\in \mathbb{N}$.

1.4. Сочетания

Задача 5. Дано множество $B=\{0, 2, 3\}$. Найдем все его неупорядоченные подмножества.

Решение:

Получаем следующие подмножества:

а) пустое множество: $\varnothing$;

б) подмножества, содержащие по одному элементу: $\{0\}, \{2\}, \{3\}$;

в) подмножества, содержащие по два элемента: $\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{2, 3\}$;

г) само множество $B=\{0, 2, 3\}$.

Значит, множество $B=\{0, 2, 3\}$ имеет всего восемь неупорядоченных подмножеств.

Определение. m-элементные неупорядоченные подмножества множества $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, где $0 \le m \le n$, называются **сочетаниями из n элементов по m**.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m или $\binom{n}{m}$.

Значит, для задачи 5 получаем, что: $C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$, а число всех неупорядоченных подмножеств множества $B=\{0, 2, 3\}$ равно

$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8=2^3$.

Заметим, что $C_n^0=1$, поскольку любое множество M имеет только одно безэлементное подмножество – пустое множество. $C_n^1=n$, так как n-элементное множество имеет ровно n одноэлементных подмножеств.

Замечание. Чтобы отличать сочетания от размещений, необходимо учесть, что:
- в сочетаниях все подмножества заданного множества не упорядочены, а в размещениях все подмножества упорядочены;
- элементы размещений записываются в круглых скобках, а элементы сочетаний – в фигурных скобках.

Например, размещения (1, 2) и (2, 1) считаются различными подмножествами, несмотря на то, что содержат одни и те же элементы, а подмножества $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ выражают одно и то же сочетание.

Итак, сочетания – это такие подмножества данного множества, которые отличаются между собой только элементами, без учета порядка их размещения.

Найдем формулу для определения числа сочетаний из n элементов по m, то есть найдем формулу для вычисления числа C_n^m.

Рассмотрим все m-элементные подмножества множества $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Упорядочим каждое из этих подмножеств всеми возможными способами и получим все m-элементные упорядоченные подмножества множества M. Известно, что число этих подмножеств равно A_n^m. Так как число всех m-элементных подмножеств множества M равно C_n^m, а каждое подмножество упорядочивается P_m способами, следует, что $A_n^m=C_n^m \cdot P_m$. Значит, $\boxed{C_n^m=\dfrac{A_n^m}{P_m}.}$

Из формул (1) и (2) получаем:

$$\boxed{C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}}, \quad \text{или} \quad \boxed{C_n^m=\frac{n(n-1)\,...\,(n-m+1)}{m!}.}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Если m и n – натуральные числа, где $0<m<n$, то

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (3)$$

Замечание. Из формулы (3) для $m=0$ получаем $C_n^0=1$, а для $m=n$ получаем $C_n^m=1$.

Таким образом, теорема 3 и формула (3) справедливы для любых натуральных чисел m и n, удовлетворяющих условию $0\le m\le n$.

Итак, задача 3 из пункта 1.1 решается следующим образом:

$$C_{24}^3=\frac{24!}{3!(24-3)!}=2\,024.$$

Следовательно, группу дежурных по классу можно составить 2 024 способами.

Свойства чисел C_n^m

Справедливы следующие равенства:

1° $C_n^m=C_n^{n-m}$, $0\le m\le n$, $m, n\in \mathbb{N}$ – *формула взаимозаменяемых сочетаний*;

2° $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$, $0\le m<n$, $m, n\in \mathbb{N}$ – *рекуррентная формула для определения числа сочетаний*;

3° $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$, $n\in \mathbb{N}$ – число всех неупорядоченных подмножеств n-элементного множества M равно 2^n, то есть $\operatorname{card}\mathcal{B}(M)=2^n$.

Задания. 1. Докажите свойства 1°–2°, пользуясь формулой для C_n^m.

2. Докажите свойство 3°, применив метод математической индукции.

Замечания. 1. Другое доказательство свойства 3° представлено в следующем параграфе.

2. Эти свойства выражают разные отношения между числом различных неупорядоченных подмножеств данного конечного множества.

Задание с решением

Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $C_{2n}^7>C_{2n}^5$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases}2n\ge 0\\ 2n\ge 7\\ 2n\ge 5\\ n\in\mathbb{N}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n\ge 3{,}5,\\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

На ОДЗ имеем:

$$C_{2n}^7>C_{2n}^5 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{7!(2n-7)!}>\frac{(2n)!}{5!(2n-5)!} \Leftrightarrow \frac{5!(2n-5)!}{7!(2n-7)!}>1 \Leftrightarrow \frac{5!(2n-7)!\cdot(2n-6)(2n-5)}{5!\cdot 6\cdot 7\cdot(2n-7)!}>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n-6)(2n-5)>42 \Leftrightarrow 4n^2-22n-12>0 \Leftrightarrow 2n^2-11n-6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}n>6,\\ n<0{,}5.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получим: $n>6$, $n\in\mathbb{N}$.

Ответ: $S=\{7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

1.5. Основные правила комбинаторики

1.5.1. *Правило умножения*

Задача 6. В X классе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно составить смешанные команды, состоящие из 4 юношей и 2 девушек, для участия в лицейских соревнованиях по волейболу?

Решение:

Четырех юношей из 12 можно выбрать C_{12}^4 способами, а двух девушек из 15 можно выбрать C_{15}^2 способами.

Тогда соответствующие команды можно составить

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^2 = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{14\cdot 15}{1\cdot 2} = 495\cdot 105 = 51\,975 \ \text{(способами)}.$$

Ответ: 51 975 способами.

При решении этой задачи мы использовали ***правило умножения***.

Теорема 4. Если множества A и B конечны, то кардинал декартова произведения $A\times B$ равен произведению кардиналов этих множеств:

$$\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card}A\cdot\operatorname{card}B.$$

Теорема 5. Если множества $B_1, B_2, ..., B_k$ конечны, то справедливо равенство:

$$\operatorname{card}(B_1\times B_2\times\ldots\times B_k) = \operatorname{card}B_1\cdot\operatorname{card}B_2\cdot\ldots\cdot\operatorname{card}B_k.$$

1.5.2. *Правило сложения*

Задача 7. Сколько натуральных делителей у числа 770?

Решение:

Разложим число 770 на простые множители: $770 = 2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$. Таким образом, число 770 имеет четыре простых натуральных делителя (числа 2, 5, 7, 11).

Число натуральных делителей, составленных из произведения двух простых множителей, равно $C_4^2 = 6$ (это числа 10, 14, 22, 35, 55, 77), а число натуральных делителей, составленных из произведения трех простых множителей, равно $C_4^3 = 4$ (это числа 70, 110, 154, 385).

Кроме того, делителями числа 770 являются числа 1 и 770.

Итак, число 770 имеет всего $4+6+4+1+1=16$ натуральных делителей.

Ответ: 16 натуральных делителей.

При решении этой задачи мы использовали ***правило сложения***.

Теорема 6. Если конечные множества A и B – непересекающиеся, то есть $A\cap B=\varnothing$, то кардинал объединения множеств A, B равен сумме кардиналов этих множеств:

$$\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}A + \operatorname{card}B.$$

Теорема 7. Если конечные множества $B_1, B_2, ..., B_k$ – попарно непересекающиеся, то есть $A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j,$ то справедливо равенство:

$$\operatorname{card}(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_k) = \operatorname{card}B_1 + \operatorname{card}B_2 + \ldots + \operatorname{card}B_k.$$

Задача с решением

Из двух бухгалтеров и восьми экономистов нужно составить комиссию из 6 человек, в которую должен входить хотя бы один бухгалтер. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Если в комиссии будет один бухгалтер, то эта комиссия, согласно правилу умножения, может быть составлена $C_2^1 \cdot C_8^5 = 112$ (способами).

Если в комиссии будут два бухгалтера, то она, согласно правилу умножения, может быть составлена $C_2^2 \cdot C_8^4 = 70$ (способами).

Итак, согласно правилу сложения, соответствующая комиссия может быть составлена $C_2^1 \cdot C_8^5 + C_2^2 \cdot C_8^4 = 112 + 70 = 182$ (способами).

Ответ: 182 способами.

Заметим, что нами до сих пор были рассмотрены простейшие (типовые) комбинаторные задачи, то есть задачи без повторений элементов. Комбинаторные задачи с повторениями элементов являются более сложными.

Например, при перестановке букв в слове „учитель" получаем $P_7 = 7! = 5\,040$ „слов".

Однако при перестановке букв в слове „класс" получаем меньше „слов", так как при перестановке двух букв „с" „слово" не меняется. В таких случаях имеем перестановки с повторениями элементов. Также существуют размещения с повторениями элементов и сочетания с повторениями элементов.

Упражнения и задачи

A

1. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

а) Запишите все упорядоченные множества для множества A.

б) Запишите все упорядоченные подмножества, содержащие два элемента множества A.

в) Запишите все упорядоченные подмножества, содержащие три элемента множества A.

2. Вычислите:

а) $3!;\ 5!;\ 8!$; б) $\dfrac{10!}{6!\cdot 2!}$; в) $\dfrac{9!\cdot 4!}{16!}$.

3. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 12$; б) $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{22n!}{(n-3)!}$; в) $\dfrac{n!}{(n-5)!} = \dfrac{6n!}{(n-3)!}$.

4. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} \le 20$; б) $\dfrac{16n!}{(n-1)!} > \dfrac{5n!}{(n-2)!}$; в) $\dfrac{(n-4)!}{(n-2)!} \ge \dfrac{1}{20}$.

5. Вычислите:

а) $A_5^3,\ A_8^1,\ A_7^5,\ A_8^8,\ A_3^6$; б) $P_3,\ P_5,\ P_0,\ P_{10},\ P_8$; в) $C_{10}^4,\ C_8^2,\ C_{16}^{16},\ C_{12}^7,\ C_9^8$.

6. Вычислите:

а) $\dfrac{A_5^4}{P_4}$; б) $A_7^5 \cdot C_5^3$; в) $\dfrac{C_7^4}{P_6}$; г) $A_8^2 \cdot P_3$; д) $C_4^3 \cdot A_3^2 \cdot P_4$; е) $\dfrac{A_5^3 + P_5}{C_6^4}$; ж) $\dfrac{C_2^4 - P_6}{A_6^4}$.

7. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 4$; б) $A_x^3 - C_x^{x-2} = 4{,}5x$; в) $A_x^3 = 3A_x^2 + 2C_x^4$.

8. Дано множество: 1) $A = \{0, 1\}$; 2) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

а) Запишите все подмножества множества A.

б) Найдите кардинал булеана множества A.

9. В вазе 10 красных и 6 желтых гвоздик. Сколькими способами можно составить букет из пяти гвоздик?

10. Национальный чемпионат по футболу проходит в два круга. Команды дважды проводят матчи друг с другом. Определите, сколько всего матчей следует запланировать, если в чемпионате участвуют 18 команд.

11. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще трех человек. Сколькими способами 5 человек могут распределить между собой эти обязанности?

12. Сколькими способами 8 детей смогут расположиться на скамейке?

13. Сколькими способами можно сшить трехцветное знамя при наличии семи одинаковых по размерам разноцветных прямоугольных отрезов ткани?

14. Сколько „слов“ можно составить из букв:

а) *р, о, д, и, н, а*; б) *з, о, в*; в) *ц, е, н, а*; г) *ш, к, о, л, ь, н, ы, й*?

15. Сколькими способами можно расставить 7 книг на полке?

16. Сколькими способами покупатель может выбрать 3 компакт-диска с разными играми из 8 различных компакт-дисков, предложенных продавцом?

17. В команде 16 игроков. Сколькими способами тренер может составить волейбольную команду из 6 игроков?

18. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Наугад извлекают одновременно два шара. Найдите вероятность события:

а) A = {извлечены два белых шара}; б) B = {извлечены два черных шара}.

19. Приведите примеры применения размещений, перестановок и сочетаний в жизненных ситуациях и в других школьных дисциплинах.

Б

20. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 2n\}$ так, чтобы каждое четное число находилось на четном месте?

21. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $\dfrac{6(2n)!}{(2n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-3)!}$; б) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} = C_5^3$; в) $\dfrac{(3n)!}{(3n-2)!} = \dfrac{5(n+1)!}{(n-1)!}$.

22. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $\dfrac{(n-6)!}{(n-5)!(n-4)} \le \dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \le 420$; в) $\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!} < 80$.

23. Вычислите:

а) $\dfrac{A_n^7 - A_n^9}{A_n^8}$; б) $\dfrac{A_{n-1}^{n-2} + P_{n-1}}{C_{n-1}^{n-3}}$; в) $\dfrac{A_n^3 \cdot P_n + 2P_{n+1}}{P_{n+1}}$; г) $\dfrac{A_n^m \cdot P_{n-m+1}}{P_{m-2}}$.

24. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $P_{x+5} = (x^2 - 25) \cdot A_{x+4}^y \cdot P_{x+4-y}$; б) $A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y} = 156P_{x-1}$.

25. Докажите, что для всех $n, m \in \mathbb{N}^*$ число $C_{n+m}^2 + C_{n+m+1}^2$ является точным квадратом.

26. Докажите, что $P_m = (m-1)(P_{m-1} + P_{m-2}),\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 2.$

27. При помощи цифр 0, 1, 2, 5, 6, 7 составьте всевозможные шестизначные натуральные числа (без повторения цифр в записи числа).

а) Сколько всего таких чисел можно составить? б) Сколько чисел начинаются с цифры 2?
в) Сколько чисел начинаются с цифры 1? г) Сколько чисел оканчиваются цифрой 1?
д) Сколько чисел начинаются с 20?

28. В конкурсе участвуют 8 девушек и 9 юношей. На определенном этапе должны участвовать смешанные пары. Определите, сколькими способами можно составить 6 смешанных пар.

29. В футбольной команде 25 игроков, включая двух вратарей. Сколькими способами тренер может составить команду из 11 игроков для запланированного футбольного матча?

30. У Марины 7 различных компакт-дисков с классическими музыкальными произведениями, а у Коли 9 различных компакт-дисков народной музыки. Сколькими способами они смогут обменяться по 3 компакт-диска?

31. Сколько натуральных делителей у числа: а) 210; б) 85; в) 101; г) 105?

32. У Ольги 10 красных и 6 желтых гвоздик. Сколькими способами она может составить букет из 3 красных и 2 желтых гвоздик?

33. На фирме работают 3 заместителя директора и 10 менеджеров. Сколькими способами можно составить комиссию из 5 человек, включающую хотя бы 2 заместителей директора?

34. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $2A_x^{x-3} > x \cdot P_{x-2}$; б) $A_x^3 + C_x^{x-2} \leq 14x$; в) $A_x^3 - 12C_x^4 > 3A_x^2$;
г) $5C_x^3 > C_{x+2}^4$; д) $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 < 1{,}25A_{n-2}^2$; е) $14P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4$.

35. Найдите, используя сочетания, количество диагоналей выпуклого многоугольника с n сторонами.

36. Докажите, что:

а) $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$;
б) $C_n^m = C_{n-3}^m + 3C_{n-3}^{m-1} + 3C_{n-3}^{m-2} + C_{n-3}^{m-3}$.

37. Составьте:

а) комбинаторные задачи на применение размещений;
б) комбинаторные задачи на применение перестановок;
в) комбинаторные задачи на применение сочетаний;
г) смешанные комбинаторные задачи.

38*. Решите на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+2} = 720; \end{cases}$ б) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} - 5A_{2y}^{3x-1} = 0, \\ 12C_{2y}^{3x} - 5C_{2y}^{3x-1} = 0. \end{cases}$

39*. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{2n}^n \cdot \sqrt{3n} < 4^n$. (Олимпиада по математике Республики Молдова, 2010)

§2 Бином Ньютона

2.1. Формула бинома Ньютона

На основании тождеств $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ легко проверить, что

$$(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=(a+b)^2(a+b)^3=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Заметим, что эти формулы являются частными случаями общей формулы $(a+b)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, где a, b – любые алгебраические выражения.

Докажем, что для любого $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}$, $0\le m\le n$, справедлива формула

$$\boxed{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n.} \qquad (1)$$

Формулу (1) называют ***формулой бинома Ньютона***.

Доказательство:

Докажем формулу (1) методом математической индукции.

Обозначим высказывание (1) через $P(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Для $n=1$ высказывание $P(1)$ справедливо, так как $(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b.$

Предположим, что для любого натурального числа $n=m$, $m\ge1$, высказывание $P(m)$ также справедливо, то есть $(a+b)^m=C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+C_m^2a^{m-2}b^2+\ldots+C_m^ka^{m-k}b^k+\ldots+C_m^mb^m$, где $k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le m$.

Докажем, что и для любого натурального числа $n=m+1$, $m\ge1$, высказывание $P(m+1)$ также справедливо. Действительно,

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m\cdot(a+b)=(C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+\ldots+C_m^ka^{m-k}b^k+\ldots+C_m^mb^m)(a+b)=$$
$$=C_m^0a^{m+1}+(C_m^0+C_m^1)a^mb+\ldots+(C_m^k+C_m^{k+1})a^{m-k}b^{k+1}+\ldots+(C_m^{m-1}+C_m^m)ab^m+C_m^mb^{m+1}.$$

Учитывая, что $C_m^0=C_{m+1}^0=C_m^m=C_{m+1}^{m+1}=1$, и применяя рекуррентные формулы вычисления числа сочетаний $C_m^0+C_m^1=C_{m+1}^1$, …, $C_m^k+C_m^{k+1}=C_{m+1}^{k+1}$, $C_m^{m-1}+C_m^m=C_{m+1}^m$, получаем: $(a+b)^{m+1}=C_{m+1}^0a^{m+1}+C_{m+1}^1a^mb+\ldots+C_{m+1}^{k+1}a^{m-k}b^{k+1}+\ldots+C_{m+1}^mab^m+C_{m+1}^{m+1}b^{m+1}$.

Следовательно, в силу метода математической индукции, высказывание $P(n)$ справедливо для любого натурального числа $n\ge1$.

Итак, для любого $n\in\mathbb{N}^*$ имеем:

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n$ или

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+b^n$ или

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^{n-m}b^m,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le m\le n.} \quad ▶$$

Замечание. Для краткой записи суммы членов конечной последовательности применяется символ „$\sum$” (сигма). Таким образом, $\sum_{i=1}^{n}a_i$ обозначает $a_1+a_2+\ldots+a_n$ и читается „сумма членов а-и, и от 1 до н“.

Задание с решением

Запишем разложение степени бинома $(a+b)^{12}$.

Решение:

$$(a+b)^{12}=C_{12}^{0}a^{12}+C_{12}^{1}a^{11}b+C_{12}^{2}a^{10}b^{2}+C_{12}^{3}a^{9}b^{3}+C_{12}^{4}a^{8}b^{4}+C_{12}^{5}a^{7}b^{5}+$$
$$+C_{12}^{6}a^{6}b^{6}+C_{12}^{7}a^{5}b^{7}+C_{12}^{8}a^{4}b^{8}+C_{12}^{9}a^{3}b^{9}+C_{12}^{10}a^{2}b^{10}+C_{12}^{11}ab^{11}+C_{12}^{12}b^{12}=$$
$$=a^{12}+12a^{11}b+66a^{10}b^{2}+220a^{9}b^{3}+495a^{8}b^{4}+792a^{7}b^{5}+924a^{6}b^{6}+$$
$$+792a^{5}b^{7}+495a^{4}b^{8}+220a^{3}b^{9}+66a^{2}b^{10}+12ab^{11}+b^{12}.$$

Определения. • Правая часть формулы бинома Ньютона называется **разложением степени бинома** $(a+b)^n$.

• Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^m, ..., C_n^n$ в формуле бинома Ньютона называются **биномиальными коэффициентами**.

Свойства разложения степени бинома

1° Количество слагаемых (членов) разложения степени бинома, а, значит, и количество биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, равно $n+1$.

2° В формуле бинома Ньютона показатели степени a убывают от n до 0, а показатели степени b возрастают от 0 до n.

3° В каждом слагаемом разложения степени бинома сумма показателей степеней a и b равна n.

4° $(k+1)$-й член разложения степени бинома $(a+b)^n$, то есть

$$\boxed{T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k,\ k\in\{0, 1, 2, ..., n\},}$$

называется ***общим членом разложения степени бинома***.

Подставляя в формулу для T_{k+1} вместо k натуральные значения от 0 до n, получаем все члены разложения степени бинома.

Например, $T_1=C_n^0a^nb^0$ – первый член разложения степени бинома, $T_5=C_n^4a^{n-4}b^4$ – пятый член разложения степени бинома.

Свойства биномиальных коэффициентов

1° Сумма всех биномиальных коэффициентов, при заданном значении n, равна 2^n: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$.

Действительно, пусть $a=b=1$. Подставляя эти значения в формулу бинома Ньютона, получаем: $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$.

2° Так как $C_n^m=C_n^{n-m}$, то биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны друг другу.

3° Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении степени бинома, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах этого же разложения, и равна 2^{n-1}.

Действительно, пусть $a=1,\ b=-1$. Подставляя эти значения в формулу бинома Ньютона, получаем $C_n^0-C_n^1+C_n^2+...+(-1)^nC_n^n=0$, что и подтверждает справедливость данного свойства.

4° а) При $n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*$, биномиальный коэффициент среднего члена разложения степени бинома (C_n^k) является наибольшим.

б) При $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$, биномиальные коэффициенты двух средних членов разложения степени бинома равны ($C_n^k=C_n^{k+1}$) и являются наибольшими.

Замечание. Следует различать коэффициент члена разложения степени бинома от биномиального коэффициента этого же члена разложения (в случае, когда a, b являются выражениями с коэффициентами).

Например, в разложении степени бинома $(3a+b)^3 = 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$ коэффициент третьего слагаемого равен 9, а биномиальный коэффициент этого же слагаемого равен $C_3^2 = 3$.

Биномиальные коэффициенты разложения степени бинома $(a+b)^n$ при различных значениях n могут быть вычислены при помощи ***треугольника Паскаля***.

Рекуррентная формула $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ позволяет последовательно вычислять биномиальные коэффициенты C_{n+1}^{m+1}, если известны коэффициенты C_n^m и C_n^{m+1}. Соответствующие значения удобно располагать в виде треугольника, называемого ***арифметическим треугольником*** или ***треугольником Паскаля.***

C_n^m	$n \in \mathbb{N}$	Бином степени n
1	$n = 0$	$(a+b)^0$
1 1	$n = 1$	$(a+b)^1$
1 2 1	$n = 2$	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$n = 3$	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$n = 4$	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$	$(a+b)^5$
1 6 15 20 15 6 1	$n = 6$	$(a+b)^6$
… … … … … … … … … … … … …	…	…

В $(n+1)$-й строке записаны числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Правило составления последующей строки треугольника, при уже известной предыдущей строке, следующее: первый и последний элементы строки равны 1; каждый из остальных элементов строки равен сумме двух элементов предыдущей строки, стоящих слева и справа от вычисляемого.

Итак, для восьмой строки треугольника Паскаля получаем следующие числа:

1, $1 + 6 = 7$, $6 + 15 = 21$, $15 + 20 = 35$, $20 + 15 = 35$, $15 + 6 = 21$, $6 + 1 = 7$, 1.

Задание. Заполните девятую строку треугольника Паскаля.

Замечание. В XI классе мы рассмотрим другой способ нахождения биномиальных коэффициентов, при помощи производной функции.

Степень с натуральным показателем разности двух выражений вычисляется по формуле, аналогичной формуле бинома Ньютона:

$$(a-b)^n = C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 - C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + (-1)^m C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n,$$

или: $$\boxed{(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n.} \quad (2)$$

Формула (2) выводится из формулы бинома Ньютона с учетом, что $(a-b)^n = [a+(-b)]^n$.

2.2. Приложения бинома Ньютона

Рассмотрим некоторые приложения биномиальных коэффициентов и разложения степени бинома.

Задания с решением

1. Найдем шестой член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+x)^{14}$.

Решение:

$$T_6 = C_{14}^5(\sqrt{x})^{14-5}\cdot x^5 = \frac{14!}{5!\cdot 9!}(\sqrt{x})^9\cdot x^5 = 2002x^5\cdot\sqrt{x^9} = 2002x^9\cdot\sqrt{x}.$$

2. Найдем слагаемое разложения степени бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{20}$, не содержащее x.

Решение:

Пользуясь формулой общего члена разложения степени бинома, получаем $T_{k+1} = C_{20}^k(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k$. Согласно условию, $(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = x^0$. Значит, $\frac{20-k}{2}-2k=0 \Leftrightarrow k=4.$

Ответ: Пятое слагаемое разложения степени бинома.

3. Найдем наибольший биномиальный коэффициент разложения степени бинома $\left(u^{\frac{1}{3}}-\sqrt[5]{y}\right)^{22}$.

Решение:

Так как $n=22$ – четное число, то наибольший биномиальный коэффициент этого разложения равен $C_{22}^{11}=\frac{22!}{11!\cdot 11!}=705\,432.$

Ответ: $705\,432$.

4. Определим пятый член разложения степени бинома $\left(3a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, если биномиальный коэффициент четвертого члена этого разложения равен 20.

Решение:

Поскольку $C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$, получаем:

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=20 \Leftrightarrow (n-2)(n-1)n=120 \Leftrightarrow n^3-3n^2+2n-120=0 \Leftrightarrow n=6.$$

Итак, $T_5=(-1)^4\cdot C_6^4\cdot(3a)^{6-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 9a^2\cdot a^{-2}=135.$

Ответ: $T_5=135$.

Упражнения и задачи

Б

1. Запишите разложение степени бинома:

а) $(x+y)^7$; б) $(3a+b)^8$; в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$; г) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^5$; д) $(2a+3x)^4$.

2. Запишите разложение степени бинома:

а) $(4-x)^4$; б) $(\sqrt[3]{a}-b)^5$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^7$; г) $(2x-3)^6$; д) $(a-\frac{1}{2}b)^4$.

3. Запишите разложение степени бинома:

а) $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{a^2}}+\sqrt[5]{\frac{3}{b^2}}\right)^5$; б) $(x-\sqrt{x^2-1})^8-(x+\sqrt{x^2-1})^8$; в) $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^6-(\sqrt{2x}-\sqrt{y})^6$.

4. Докажите, что значение выражения $(5-\sqrt{7})^n+(5+\sqrt{7})^n$ является натуральным числом при $n\in\mathbb{N}$.

5. Найдите:

а) пятый член разложения степени бинома $(3x+4)^{10}$;

б) седьмой член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^9$;

в) десятый член разложения степени бинома $(\ln 2-5\lg 3)^{11}$.

6. Найдите сумму биномиальных коэффициентов разложения степени бинома:

а) $(4a+3b^2)^{25}$; б) $(\log_5 x-3y)^{108}$; в) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{215}$; г) $(8x-2y)^{71}$.

7. Найдите сумму биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении степени бинома:

а) $(3x+4y)^{15}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{25}$; в) $(a-15b)^{28}$; г) $(2\sqrt{x}+b)^{32}$.

8. Найдите:

а) член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+2x)^{16}$, содержащий x^{10};

б) член разложения степени бинома $(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{a})^{13}$, содержащий a^4;

в) член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2})^{30}$, не содержащий x.

9. Найдите средний член разложения степени бинома:

а) $(x^2+2y^4)^{16}$; б) $(\sqrt{a}+b^4)^{24}$; в) $(x^3-y^2)^{14}$; г) $(\sqrt{x}-\lg x)^{18}$.

10. Найдите два средних члена разложения степени бинома:

а) $(x-y^3)^{25}$; б) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{13}$; в) $(2x^3-3y^2)^{11}$; г) $(3+x)^{17}$.

11. Найдите сумму коэффициентов разложения степени бинома:

а) $(8x^2-5y^2)^9$; б) $(7x+8y^3)^6$.

12. Найдите рациональные члены разложения степени бинома:

а) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[7]{2})^{20}$; б) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$.

13. Сумма биномиальных коэффициентов разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right)^n$ равна 256. Найдите слагаемое этого разложения, содержащее $x^{-\frac{1}{4}}$.

14. Найдите значение n в разложении степени бинома $(x+y)^n$, если коэффициент при y^3 равен коэффициенту при y^5.

15. Найдите слагаемое разложения степени бинома $(\sqrt{x}+x)^n$, содержащее x^9, если известно, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах этого разложения, равна 2 048.

16. Найдите A_n^3, если пятый член разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{a}\right)^n$ не содержит a.

17. Методом математической индукции и при помощи формулы бинома Ньютона, докажите *малую теорему Ферма*: „Если p – простое натуральное число и $n\in\mathbb{N}$, то n^p-n кратно p“.

Замечание. Теорема Ферма часто формулируется следующим образом: „Если p – простое натуральное число и n – натуральное число, не кратное p, то $n^{p-1}-1$ кратно p“.

18. Рассмотрите треугольник Паскаля. Какие свойства чисел (последовательностей чисел) можно выявить из этого арифметического треугольника?

19. Используя бином Ньютона, составьте задачу на:
а) размещения; б) перестановки; в) сочетания.

20*. Докажите, сравнивая коэффициенты при x в обеих частях равенства $(1+x)^k(1+x)^m=(1+x)^{k+m}$, что $C_k^lC_m^0+C_k^{l-1}C_m^1+\ldots+C_k^0C_m^l=C_{k+m}^l$, где $k,\ m,\ l\in\mathbb{N}$ и $l\le\min(k,\ m)$.

Упражнения и задачи на повторение

A

1. На выпускном вечере 24 ученика XII класса обменялись фотографиями. Сколько фотографий необходимо было?

2. В турнире по шахматам участвовали 14 спортсменов и каждые два шахматиста сыграли между собой по одной партии. Сколько партий было сыграно на турнире?

3. Сколькими способами 6 учащихся могут расположиться на 20 местах?

4. Пассажирский поезд состоит из 12 вагонов. Сколькими способами можно составить этот поезд?

5. 4 экзамена на степень бакалавра следует провести за 8 дней.
а) Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?
б) Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если последний экзамен обязательно следует провести в последний, восьмой, день?

6. Сколькими способами 8 электрических лампочек можно распределить по 6 разноцветным патронам?

7. Сколькими способами можно построить 10 спортсменов на соревновании, если первым должен стоять самый высокий спортсмен, а последним – самый малорослый?

8. X класс представлен на конкурсе по математике 12 учениками и 3 учителями. Сколькими способами можно составить команду, состоящую из 5 учащихся и:
а) одного учителя; б) двух учителей; в) трех учителей; г) хотя бы одного учителя?

9. Некто наугад набрал номер телефона, потому что не запомнил последние две его цифры. Какова вероятность, что номер будет набран правильно?

10. В пакете 6 шоколадных плиток одинакового размера: 3 черного шоколада и 3 белого. Наугад выбирают две плитки. Какова вероятность, что эти шоколадные плитки одинакового вида?

11. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^m \cdot (n-m)!} = 90$; б) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; в) $8C_{n+1}^5 = 3A_n^3$; г) $6(C_{n+1}^1 + C_{n+3}^3) = 13C_{n+2}^2$.

12. Пусть $(2a+b^2)^n$. Найдите n, если:

а) сумма биномиальных коэффициентов равна 256;

б) сумма биномиальных коэффициентов, расположенных на нечетных местах, равна 256;

в) биномиальный коэффициент при a^3 равен биномиальному коэффициенту при a^9;

г) биномиальный коэффициент третьего члена разложения равен среднему арифметическому биномиальных коэффициентов второго и четвертого членов разложения.

13. Найдите член разложения $\left(\sqrt[5]{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{21}$, не содержащий a.

14. Дано $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^6$. Найдите x, если $T_5 = \dfrac{5}{9}$.

15. В урне находятся 6 белых и 8 черных шаров одинакового размера. Наугад извлекают одновременно два шара. Найдите вероятность события:

A = {извлечены два белых шара}; B = {извлечены два черных шара};

C = {извлечены два шара одинакового цвета}.

Б

16. Сколько элементов должно содержать множество, чтобы число перестановок этих элементов было не меньше 3 000 и не больше 5 500?

17. Сергей пригласил на свой день рождения 8 школьных друзей.

а) Сколькими способами он может их разместить вокруг овального стола?

б) Обобщите для n друзей.

18. На фирме „Tempus” работает 10 операторов и 5 инженеров. Составляется делегация из 6 человек, из которых по крайней мере 2 являются инженерами. Сколькими способами можно составить эту делегацию?

19. Сколько натуральных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

20. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $C_n^3 + C_n^4 > n(n-2)$; б) $C_{n+8}^{n+3} \le 5A_{n+6}^3$; в) $C_{10}^{n-1} > 2C_{10}^n$.

21. Найдите рациональные члены разложения степени бинома $(\sqrt{7} - \sqrt[3]{5})^n$, если:

а) $n = 5$; б) $n = 100$.

22. Докажите, что: а) $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$; б) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Докажите, что для $\forall n \in \mathbb{N}^*$ числовое значение выражения $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ является целым числом.

24*. Докажите, что значение выражения $C_{2n+1}^1 \cdot C_{2n+1}^2 \cdot C_{2n+1}^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n+1}^{2n}$ является точным квадратом.

25*. Решите на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ систему $C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}$.

26*. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)! > 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. а) Замените рамку таким натуральным числом, чтобы полученное выражение имело смысл: $A_{\square}^{10}$. 1

   б) Найдите число размещений, полученных в пункте а) после замены рамки соответствующим натуральным числом. 1

2. а) Найдите истинностное значение высказывания: 1
   Из цифр 2, 4, 6, 8, 0 можно составить 100 телефонных номеров, используя каждый раз все цифры (причем цифры не повторяются).

   б) Найдите кардинал булеана множества $A = \{2, 4, 6, 8, 0\}$. 1

3. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $C_{x+1}^{x-1} = x^2 - 1$. 3

4. Для организации математического вечера учащиеся X класса должны избрать оргкомитет в составе председателя, секретаря и двух членов оргкомитета. Сколькими способами можно избрать оргкомитет, если в классе 30 учащихся? 2

5. Приведите пример применения элементов комбинаторики в повседневной жизни. 1

Б

1. Замените рамку таким натуральным числом, чтобы полученное равенство было верным: 1

$$\frac{A_n^4 \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = 42C_{\square}^5.$$

2. Найдите истинностное значение высказывания: 2

   Число $A_{3n-5}^{n^2-2n}$ определено при $n \in \{2, 3, 5\}$.

3. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $7A_{x+1}^{x-1} + 14P_{x-1} \le 30P_x$. 2

4. Сколько десятизначных натуральных чисел можно составить, используя каждый раз все 10 цифр? 1

5. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Докажите, что значение выражения $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n$ является натуральным числом при любом $n \in \mathbb{N}$. 2

6. В X классе учатся 14 юношей и 18 девушек. Сколькими способами можно составить команды, состоящие из 3 юношей и 5 девушек? 2

Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ — $n! = (n-1)!\,n$ — $0! = 1$

Конечные множества

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Типовые комбинаторные задачи

Формула бинома Ньютона

$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m, \ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$

Упорядоченные множества

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Размещения

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $0 \le m \le n, \ m \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*$

Сочетания

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $0 \le m \le n, \ m \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*$

Свойства биномиальных коэффициентов

1° $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3° $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$;

4° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

5° а) Биномиальный коэффициент C_n^k является наибольшим при $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$;

б) Биномиальные коэффициенты $C_n^k = C_n^{k+1}$ являются наибольшими при $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$.

Перестановки

$P_n = n!, \ n \in \mathbb{N}^*$.

Свойства чисел C_n^m, $0 \le m \le n$

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Общий член разложения степени бинома

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \\
 & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & & \\
 & C_{n-1}^0 & & C_{n-1}^1 & & \ldots & & C_{n-1}^{n-2} & & C_{n-1}^{n-1} & & & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-2} & & C_n^{n-1} & & C_n^n & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}$$

Основные правила комбинаторики:

1. Правило умножения: $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}\,A \cdot \mathrm{card}\,B$.
2. Правило сложения: $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B$, где $A \cap B = \varnothing$.

Приложения в различных областях науки и техники (физика, химия, теория вероятностей и т. д.), в повседневной жизни; решение комбинаторных уравнений/неравенств; решение систем, совокупностей комбинаторных уравнений/неравенств.

Приложения в различных областях науки и техники; решение комбинаторных уравнений/неравенств; решение систем, совокупностей комбинаторных уравнений/неравенств; разложение степени биномов.

МОДУЛЬ 5 Числовые функции. Основные свойства

Если кто-то действительно хочет постичь истину, то он не должен выбирать только одну область знаний, так как все они взаимосвязаны и взаимозависимы.

Рене Декарт

Цели

- распознавание и применение понятий *функция*, *график функции* в различных ситуациях;
- распознавание основных свойств изученных функций и их графиков;
- классификация изученных функций по различным признакам;
- применение свойств функций в реальных и/или смоделированных ситуациях.

§1 Понятие функции. Повторение и дополнения

1.1. Понятие функции. Способы задания функции

В повседневной жизни встречаются переменные величины, которые меняют свои значения в зависимости от значений других переменных. Например, показатели температуры воздуха в течение суток зависят от времени их регистрации; значение переменной $u = 2t + 4$ зависит от значения t. Значение переменной $y = \sqrt{x-1}$ меняется в зависимости от значений переменной x, однако не каждому значению x соответствует значение y (например, для $x = 0$).

Определение. **Функцией** называется упорядоченная тройка (A, B, f), где A, B – непустые множества, а f – правило (закон), ставящее в соответствие каждому элементу $x \in A$ единственный элемент $y \in B$.
В других терминах **функция** – это **отображение** множества A в множестве B.

Если элементу x ставится в соответствие элемент y, то обозначают $y = f(x)$, и говорят, что y является ***образом*** x или ***значением*** функции f в точке x. Множество A называется ***областью определения*** функции f и обозначается $D(f)$, а множество B называется ***областью изменения*** функции f. Функция (A, B, f) обозначается также $f: A \to B$, и в этом случае говорят: „f определена на множестве A со значениями в множестве B“ или „f от A к B“. Множество $B_1 = \{y \in B \mid (\exists x \in A)\ (f(x) = y)\}$ называется ***образом множества*** A, или ***множеством значений*** функции f, и обозначается $f(A)$ или $E(f)$, или $\mathrm{Im} f$.

Замечание. В дальнейшем рассмотрим ***числовые функции***, то есть функции, для которых множества A и B являются подмножествами множества $\mathbb{R}$.

Определение. Функции (A, B, f) и (A_1, B_1, g) называют **равными**, если:
1) $A = A_1$; 2) $B = B_1$; 3) $f(x) = g(x)$ для любого x из A.

Примеры

1. Функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x^2}$, равны, так как $D(f) = D(g)$, $E(f) = E(g)$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x)$.

2. Функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, не равны, поскольку различны их области изменения.

3. Очевидно, что у равных функций равны и множества их значений. Множеством значений функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, является $\mathbb{R}_+$, поскольку для любого $y \in \mathbb{R}_+$ существует $x \in \mathbb{R}$, а именно $x = \pm y$, такой, что $f(x) = y$. Впрочем, и у функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, то же множество значений.

Замечания. **1.** Для функции $f: A \to B$ правило f называется ***функциональной зависимостью***. В соотношении $y = f(x)$, где $x \in A$, $y \in B$, переменная x называется ***независимой переменной***, или ***аргументом функции***, а переменная y – ***зависимой переменной***.

2. Если из контекста ясно, чему равны множества A, B, то вместо $f: A \to B$ записывают: „функция f“.

Если дана функция $f: A \to B$ и $M \subseteq A$, $K \subseteq B$, то ***образом множества*** M при отображении f назовем подмножество $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ множества B, а ***прообразом множества*** K назовем подмножество $T = \{x \in A \mid f(x) \in K\}$ множества A.

Задание с решением

Пусть даны функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, и множества $M = [0, 2]$, $K = [3, 7]$. Найдем: а) образ множества M; б) прообраз множества K.

Решение:

а) Чтобы найти $f(M)$ – образ множества M, учтем, что $0 \le x \le 2$, и последовательно получим: $0 \le x^2 \le 4$, $3 \le x^2 + 3 \le 7$, $3 \le f(x) \le 7$. Значит, $f(M) \subseteq [3, 7]$. Верно и обратное включение, $[3, 7] \subseteq f(M)$, так как уравнение $x^2 + 3 = t$, $t \in [3, 7]$, имеет решения на промежутке $[0, 2]$. Следовательно, $f(M) = [3, 7]$.

б) Из двойного неравенства $3 \le f(x) \le 7$ получим $|x| \le 2$, то есть прообразом множества K является множество $T = [-2, 2]$.

Функцию можно задать:

1) ***синтетическим способом*** – при помощи таблицы, диаграммы, графика, перечислением упорядоченных пар чисел;
2) ***аналитическим способом*** – при помощи выражения (формулы).

1 *Синтетический способ*

а) При помощи ***таблицы*** могут быть заданы функции, области определения которых конечны и содержат небольшое количество элементов (рис. 5.1 а)).

б) ***Диаграммами*** могут быть заданы функции, области определения и изменения которых представлены диаграммами Эйлера–Венна (рис. 5.1 б)).

а)

x	-1	0	$3,14$	5
$f(x)$	7	1	0	$0,3$

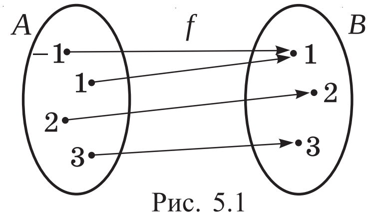
б) 

Рис. 5.1

в) В виде ***графика*** (см. пункт 2.1).

г) Дано G – множество ***упорядоченных пар*** (x, y), $x \in A$, $y \in B$, действительных чисел таких, что для (x_1, y_1), $(x_1, y_2) \in G$ имеем $y_1 = y_2$. Напомним, что в этом случае задана функция $f\colon A \to B$, полагая, что $b = f(a)$, если $(a, b) \in G$.

2 *Аналитический способ*

Чаще всего функция задается аналитически, то есть соответствие между значениями независимой и значениями зависимой переменных задается ***формулой, соотношением, свойством***.

Примеры

1 Пусть функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$. Значение корня однозначно определено, поэтому однозначно будет определено и значение функции f для любого $x \in \mathbb{R}_+$.

2 ***Функция „целая часть“***. Наибольшее целое число, не превосходящее число a, $a \in \mathbb{R}$, называется ***целой частью числа*** a и обозначается $[a]$. Например: $[3{,}1] = [\pi] = 3$, $[-2{,}1] = -3$, $[2] = 2$.

Функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = [x]$, называется ***функцией целая часть числа*** и обозначается [ ].

Нетрудно проверить ***свойства*** функции [ ]:

1° $[x] \le x$;   2° $[x+m] = [x] + m$, $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

3 ***Функция „дробная часть“***. Число $a - [a]$, $a \in \mathbb{R}$, называется ***дробной частью числа*** a и обозначается $\{a\}$. Например: $\{1{,}01\} = 1{,}01 - [1{,}01] = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$; $\{-2{,}1\} = -2{,}1 - [-2{,}1] = -2{,}1 - (-3) = 0{,}9$; $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$.

Функция $h\colon \mathbb{R} \to [0, 1)$, $h(x) = \{x\}$, называется ***функцией дробная часть числа*** и обозначается { }.

4 ***Функция Дирихле***: $f\colon \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

Замечание. Часто допускается задание функции только формулой $y = f(x)$, при определении фактически только функциональной зависимости (которая не зависит от обозначения переменных), а ее область определения $(D(f))$ и множество значений необходимо найти. В этом случае множество $D = D(f)$ считается равным области допустимых значений (ОДЗ) переменной x в выражении $f(x)$, а множество $E(f)$ считается равным множеству $f(D)$.

Задание с решением

Найдем множества $D(f)$, $E(f)$ функции f, заданной формулой $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$.

Решение:

Множество $D(f)$ совпадает с множеством решений неравенства $x - 3 \ge 0$. Значит, $D(f) = [3, +\infty)$.

Множество значений аналитически заданной функции f равно множеству действительных значений параметра t, для которых уравнение $f(x) = t$ имеет хотя бы одно решение на множестве $D(f)$. В данном случае это уравнение имеет вид $\sqrt{x-3}+2=t$ и на промежутке $[3,+\infty)$ равносильно уравнениям $\sqrt{x-3}=t-2$, $x-3=(t-2)^2$ для $t-2\geq 0$. Таким образом, для любого t из $[2,+\infty)$ уравнение $\sqrt{x-3}+2=t$ имеет решение, принадлежащее множеству $D(f)$.

Следовательно, $f(D)=E(f)=[2,+\infty)$.

1.2. Операции над функциями

Часто возникает необходимость рассматривать сумму, произведение и/или частное двух функций.

Определение. **Суммой, произведением, частным функций** $f: A\to\mathbb{R}$ и $g: A\to\mathbb{R}$ называется функция, заданная соответственно следующим образом: $(f+g): A\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$; $(f\cdot g): A\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$; $\frac{f}{g}: A\to\mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$, для всех x из A.

Задание с решением

Найдем сумму и произведение функций

$$f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}+1, \text{ и } g: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ g(x)=\sqrt{x+2}.$$

Решение:

На основании определения, для функций $f+g: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f\cdot g: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ имеем:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+1+\sqrt{x+2};\quad (f\cdot g)(x)=(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+2}.$$

Определение. **Сужением** функции $f: A\to B$ на непустое подмножество M, $M\subseteq A$, называется функция $g: M\to f(M)$, где $g(x)=f(x)$ для всех x из M.

В условиях данного определения функция f называется ***расширением*** функции g на множество A.

Пример

Сужение функции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-4$, на подмножество $M=\left\{-1, 0, \frac{3}{2}, 4\right\}$ задано таблицей:

x	-1	0	$\frac{3}{2}$	4
$f(x)$	0	-4	$-\frac{25}{4}$	0

На практике, если нужно получить несколько характеристических точек графика некоторой функции, используется ее сужение на конечное подмножество.

Замечание. Если функции f и g заданы на различных множествах, и необходимо рассмотреть их сумму или произведение, то используется их сужение на множество $D(f)\cap D(g)$.

С целью более широкого применения функций необходимо рассмотреть и некоторые другие операции над ними.

Определение. Пусть функции $f\colon A \to B$ и $g\colon B_1 \to E$, причем $B \subseteq B_1$. Функция $h\colon A \to E$, заданная равенством $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$, называется **композицией функций g и f** и обозначается $g \circ f$.

Следующую теорему приведем без доказательства.

Теорема 1. Композиция функций $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ и $h\colon C \to D$ ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Задание с решением

Определим, существуют ли композиции $g \circ f$, $f \circ g$, где:
$f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g\colon [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3$.

Решение:

Так как включение $\mathbb{R} \subseteq [1, +\infty)$ ложно, то не существует композиции $f \circ g$.

Поскольку $\mathbb{R}_+ \subseteq [-2, +\infty)$, то существует композиция $h = g \circ f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 - 3 = x - 4$.

Замечание. В общем случае, операция композиции функций некоммутативна, то есть $f \circ g \neq g \circ f$.

Особую роль для композиции функций играют так называемые ***тождественные функции***: $\varepsilon_M\colon M \to M$, $\varepsilon_M(x) = x$, $x \in M$.

Рассмотрим функции $f\colon A \to B$, $\varepsilon_A\colon A \to A$, $\varepsilon_A(x) = x$, $\varepsilon_B\colon B \to B$, $\varepsilon_B(x) = x$. Найдем композиции $\varepsilon_B \circ f\colon A \to B$ и $f \circ \varepsilon_A\colon A \to B$.

Имеем: $(\varepsilon_B \circ f)(x) = \varepsilon_B(f(x)) = f(x)$, $x \in A$, и $(f \circ \varepsilon_A)(x) = f(\varepsilon_A(x)) = f(x)$, $x \in A$. Значит, у функций $f \circ \varepsilon_A$, $\varepsilon_B \circ f$ и f одна и та же область определения A, одна и та же область изменения B, а также эти функции принимают одинаковые значения для всех значений $x \in A$. Следовательно, эти три функции равны: $f \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ f = f$.

Упражнения и задачи

A

1. Найдите область определения функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

2. Найдите множество значений функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^2 - 2$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

3. Выясните, равны ли функции:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$;

в) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{2x-2}{x(x-2)}$.

4. Даны множества $A=\{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ и функция $f\colon A\to B$, $f(x)=|x|+1$. Задайте функцию f диаграммой.

Б

5. Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; б) $f(x)=\dfrac{x-2}{|x|-2}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{\{x\}}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{[x]}$.

6. Найдите множество значений функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=[x]$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; в) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+4}$.

7. Найдите сумму, произведение и композицию $f\circ g$ функций $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=|x|$, $g(x)=x-1$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$, $g(x)=x^3+1$; в) $f(x)=x^3-1$, $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

8. Найдите композиции $f\circ f$, $f\circ f\circ f$, ..., $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\ \text{раз}}$ функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=x-1$.

9. Представьте в виде композиции двух функций (отличных от тождественных) функцию $\Phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: а) $\Phi(x)=(x^{10}+1)^{17}$; б) $\Phi(x)=\sqrt[5]{x^2-1}$.

10*. Даны функции $f\colon A\to B$, $g\colon A\to C$, $f\neq g$, $M\subseteq A$. Могут ли сужения этих функций на подмножество M быть равными функциями? Приведите примеры.

§ 2 Основные свойства числовых функций

2.1. График функции

Определение. **Графиком** функции $f\colon A\to B$ называется множество
$$G_f=\{(x, y)\mid x\in A,\ y=f(x)\}.$$

Примеры

1 Пусть функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Поскольку $f(2)=3$, то точка $A(2, 3)$ принадлежит графику функции, а точка $B(3, 1)$ не принадлежит графику этой функции, так как $f(3)=5\neq1$.

2 По графику функции можно сделать выводы относительно ее вариации. Например, на рисунке 5.2 изображена зависимость количества женщин (объем выборки равен 1375) определенного роста от данного роста x. Нетрудно заметить, что: женщин с ростом 140 см немного; при увеличении роста их количество возрастает до тех пор, пока рост достигает 165 см, затем при дальнейшем увеличении роста количество женщин (определенного роста) уменьшается.

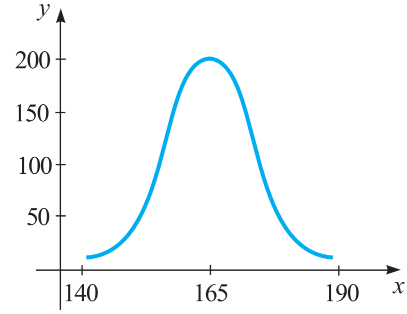


Рис. 5.2

2.2. Нули функции

Важно знать точки, в которых график функции f пересекает ось Ox; в таких точках функция может поменять свой знак. Эти точки называются ***нулями функции*** и можно определить решив уравнение $f(x)=0$.

2.3. Монотонность функции

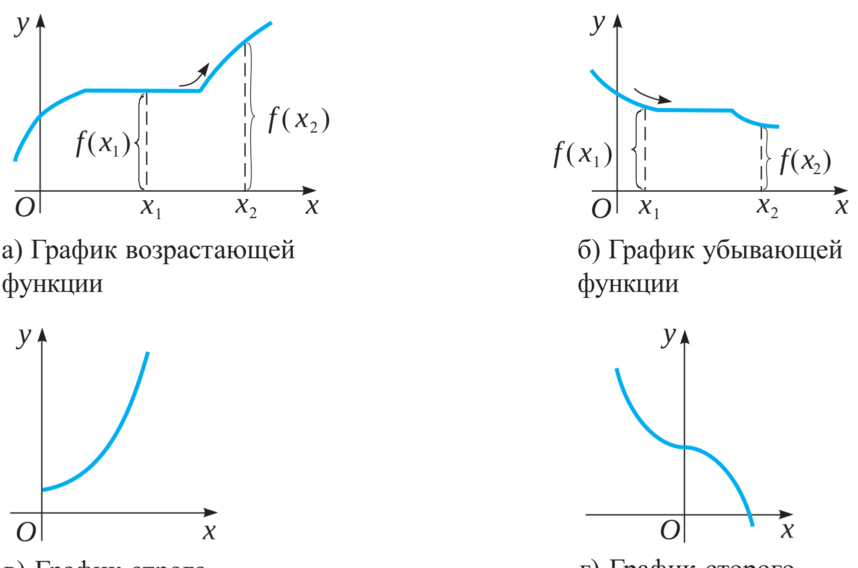
Определения. • Функция $f\colon D \to E$ называется **возрастающей (убывающей)** на множестве M, $M \subseteq D$, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in M$, имеем $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

• Функция $f\colon D \to E$ называется **строго возрастающей (строго убывающей)** на множестве M, $M \subseteq D$, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in M$, имеем $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Возрастающая или убывающая (строго возрастающая или строго убывающая) на некотором множестве функция называется ***монотонной*** (***строго монотонной***) на этом множестве.

Возрастание (убывание) функции на некотором множестве означает, что большему значению аргумента, принадлежащему этому множеству, соответствует большее или равное (меньшее или равное) значение функции (рис. 5.3).

Геометрически строгое возрастание (убывание) функции на некотором промежутке иллюстрируется следующим образом: при движении по графику функции в положительном направлении оси Ox одновременно осуществляется и движение в положительном (отрицательном) направлении оси Oy, т. е. вверх, см. рисунок 5.3 в) (вниз, см. рисунок 5.3 г)).



а) График возрастающей функции

б) График убывающей функции

в) График строго возрастающей функции

г) График сторого убывающей функции

Рис. 5.3

Задача. Докажем, что функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, строго убывает на промежутке $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Решение:

Запишем функцию в виде $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Из того, что $x_1 < x_2 < -\dfrac{b}{2a}$ (значит, $x_i + \dfrac{b}{2a} < 0$), последовательно получаем:

$x_1 + \dfrac{b}{2a} < x_2 + \dfrac{b}{2a} < 0$, $\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, $a\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2$,

$a\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > a\left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, или $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, функция f строго убывает на промежутке $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Аналогично рассматриваются случаи $a > 0$, $x \in \left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$; $a < 0$, $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$, $x \in \left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$, и получаем следующую теорему:

Теорема 2. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ $(a < 0)$, строго возрастает (убывает) на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ и строго убывает (возрастает) на промежутке $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$.

2.4. Четность или нечетность функции

Определение. Функция $f: D \to \mathbb{R}$ называется **четной** (**нечетной**), если:
1) для $x \in D$ имеем $-x \in D$ и
2) $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$ для любого $x \in D$.

Примеры

1. Функция $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}^*$, нечетная, поскольку:
1) для $x \in \mathbb{R}^*$ имеем $-x \in \mathbb{R}^*$ и 2) $f(-x) = \dfrac{a}{-x} = -\dfrac{a}{x} = -f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^*$.

2. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 + 3$, четная, так как
$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

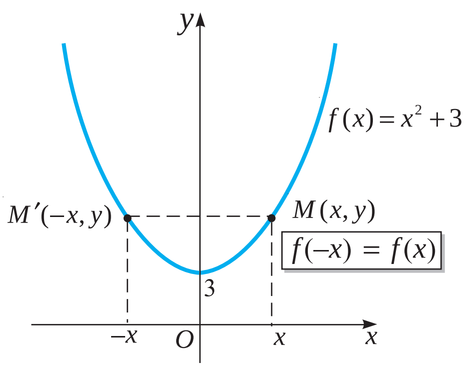
3. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) = ax^2 - bx + c$ и найдется такое значение x_0, что $f(-x_0) \neq \pm f(x_0)$ (например, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$).

Важно знать геометрическую интерпретацию четной и нечетной функций.

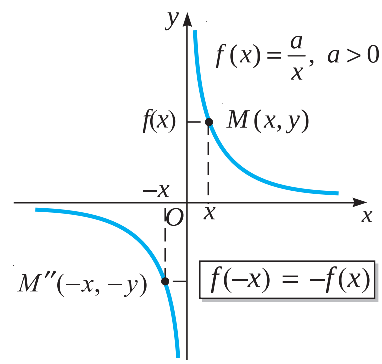
Теорема 3. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Доказательство:

Точки $M(x, y)$, $M'(-x, y)$ (симметричные относительно оси Oy) одновременно принадлежат или не принадлежат графику четной функции f, так как $y = f(x) = f(-x)$ (рис. 5.4 а)), а точки $M(x, y)$, $M''(-x, -y)$ (симметричные относительно начала координат) одновременно принадлежат или не принадлежат графику нечетной функции f, так как $y = f(-x) = -f(x)$ (рис. 5.4 б)). ▶



а) График четной функции



б) График нечетной функции

Рис. 5.4

Задание с решением

Исследуем на четность функцию $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Решение:

$D(f) = \mathbb{R}$. Так как $f(-1) \neq f(1)$, $f(-1) \neq -f(1)$, то условие 2) определения не выполнено. Значит, функция f не является ни четной, ни нечетной.

Замечание. Любая функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, для которой область определения $(D(f) = D)$ симметрична относительно начала координат, может быть представлена в виде $f = h_1 + h_2$, где h_1 – четная функция, а h_2 – нечетная.

Действительно, этими функциями являются:

$$h_1, h_2\colon D(f) \to \mathbb{R},\ h_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),\ h_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Задание. Докажите, что h_1 – четная функция, а h_2 – нечетная (см. замечание).

2.5. Периодичность функции

Функция, график которой изображен на рисунке 5.5 характеризуется повторением значений при условии, что значение аргумента изменяется на 1:

$$f(x)=f(x+1)=f(x+2)=...=f(x+n),\ n\in\mathbb{Z}.$$

О поведении этой функции на множестве $\mathbb{R}$ можно судить по ее поведению на промежутке длины 1, например, на промежутке $[0, 1)$.

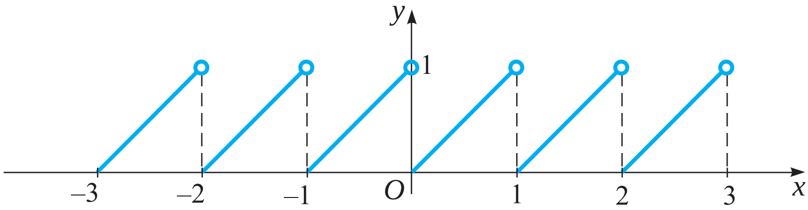


Рис. 5.5

Определение. Функция $f: D\to\mathbb{R}$ называется **периодической**, если существует такое действительное число T, $T\neq 0$, называемое **периодом** функции, что: 1) для $x\in D$ имеем $(x\pm T)\in D$; 2) $f(x\pm T)=f(x)$ для любого $x\in D$.

Задание. Докажите, что если T – период функции f, то числа kT, $k\in\mathbb{Z}^*$, также являются периодами этой функции.

Пример

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}\to[0, 1)$, $f(x)=\{x\}$, где $\{x\}$ – дробная часть действительного числа x. Любое целое ненулевое число T является периодом этой функции, так как $\{x+T\}=\{x\}$, $x\in\mathbb{R}$.

Действительно, на основании свойств функции [ ] получаем:

$$f(x+T)=\{x+T\}=x+T-[x+T]=x+T-([x]+T)=x-[x]=\{x\}=f(x).$$

График этой функции изображен на рисунке 5.5.

Задание. Докажите, что периодом функции Дирихле является любое число $T\in\mathbb{Q}^*$.

Важной задачей для периодических функций является нахождение ее наименьшего положительного периода T_0, называемого ***основным периодом функции***, поскольку при известных значениях такой функции на промежутке вида $[a, a+T_0)$ длины T_0 можно найти ее значения в любой точке множества $D(f)$.

В самом деле, для любого $x\in D(f)$ существует $k\in\mathbb{Z}$, при котором $x+k\cdot T_0\in[a, a+T_0)$ и $f(x)=f(x+k\cdot T_0)$.

Примеры

1. Основным периодом функции $f: \mathbb{R}\to[0, 1)$, $f(x)=\{x\}$, является $T_0=1$.

Действительно, любое число T, $0<T<1$, не является периодом этой функции, так как существует x, $0<x<1$, при котором $0<x+T<1$, $x<x+T$. Следовательно, $f(x)<f(x+T)$.

2. Функция $f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$, не имеет основного периода.

Замечание. Если функция f монотонна на бесконечном (неограниченном) промежутке, то она не является периодической.

2.6. Экстремумы функции

Задача. Фермер получил право на ограждение участка земли прямоугольной формы, граничащего с одной стороны с прямолинейным ирригационным каналом. Он должен оградить участок с трех сторон, причем длина всей изгороди должна быть равна p. Естественно, что фермер хочет оградить участок наибольшей площади. Как найти решение этой задачи?

Решение:

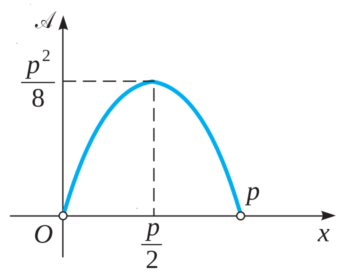


Рис. 5.6

Для решения задачи выразим площадь $\mathscr{A}$ участка через x – длину стороны, параллельной каналу, то есть $\mathscr{A} = x \cdot \frac{p-x}{2}$, где $\frac{p-x}{2}$ – длина стороны, перпендикулярной каналу. Получили функцию II степени $\mathscr{A}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{p}{2}x,\ x \in (0,\ p)$, графиком которой является парабола (рис. 5.6). Наибольшее значение функции $\mathscr{A}(x)$ достигается в точке с абсциссой $x_0 = \frac{p}{2}$. В этом случае говорят, что в точке $x_0 = \frac{p}{2},\ x_0 \in (0,\ p)$, функция $\mathscr{A}(x)$ достигает локального максимума. Тогда длина стороны, параллельной каналу, равна $\frac{p}{2}$, длина стороны, перпендикулярной каналу, равна $\frac{p}{4}$, а наибольшая площадь участка земли равна $\frac{p^2}{8}$.

И другим способом получаем, что максимальное значение площади участка достигается при $x_0 = \frac{p}{2}$, так как для любого $x,\ 0 < x < p$, имеем

$$\mathscr{A}(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{8} \le \frac{p^2}{8}.$$

Определение. **Окрестностью точки** a называется любой промежуток вида

$$V_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),\quad \varepsilon > 0.$$

Будем считать промежуток $(-\infty,\ +\infty)$ окрестностью любой точки $a \in \mathbb{R}$.

Определение. Точка $a \in A$ называется точкой **локального максимума** (**локального минимума**) функции $f\colon A \to B$, если существует такая сколь угодно малая окрестность $V_\varepsilon(a)$, что $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$) для всех $x \in V_\varepsilon(a) \cap A$.

Точки локального максимума (минимума) функции f называются ее ***точками локальных экстремумов***.

Если a – точка локального максимума (минимума) функции f, то соответствующее значение $f(a)$ называется ***локальным максимумом*** (***минимумом***) этой функции. Локальные максимумы и минимумы функции называются ее ***локальными экстре-***

мумами. На рисунке 5.7 точками локального максимума функции f являются a_1 и a_3, а ее точкой локального минимума является a_2.

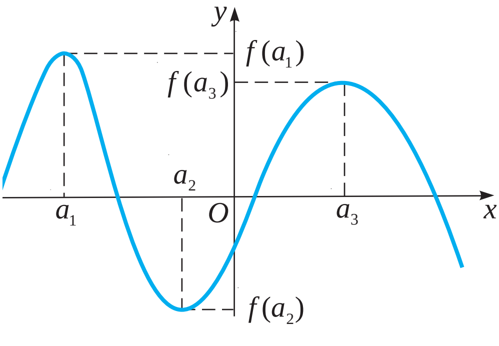


Рис. 5.7

Задания с решением

1. Покажем, что $x_0 = -\frac{b}{2a}$ является точкой локального максимума функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

Решение:

В точке $-\frac{b}{2a}$ получаем $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$, а для любого $x \in \left(-\frac{b}{2a} - \varepsilon, -\frac{b}{2a} + \varepsilon\right)$ выполнено неравенство $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, значит, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \leq -\frac{D}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Следовательно, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – точка локального максимума функции f.

2. Покажем, что -1 и 5 являются точками локального минимума, а 2 – точкой локального максимума функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$.

Решение:

Раскрыв модуль, запишем заданную функцию в виде:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9, \text{ если } x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty), \\ -x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9, \text{ если } x \in (-1, 5). \end{cases}$$

Так как $f(-1) = f(5) = 0$ и $f(x) \geq 0 = f(-1) = f(5)$ для $x \in \mathbb{R}$ (следовательно, и для значений x, принадлежащих любым окрестностям точек -1 и 5), то эти точки являются точками локального минимума функции f и $y_{\min} = f(-1) = 0$.

Рассмотрим $V_1 = (1{,}5;\ 2{,}5)$ – окрестность точки 2. Для любого $x \in V_1$ имеем $f(x) = -(x-2)^2 + 9 \leq 9 = f(2)$, значит, 2 – точка локального максимума функции f и $y_{\max} = f(2) = 9$.

Замечание. Строго монотонная на некотором промежутке функция не имеет экстремумов на этом промежутке.

2.7. Биективные функции. Обратная функция. Обратимые функции

Рассмотрим функции:

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$; $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = |x|$; $f_3: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f_3(x) = |x| = x$.

На первый взгляд функции f_1, f_2, f_3 мало отличаются, но они имеют существенные различительные свойства.

Для функции f_1:

а) существуют $x_1 \neq x_2$, такие, что $f_1(x_1) = f_1(x_2)$;

б) существуют элементы из области изменения функции, не имеющие прообразов в $D(f_1)$.

Для функции f_2: любой элемент из области изменения функции имеет прообраз в $D(f_2)$.

Для функции f_3: любой элемент из области изменения функции имеет прообраз в $D(f_3)$, и притом только один.

> **Определение.** Функция $f\colon A \to B$ называется ***инъективной***, если из того, что $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

Другими словами, элементы из B могут иметь не более одного прообраза в A.

> **Определение.** Функция $f\colon A \to B$ называется ***сюръективной***, если для любого y из B существует x из A, такой, что $f(x) = y$.

Другими словами каждый элемент из B имеет по крайней мере один прообраз в A.

> **Определение.** Функция $f\colon A \to B$ называется ***биективной***, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Примеры

1. Функция f_1 не является ни инъективной, ни сюръективной.

2. Функция f_2 сюръективна: любой $y \in \mathbb{R}_+$ имеет два прообраза: y и $-y$; $f_2(y) = f_2(-y) = |-y| = y$.

Но она не является инъективной, так как $y \neq -y$ $(y \neq 0)$, а $f_2(y) = f_2(-y)$.

3. Функция f_3 сюръективна и инъективна: не существуют $x_1 \neq x_2$, такие, что $f_3(x_1) = f_3(x_2)$. В самом деле, из того, что $f_3(x_1) = f_3(x_2)$, то есть $|x_1| = |x_2|$, следует, что $x_1 = x_2$. Итак, функция f_3 биективна.

Биективные функции $f\colon A \to B$ обладают важным свойством: каждому элементу $x \in A$ однозначно соответствует элемент $f(x) \in B$, и наоборот, – каждому элементу $y \in B$ соответствует единственный элемент $x \in A$, такой, что $f(x) = y$. Значит, можно задать функцию $g\colon B \to A$, такую, что $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, $y \in B$, $x \in A$ (1).

Таким образом, если функция f „прокладывает пути" от множества A к множеству B, то функция g „прокладывает пути" от B к A, обратные проложенным функцией f. Если A и B – конечные множества, то соотношение (1) может быть изображено диаграммами (рис. 5.8).

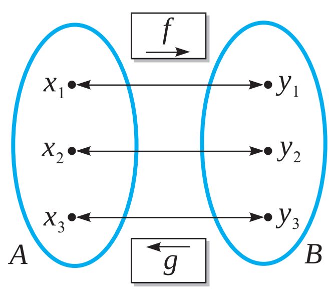


Рис. 5.8

> **Определение.** Функция $g\colon B \to A$ называется **обратной функцией** к функции $f\colon A \to B$, если $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, $y \in B$, $x \in A$.

Обратная функция к функции f обозначается f^{-1}. Очевидно, что f является обратной функцией к f^{-1}. Функции f и f^{-1} называются ***взаимно обратными функциями***. (Не путать f^{-1} с $\frac{1}{f}$!)

> **Определение.** Функция, обладающая обратной, называется **обратимой функцией**.

Рассмотрев композицию функций $f\colon A\to B$, $g\colon B\to A$ и учитывая равносильность (1), получим: $\begin{cases}(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(x)=y, & y\in B;\\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=x, & x\in A.\end{cases}$ (2)

Пользуясь тождественными функциями $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ множеств A и B соответственно, соотношения (2) принимают вид: $f\circ g=\varepsilon_B$, $g\circ f=\varepsilon_A$.

В следствие этого, функция g (обозначенная f^{-1}) является обратной к функции f и соответственно функция f (обозначенная g^{-1}) является обратной к функции g.

Если функция $f\colon A\to B$ задана формулой, то ее обратимость, а также обратная к ней функция могут быть определены, учитывая равносильность (1), следующим образом:

1) из соотношения $y=f(x)$, $x\in A$, $y\in B$, переменная x выражается через y, и получаем $x=g(y)$;
2) если это соотношение обеспечивает однозначное выражение переменной x через y, то функция f обратима;
3) поменяв x на y и y на x в формуле $x=g(y)$ (для сохранения принятых обозначений), получим формулу $y=g(x)$, задающую обратную функцию $g\colon B\to A$ к функции f.

Задание с решением

Найдем обратную к функции $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Решение:

Для нахождения обратной функции $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to[1,+\infty)$ из равенства $y=\sqrt{x-1}$ выражаем переменную x через y и получаем $x=y^2+1$. Переменная x выражена однозначно через y. Поменяв x на y и y на x, получаем $y=x^2+1$, то есть $f^{-1}(x)=x^2+1$. Значит, $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to[1,+\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2+1$, – это обратная к функции f.

Основные свойства взаимно обратных функций $f\colon A\to B$ и $f^{-1}\colon B\to A$

1° Обратная функция (если она существует) единственна.

2° $D(f)=E(f^{-1})=A$, $D(f^{-1})=E(f)=B$.

3° Графики функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой, заданной уравнением $y=x$.

4° Обе функции f и f^{-1} либо строго возрастающие, либо строго убывающие.

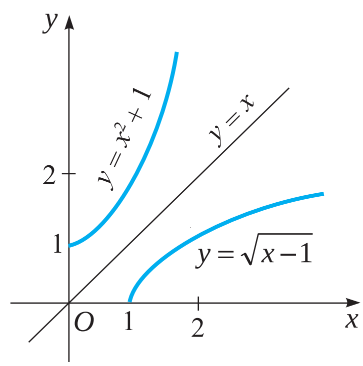


Рис. 5.9

Пример

На рисунке 5.9 изображены графики взаимно обратных функций

$f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x-1}$, и

$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to[1,+\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2+1$.

Эти графики симметричны относительно прямой, заданной уравнением $y=x$.

2.8. Ограниченные функции

Определения. • Функция $f: A \to B$ называется **ограниченной снизу** (**ограниченной сверху**), если существует такое действительное число m (M), называемое **минорантом** (**мажорантом**), что для любого $x \in A$ выполнимо неравенство $m \le f(x)$ $(f(x) \le M)$.

• Функция, ограниченная снизу и сверху, называется **ограниченной функцией**.

Задание с решением

Докажем, что:

а) функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, ограничена снизу, но не ограничена сверху;

б) функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, ограничена.

Решение:

а) $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Тогда $f(x) \ge -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, так как $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Значит, функция f ограничена снизу числом $m = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Для доказательства утверждения, что функция f не ограничена сверху, рассмотрим уравнение $f(x) = t$ с параметром $t \ge m$: $f(x) = t \Leftrightarrow a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = t - m$. Последнее уравнение имеет решения, так как правая часть принимает неотрицательные значения (для сколь угодно больших значений t). Таким образом, функция f может принимать сколько угодно большие значения, то есть она не ограничена сверху.

б) Находим множество значений функции f, то есть определяем множество значений параметра t, для которых уравнение $f(x) = t$ имеет решения на множестве $D(f)$.

Пусть $\dfrac{x^2}{x^2+1} = t$. Тогда $\dfrac{x^2}{x^2+1} = t \Leftrightarrow (t-1)x^2 + t = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{t}{1-t}$, $t \ne 1$. Последнее уравнение имеет решения, если $t \in [0, 1)$. Следовательно, $E(f) = [0, 1)$. Это означает, что для любого $x \in D(f)$ имеем $0 \le f(x) < 1$ и что функция f ограничена снизу числом 0 и сверху числом 1, то есть она ограничена.

В модуле 7 мы рассмотрим свойства некоторых элементарных числовых функций, а также их применение.

Упражнения и задачи

A

1. Пользуясь графиком, найдите промежутки монотонности функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$; в) $f(x) = |x|$.

2. Найдите точки локальных экстремумов и локальные экстремумы функции:

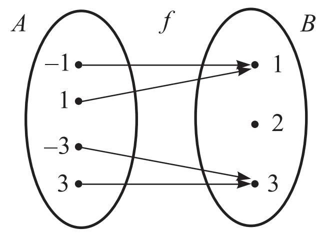
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$; б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$.

3. Найдите нули функций из заданий **1**, **2**.

4. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x+2}$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{2-x}$; в) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{2-x}$.

5. Дана функция:



Выявите правило, ставящее в соответствие каждому элементу множества A единственный элемент из множества B, и задайте функцию f аналитически.

Б

6. Пользуясь графиком, найдите промежутки монотонности функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; б) $f(x)=\{x\}$.

7. Функции $f, g: D\to\mathbb{R}$ являются возрастающими на множестве D. Какие из следующих функций $f+g$, $f-g$, $f+f$, $-f$, f^3, f^2, $g\circ f$, определенных на множестве D со значениями в множестве $\mathbb{R}$, монотонны на множестве D?

8. Функция $f: D\to\mathbb{R}$ положительна и возрастает на множестве D. Докажите, что функция:

а) f^2 возрастает на множестве D; б) $\sqrt{f}$ возрастает на множестве D;

в) $\frac{1}{f}$ убывает на множестве D.

9. Найдите локальные экстремумы функции:

а) $f:\mathbb{R}\to(0, 1)$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=|x^2-x|$.

10. Выясните, какие из следующих функций $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,4}$, $f_1(x)=[x]$, $f_2(x)=\{x\}$, $f_3(x)=\left\{\frac{1}{2}x\right\}$, $f_4(x)=\{5x\}$, периодические.

Найдите основные периоды периодических функций.

11. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f: D\to E$:

а) $f(x)=x^3+2x$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$; в) $f(x)=x^2+x+1$.

12. Докажите, что если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – периодическая функция, а $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – произвольная функция, то композиция $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является периодической функцией. Верно ли это и для функции $f\circ g$? Приведите примеры.

13*. Представьте в виде суммы двух функций, одна из которых – четная, а другая – нечетная, функцию $f: D\to\mathbb{R}$: а) $f(x)=2x^2-x+3$; б) $f(x)=x-2$.

14. Докажите, что функция f обратима, и найдите обратную к ней функцию:

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; б) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt[4]{x}$;

в) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$; г*) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=\frac{x}{x-2}$.

15*. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=|x-1|$.

а) Выясните, биективна ли функция f.

б) Определите, биективна ли функция $f_1: M\to\mathbb{R}_+$, $f_1(x)=|x-1|$, $M=[1,+\infty)$ (сужение функции f на подмножество M).

Упражнения и задачи на повторение

А

1. Найдите $D(f)$, $E(f)$ для функции f, заданной аналитически:

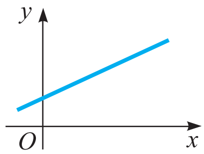
а) $f(x)=0{,}5x-3$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x}+3$; в) $f(x)=x^2-3x$.

2. Для функций f из задания **1**, применив при необходимости графики, найдите промежутки (максимально возможные) их возрастания, убывания.

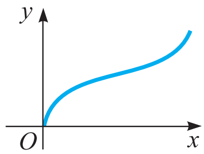
3. Пусть y – объем потребленной предприятием электроэнергии с начала года, x – прошедшее с начала года время.

На каком из рисунков может быть изображена зависимость y от x?

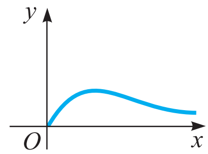
а)



б)



в)



4. Найдите промежутки знакопостоянства функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=3-\dfrac{2-x}{3+x}$; б) $f(x)=2-\dfrac{2+x}{4-x}$; в) $f(x)=6-\dfrac{x-2}{4+x}$.

5. Найдите локальные экстремумы функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=-x^2+2x$; б) $f(x)=3x+x^2$; в) $f(x)=x^2+6x$.

Б

6. Даны функции $f(x)=x+2$, $g(x)=3-x$. Найдите сумму, разность, произведение и композиции $f\circ g$, $g\circ f$ этих функций.

7. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=x^2+x$; в) $f(x)=x^5+2x$.

8. Представьте в виде композиции двух функций (отличных от тождественных) функцию $\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: а) $\Phi(x)=(x^7+2)^{\frac{3}{2}}$; б) $\Phi(x)=\dfrac{1}{x^4+3x^2+1}$.

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

В заданиях 1, 5 укажите верный вариант.

1. Областью определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}$, является множество 1

A $(0,1)\cup(1,2)$. **B** $[0,1]$. **C** $[1,2)\cup(2,+\infty)$. **D** $[1,2]$.

2. Функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|1-x|$, строго монотонна на некоторых из промежутков $(1,+\infty)$, $(0,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $(-1,1)$. Найдите максимально возможный промежуток монотонности. 2

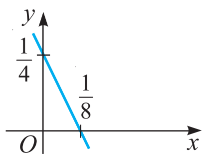
3. а) Какие из точек $0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ являются точками локального экстремума для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x$? 2

б) Найдите соответствующие им локальные экстремумы.

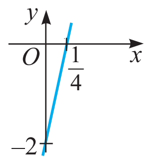
4. Найдите нули функции $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-4}{x-2} + 4 - x$. 2

5. Эскизом графика функции $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + \frac{1}{4}$, является 1

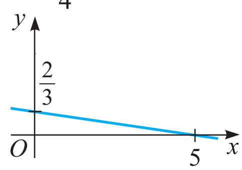
A



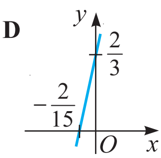
B



C



D



6. Найдите промежутки знакопостоянства функции $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{5-x}{x-4}$. 2

Б

В заданиях 1, 5 и 6 укажите верный вариант.

1. Областью определения функции $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$, является множество 1

A $(0, 1) \cup (1, 2)$. **B** $[0, 1]$. **C** $[1, 2) \cup (2, +\infty)$. **D** $[1, 2]$.

2. Запишите функцию $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x + 4$, в виде композиции двух из следующих функций $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = \overline{1, 4},\ f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = x + 4,\ f_3(x) = x + 5,\ f_4(x) = \sqrt{x}$. 2

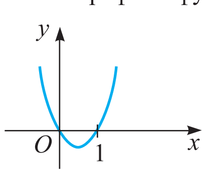
3. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, строго монотонна на некоторых из промежутков $(1, +\infty),\ (0, +\infty),\ (-\infty, +\infty),\ (-1, 1)$. Найдите максимально возможный промежуток монотонности. 1

4. а) Какие из точек $0, -1, 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ являются точками локального экстремума для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$? 2

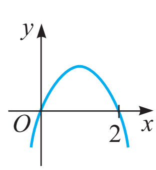
б) Найдите соответствующие им локальные экстремумы.

5. Эскизом графика функции $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x$, является 1

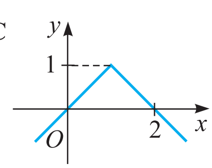
A



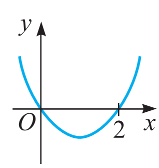
B



C



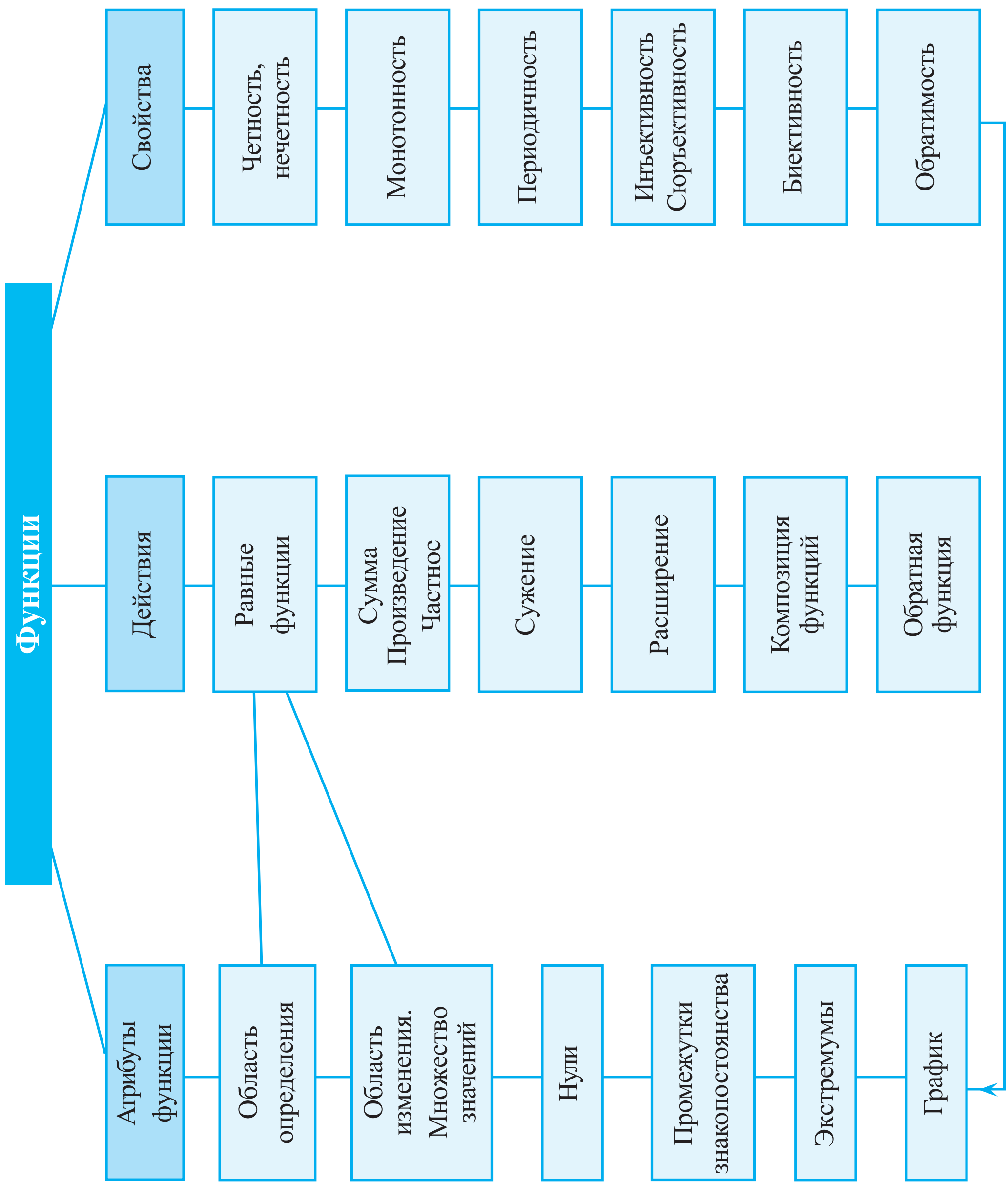
D



6. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$, является 1

A четной. **B** нечетной. **C** ни четной, ни нечетной.

7. Найдите промежутки знакопостоянства функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x$. 2


Функции
Свойства
Четность, нечетность
Монотонность
Периодичность
Инъективность Сюръективность
Биективность
Обратимость
Действия
Равные функции
Сумма Произведение Частное
Сужение
Расширение
Композиция функций
Обратная функция
Атрибуты функции
Область определения
Область изменения. Множество значений
Нули
Промежутки знакопостоянства
Экстремумы
График

МОДУЛЬ 6 Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности

Плох тот ученик, который не превосходит своего учителя.

Леонардо да Винчи

Цели

- распознавание и применение уравнений, неравенств, систем, совокупностей в различных ситуациях;
- применение терминологии, соответствующей уравнениям, неравенствам, системам, совокупностям в разнообразных контекстах;
- использование отношений равносильности при решении уравнений, неравенств, систем, совокупностей;
- применение понятий *уравнение*, *неравенство*, *система*, *совокупность* в реальных и/или смоделированных ситуациях.

§1 Уравнения. Повторение и дополнения

1.1. Понятие уравнения

Напомним основные понятия, необходимые для решения уравнений на множестве $\mathbb{R}$.

Определения. • **Уравнением с одним неизвестным** x называется равенство вида $A(x)=B(x)$, где $A(x)$, $B(x)$ – выражения с переменной x.

• **Решением уравнения с одним неизвестным** называется значение неизвестного, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

• Множество значений неизвестного (неизвестных), при которых определены все выражения уравнения, называется **областью допустимых значений (ОДЗ)** этого уравнения.

Как правило, числовое множество, которому должны принадлежать решения уравнения, уточняется исходными условиями (в большинстве случаев этим множеством является ОДЗ).

Решить уравнение – значит найти все его решения (на указанном множестве).

Обозначим через S множество решений уравнения.

Замечание. Решениями уравнения могут быть только те значения неизвестного (неизвестных), которые принадлежат ОДЗ этого уравнения. Поэтому, как правило, решение уравнения начинается с нахождения его ОДЗ.

Уравнение не имеет решений, если его ОДЗ – пустое множество.

Определение. Два уравнения называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Равносильность уравнений $A_1(x)=B_1(x)$ и $A_2(x)=B_2(x)$ обозначается символом „$\Leftrightarrow$“, то есть: $A_1(x)=B_1(x)\Leftrightarrow A_2(x)=B_2(x)$.

Замечание. Равносильные уравнения, решаемые на множестве M, называются ***равносильными уравнениями на множестве M***.

Как правило, равносильность уравнений рассматривается на ОДЗ исходного уравнения. В частности, уравнения, не имеющие решений, являются равносильными.

Определение. Пусть даны уравнения $A_1(x)=B_1(x)$ и $A_2(x)=B_2(x)$. Второе уравнение $A_2(x)=B_2(x)$ называется **следствием** первого уравнения $A_1(x)=B_1(x)$, если каждое решение первого уравнения является решением и второго уравнения.

Это обозначается: $A_1(x)=B_1(x)\Rightarrow A_2(x)=B_2(x)$.

1.2. Рациональные уравнения

Выражение вида $\dfrac{P}{Q}$, где P, Q – многочлены, $\operatorname{grad} Q\ge 1$, называется ***рациональным выражением***.

Определения.
- Уравнение $E_1(x)=E_2(x)$, где $E_1(X)$, $E_2(X)$ – многочлены, называется **алгебраическим уравнением** с одним неизвестным.
- Уравнение $E_1(x)=E_2(x)$, где $E_1(x)$, $E_2(x)$ – рациональные выражения, хотя бы одно из которых содержит переменную в знаменателе, называется **дробно-рациональным уравнением** (или **уравнением с неизвестным в знаменателе**).

Рациональные уравнения решают в соответствии со следующим ***алгоритмом***:

① находим ОДЗ уравнения;

② переносим все слагаемые в левую часть уравнения;

③ приводим левую часть уравнения к виду $\dfrac{A}{B}$;

④ применяем правило: $\dfrac{A}{B}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0,\\ B\ne 0;\end{cases}$

⑤ решаем полученное уравнение $(A=0)$;

⑥ проверяем, какие из полученных решений принадлежат ОДЗ;

⑦ записываем множество решений.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$. Получаем $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$.

Приводим левую часть к общему знаменателю: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=0$.

Получили уравнение $x^2-2x-3=0$, имеющее решения $x_1=3$, $x_2=-1$.

Значение 3 не принадлежит ОДЗ, значит, не является решением исходного уравнения.

Ответ: $S=\{-1\}$.

Упражнения и задачи

A

1. Известно, что длина реки Прут на 363 км больше длины реки Днестр.
а) Какова длина каждой из этих рек, если сумма их длин равна 2 341 км?
б) Какая часть реки Прут и реки Днестр находится на территории Республики Молдова? (Воспользуйтесь географической картой.)

2. Найдите действительные корни многочлена $P(X)$:
а) $P(X)=3X-2$; б) $P(X)=X^2+1$; в) $P(X)=(X-1)^3(X^2-1)$.

3. Найдите нули функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=x^3-1$; б) $f(x)=2x+1$; в) $f(x)=(x+3)^3$.

4. В момент времени $t=0$ количество бактерий равно 2 400.
Через 5 ч 30 мин их число возросло до 22 200 бактерий.
а) Задайте зависимость количества бактерий от времени (измеренного в часах) в виде функции.
б) Определите, через сколько часов количество бактерий будет равно 56 400.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $8(x+4)=3-2x$; б) $5x+2=2(x-8)$; в) $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$;
г) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$; д) $x^3-2=x^3-2$; е) $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$;
ж) $3x^2-8x=0$; з) $x^2-12x+120=0$; и) $2x^2-8=0$.

6. Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь треугольника.

7. Участок земли прямоугольной формы, площадью $2080\ \text{м}^2$, был огражден забором длиной 184 м. Какова длина и ширина участка?

8. Моторная лодка прошла 46 км по течению реки и 10 км по озеру за 1 ч 30 мин. Найдите скорость лодки, если скорость течения равна 5 км/ч.

Б

9. Составьте уравнение II степени, имеющее решения:

а) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$; б) $x_1 = 3,\ x_2 = 1$; в) $x_1 = -4,\ x_2 = -\frac{1}{2}$.

10. В раствор, содержащий 40 г соли, долили 200 г воды, после чего концентрация раствора уменьшилась на 10%. Какое количество воды в граммах содержал раствор первоначально и какова была концентрация этого раствора?

11. По новому графику движения автобус проехал 335 км на 45 минут быстрее, чем по предыдущему графику. Найдите среднюю скорость движения автобуса по новому графику, если известно, что его скорость на 10 км/ч больше, чем его средняя скорость по предыдущему графику.

12. Составьте алгебраическое уравнение, которое:

а) имеет одно действительное решение;

б) имеет три различные действительные решения;

в) не имеет действительных решений.

13*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^3 - 7x^2 - 7x + 2 = 0$; б) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

14*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x(13-x)(13+x^2) = 42(x+1)^2$.

15*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{5x-1}{m-1} + \frac{5x-2}{m-2} + \ldots + \frac{5x-n}{m-n} = \frac{5xn}{m}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}^*_-$.

§2 Системы и совокупности алгебраических уравнений

2.1. Понятие системы уравнений

Задача. На овощной базе было 1 200 т картофеля и моркови. После того, как продали 150 т картофеля и 40 т моркови, на базе осталось картофеля в три раза больше, чем моркови. Сколько тонн картофеля и сколько моркови было изначально на овощной базе?

Решение:

Пусть изначально на базе было x тонн картофеля и y тонн моркови. Тогда согласно условиям задачи получим систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y = 1\,200, \\ x - 150 = 3(y - 40), \end{cases}$$

имеющую решение (292,5; 907,5). (Проверьте!)

Ответ: 292,5 т картофеля и 907,5 т моркови.

Пусть даны уравнения с двумя неизвестными $E_1(x,\ y) = 0,\ E_2(x,\ y) = 0.$ Ставится задача об отыскании их общих решений, то есть всех таких упорядоченных пар $(a,\ b)$, которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений.

В таких случаях говорят, что задана ***система из двух уравнений с двумя неизвестными***, которую обозначают следующим образом: $\begin{cases} E_1(x,\ y)=0, \\ E_2(x,\ y)=0. \end{cases}$

Аналогично трактуются системы из трех, четырех и т. д. уравнений с тремя, четырьмя и т. д. неизвестными. В дальнейшем будем изучать и решать различные типы систем уравнений.

Определение. **Решением** системы из двух (трех) уравнений с двумя (тремя) неизвестными называется упорядоченная пара $(a,\ b)$ (тройка $(a,\ b,\ c)$) значений неизвестных, которая удовлетворяет каждому из заданных уравнений, другими словами, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения.

Множество решений системы уравнений (обозначается S) есть *пересечение* множеств решений уравнений этой системы.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет конечное число решений, и ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Система уравнений называется ***несовместной***, если она не имеет решений.

Решение системы уравнений начинается, как правило, с определения области допустимых значений (ОДЗ) системы.

Область допустимых значений (***ОДЗ***) системы уравнений есть *пересечение* областей допустимых значений уравнений системы.

Определение. Две системы уравнений называются **равносильными**, если их множества решений совпадают (равны).

Несовместные системы являются равносильными.

Приведем ***основные виды преобразований, сохраняющих равносильность систем***. Пусть M – множество (в частности ОДЗ), на котором система определена.

I Если изменить порядок уравнений в системе, то получим систему, равносильную исходной на множестве M.

II Если заменить одно уравнение системы равносильным уравнением, то получим систему, равносильную исходной на множестве M.

III Если одно уравнение системы преобразовать так, чтобы одно неизвестное явно выражалось через другие неизвестные, а полученное выражение подставить в остальные уравнения системы, то это уравнение вместе с новыми полученными уравнениями составят систему, равносильную исходной на множестве M.

IV Если заменить одно уравнение системы уравнением, полученным в результате алгебраического сложения (почленного сложения или вычитания частей уравнений) этого уравнения с любым другим уравнением системы, то получим систему, равносильную исходной на множестве M.

Напомним ***основные методы решения систем уравнений***:

а) ***метод подстановки*** (см. равносильное преобразование III);

б) ***метод сложения*** (см. равносильное преобразование IV);

в) ***метод введения вспомогательного неизвестного (вспомогательных неизвестных)*** (или ***метод замены неизвестного***);

г) ***графический метод***.

2.2. Совокупности уравнений (систем)

Задача. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x^2(x-1)(x+2)=0$ (1).

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Следовательно, получим $x^2=0$ или $x-1=0$, или $x+2=0$. Итак, ставится задача найти все значения неизвестного, которые являются решением хотя бы одного из этих уравнений. В этом случае говорят, что нужно решить совокупность трех уравнений с одним неизвестным. Эта совокупность уравнений обозначается:

$$\left[\begin{aligned} &x^2=0,\\ &x-1=0,\\ &x+2=0.\end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Пусть даны уравнения $E_1(x)=0$ и $E_2(x)=0$. Если ставится задача об отыскании всех значений неизвестного x, удовлетворяющих хотя бы одному из этих уравнений, то говорят, что задана ***совокупность двух уравнений***, которая обозначается: $\left[\begin{aligned} &E_1(x)=0\\ &E_2(x)=0\end{aligned}\right.$ или записывается знак „ ; “ между уравнениями: $E_1(x)=0;\ E_2(x)=0$.

Аналогично обозначаются и совокупности из трех, четырех и более уравнений, а также совокупности из систем уравнений.

***Множество решений совокупности уравнений* (*систем*)** (обозначается S) есть *объединение* множеств решений уравнений (систем) этой совокупности.

Решим совокупность (2) на ОДЗ исходного уравнения:

$$\left[\begin{aligned} &x^2=0\\ &x-1=0\\ &x+2=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=0\in \text{ОДЗ},\\ &x=1\in \text{ОДЗ},\\ &x=-2\in \text{ОДЗ}.\end{aligned}\right.$$

Тогда $S=\{-2,0,1\}$ – множество решений уравнения (1).

Рассмотрим еще два ***равносильных преобразования*** (преобразования, сохраняющие равносильность):

V Уравнение $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0$ на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{aligned} &E_1(x)=0,\\ &E_2(x)=0,\\ &\ldots\\ &E_n(x)=0.\end{aligned}\right.$

VI Уравнение $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2$ на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{aligned} &E_1(x)=E_2(x),\\ &E_1(x)=-E_2(x).\end{aligned}\right.$

Замечание. Если уравнение в результате соответствующих преобразований сводится к совокупности уравнений, то множество решений исходного уравнения состоит только из тех решений совокупности, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения.

При решении систем уравнений иногда применяют ***метод разложения на множители***, который приводит решение исходной системы к решению совокупности систем. Например, если некоторое уравнение системы равносильно (на ОДЗ) совокупности из двух (трех и более) уравнений, то исходная система равносильна (на ОДЗ) совокупности из двух (трех и более) систем, которые получают путем замены соответствующего уравнения системы уравнениями из полученной совокупности.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases}3x-y=2,\\(2x+y)^2=9.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}3x-y=2\\(2x+y)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=2\\\left[\begin{array}{l}2x+y=3\\2x+y=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-y=2\\2x+y=3\end{cases}\\\begin{cases}3x-y=2\\2x+y=-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}\\\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5},\\y=-\dfrac{13}{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\left\{(1,1),\left(-\frac{1}{5},-\frac{13}{5}\right)\right\}$.

2.3. Однородные системы уравнений

Определения. • Многочлен $P(X, Y, ..., U, V)$ степени n с переменными $X, Y, ..., U, V$ называется **однородным многочленом**, если для любой системы числовых значений $(x, y, ..., u, v)$ переменных и любого фиксированного числового значения $\lambda\in\mathbb{R}^*$ имеет место равенство $P(\lambda x, \lambda y, ..., \lambda u, \lambda v)=\lambda^n P(x, y, ..., u, v)$.

• Алгебраическое уравнение $P(x, y, ..., u, v)=0$ называется **однородным уравнением** n-й степени, если многочлен $P(X, Y, ..., U, V)$ является однородным многочленом n-й степени.

• Система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases}a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=c,\\b_0x^n+b_1x^{n-1}y+b_2x^{n-2}y^2+\ldots+b_{n-1}xy^{n-1}+b_ny^n=d,\end{cases}$$

где $a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_n\in\mathbb{R}$, $a_0\neq0$, $b_0\neq0$, называется **однородной системой** n-й степени (левые части обоих уравнений системы являются однородными многочленами n-й степени).

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases}x^2+4xy-y^2=-2,\\x^2-3xy=4.\end{cases}$

Решение:

Эта система является однородной системой второй степени.

ОДЗ: $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Умножим обе части первого уравнения на 2, затем сложим уравнения системы. Получили систему $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy = 4, \end{cases}$ равносильную исходной, содержащую одно однородное уравнение. Разделим обе части первого уравнения полученной системы на x^2 ($x \neq 0$, так как $x = 0$ не является решением) и получим уравнение II степени $3 + 5\left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$, имеющее решения $\frac{y}{x} = 3$ и $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$.

Итак, решение исходной системы свелось к решению следующей совокупности систем уравнений: $\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x, \\ x^2 - 3xy = 4. \end{cases}$

Первая система не имеет решений. (Проверьте!) Вторая система имеет следующие решения: $(-2\sqrt{0,4},\ \sqrt{0,4})$; $(2\sqrt{0,4},\ -\sqrt{0,4})$. (Проверьте!)

Ответ: $S = \{(-2\sqrt{0,4},\ \sqrt{0,4});\ (2\sqrt{0,4},\ -\sqrt{0,4})\}$.

2.4. Симметрические системы уравнений

Определение. Уравнение с двумя неизвестными называется **симметрическим**, если при замене x на y, а y на x уравнение не меняется.

Например, уравнения $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 5$ и $x + y - 3 = 0$ – симметрические.

Определение. Система, все уравнения которой являются симметрическими, называется **симметрической системой**.

Замечание. Так как уравнения с двумя неизвестными симметрической системы не меняются при замене y на x и x на y, следовательно, если (a, b) является решением симметрической системы, то (b, a) также является решением этой системы.

Симметрическая система с двумя неизвестными решается, как правило, методом введения вспомогательных неизвестных.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = -2, \\ x + y + 2xy = 1. \end{cases}$

Решение:

Исходная система – симметрическая. Пусть $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$ Получим систему $\begin{cases} u^2 - 3v = -2, \\ u + 2v = 1. \end{cases}$

Подставляя $u = 1 - 2v$ в первое уравнение, получаем уравнение $(1 - 2v)^2 - 3v + 2 = 0$, имеющее решения $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{3}{4}$. Тогда $u_1 = -1$, $u_2 = -\frac{1}{2}$.

Решение системы свелось к решению совокупности из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\frac{1}{2}, \\ xy = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Обе системы несовместны на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (Проверьте!) Значит, исходная система не имеет решений.

Ответ: $S = \varnothing$.

Замечание. Решение однородных систем алгебраических уравнений и симметрических систем уравнений, как правило, сводится к решению совокупности систем.

Упражнения и задачи

A

1. Выясните, равносильны ли системы:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0, \\ (x-y)(x+y) = 16 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy = 0, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^3 - x^2 y = 0, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

2. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y - 8 = 0, \\ 4x + y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8. \end{cases}$

3. Решите методом разложения на множители систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ (x-y)^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - xy = -2, \\ (x+y)^2 = 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |3x-1| - y = 0, \\ x + xy = 1. \end{cases}$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x\left(x + \dfrac{1}{x}\right)(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 4) = 0.$

5. Решите задачу, составив систему уравнений.
Из одного порта одновременно отправились два теплохода, один на юг, а другой – на запад, двигаясь прямолинейно и равномерно. Через два часа расстояние между ними составило 60 км. Найдите скорость каждого теплохода, если скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

6. За 4 учебника и 15 тетрадей уплатили 530 леев, а за 3 учебника и 10 тетрадей – 360 леев. Сколько стоит один учебник и сколько – одна тетрадь?

7. Если в кафе за каждый стол сядут по 3 человека, то останутся свободными 5 столов, а если сядут по 2 человека, то 5 человек останутся без места. Сколько столов и сколько посетителей в кафе?

8. Две бригады учащихся, работая вместе, могут собрать урожай с экспериментального участка за 4 дня. За сколько дней выполнит эту работу каждая из бригад отдельно, если одна из них соберет весь урожай на 6 дней быстрее, чем вторая бригада?

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

$$\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{x}{2-x} - \frac{1}{x} - 2\right) = 0.$$

Б

10. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ однородную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 0, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$

11. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ симметрическую систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 23, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$

Решите систему в) несколькими методами.

12. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ (x + y)xy = 120; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3, \\ 5y + 7x = 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} |x| - 3|y - 4| = 8, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2|x - 3| - y = 1, \\ x^2 - |y - 1| = 0. \end{cases}$

13. Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Два завода должны по плану совместно изготовить за месяц 360 деталей. Первый завод перевыполнил план на 12%, а второй – на 10%. Всего оба завода изготовили 400 деталей. Сколько деталей изготовил каждый завод сверх плана?

б) Для изготовления электрического мотора типа A необходимы 2 кг меди и 1 кг олова, а для изготовления электрического мотора типа B – 3 кг меди и 2 кг олова. Сколько моторов каждого типа изготовили, если всего было использовано 130 кг меди и 80 кг олова?

14. Составьте систему (совокупность) уравнений, которая:

а) имеет одно решение; б) имеет бесконечное множество решений;
в) имеет решением пару (2, 3); г) не имеет решений.

15. При сжигании в избытке кислорода 1,10 г смеси метана и этанола образовалось 0,896 л оксида углерода (IV), измеренного при нормальных условиях. Определите количественный состав смеси в массовых долях.

а) Решите задачу с помощью системы уравнений.

б) Решите задачу с помощью уравнения.

16*. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений, где a, b, c – действительные параметры:

а) $\begin{cases} (a - 1)x + y = a, \\ 2x - (a + 1)y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3a^3, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15a^3, \ a \neq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2xy = a, \\ 2yz = b, \\ 4zx = c, \ \ a, b, c > 0. \end{cases}$

§3 Неравенства с одним неизвестным. Повторение и дополнения

3.1. Понятие неравенства

Задача. Высота над землей подброшенного вверх мяча вычисляется по формуле $h(t) = -5t^2 + 12t + 2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 6 м?

Решение:

Для получения ответа на вопрос следует найти интервал времени, для которого $h(t) \ge 6$. Следовательно, решим неравенство $-5t^2 + 12t + 2 \ge 6$, или неравенство $5t^2 - 12t + 4 \le 0$. Получим $t \in [0{,}4;\ 2]$. (Проверьте!) Тогда величина соответствующего интервала времени равна $2 - 0{,}4 = 1{,}6$ (секунды).

Ответ: 1,6 секунды.

Определение. Неравенство, содержащее неизвестное, называется **неравенством с одним неизвестным**.

Общая форма неравенства (здесь и далее: с одним неизвестным) имеет вид: $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, или $f(x) \ge g(x)$, или $f(x) \le g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – математические выражения.

Определения. • Множество значений неизвестного, при которых определены (существуют) все выражения, содержащиеся в неравенстве, называется **областью допустимых значений (ОДЗ)** этого неравенства.

• Число a называется **решением неравенства**, если оно обращает его в верное числовое неравенство (в истинное высказывание).

Решить неравенство с одним неизвестным – значит найти все его решения.

Множество решений неравенства обозначим через S.

Определение. Два неравенства с одним неизвестным называются **равносильными**, если их множества решений равны.

Неравенства, не имеющие решения, являются равносильными.

Для решения неравенств важно знать следующие основные преобразования, которые назовем ***равносильными преобразованиями***:

I $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$;

II $f(x) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x)$;

III $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ при $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

IV $f(x)>g(x) \Leftrightarrow af(x)<ag(x)$ при $a \in \mathbb{R},\ a<0$;

V $f(x)>g(x) \Leftrightarrow f^n(x)>g^n(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{g(x)},\ n\geq 2,\ n\in \mathbb{N})$ при $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ и n – натуральное число;

VI $f(x)>g(x) \Leftrightarrow f^n(x)>g^n(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{g(x)},\ n\geq 2,\ n\in \mathbb{N})$ при n – нечетное натуральное число.

Аналогичные утверждения справедливы и для неравенств вида

$$f(x)\geq g(x),\ f(x)<g(x),\ f(x)\leq g(x).$$

Внимание! Так как при решении неравенств (особенно в случае бесконечного множества решений) проверка практически невозможна, то важно не применять в процессе решения преобразований, приводящих к посторонним решениям или к потере решений. Преобразования должны быть равносильными.

Задание. Сформулируйте словесно равносильные преобразования I–VI.

3.2. Рациональные неравенства с одним неизвестным. Метод интервалов

Определение. Неравенства вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\leq 0$, где $P(X)$, $Q(X)$ – многочлены, $\operatorname{grad} Q(X)\geq 1$, называются **рациональными неравенствами с одним неизвестным**.

Рациональные неравенства решаются разными методами.

1 **Учитывая знак отношения** $\boldsymbol{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$.

Например, решение неравенства $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ сводится к решению совокупности двух систем неравенств (понятия *система неравенств, совокупность неравенств* будут даны позже): $\begin{cases} P(x)>0, \\ Q(x)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} P(x)<0, \\ Q(x)<0. \end{cases}$

2 **Применяя равносильности вида**:

$$\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x)>0;\quad \frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\geq 0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}}$$

3 **Применяя метод интервалов** (**метод промежутков**) – один из более эффективных методов решения рациональных неравенств.

Пусть функция f задана формулой $f(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, где, например, $a<b<c<d$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Если $x>d$, то каждый из множителей $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$

положителен. Значит, на интервале $(d, +\infty)$ имеем $f(x) > 0$. Если $c < x < d$, то $x - d < 0$, а все остальные множители положительны. Следовательно, $f(x) < 0$ на интервале (c, d). Аналогично на интервале (b, c) имеем $f(x) > 0$ (рис. 6.1). В этом случае говорят, что в точке c *функция меняет свой знак*.

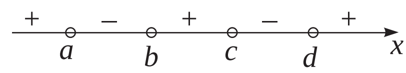


Рис. 6.1

Аналогично имеем для точек a, b, d (рис. 6.1).

Чередование знаков функции f графически изображается при помощи „кривой знаков“ (рис. 6.2), которая чертится справа налево и сверху вниз.

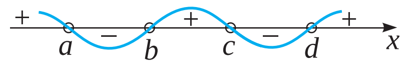


Рис. 6.2

Изображение на рисунке 6.2 интерпретируется следующим образом: на интервалах, где „кривая знаков“ расположена выше числовой оси, справедливо неравенство $f(x) > 0$, а на интервалах, где „кривая знаков“ расположена ниже числовой оси, имеем $f(x) < 0$.

Приведенные рассуждения не зависят от количества линейных множителей, содержащихся в числителе и знаменателе, а также от расположения найденных нулей числителя и знаменателя на числовой оси. Поэтому такие рассуждения справедливы и для функции f, заданной формулой

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_m)}, \tag{1}$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ – действительные и различные. Для этой функции аналогично строится „кривая знаков“.

Замечание. При применении метода интервалов следует учитывать следующее: только в случаях, когда функция имеет вид (1), то есть все коэффициенты при x равны 1 и все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ различны, „кривая знаков“ строится справа налево и сверху вниз. В остальных случаях знак функции на каждом интервале определяется „пробными значениями“, подставляя эти значения в исходную функцию.

Приведем ***алгоритм*** решения рациональных неравенств методом интервалов:

① равносильными преобразованиями исходное неравенство сводят к неравенству, левая часть которого есть выражение вида (1), а правая часть – нуль;

② определяют функцию f и находят нули числителя;

③ находят значения x, при которых функция не определена (нули знаменателя);

④ нули числителя и нули знаменателя делят числовую ось (в общем случае, ОДЗ исходного неравенства) на интервалы;

⑤ строят „кривую знаков“;

⑥ отбирают интервалы, соответствующие знаку функции f;

⑦ записывают ответ.

Аналогично применяют метод интервалов и при решении неравенств вида $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) > 0$ (или „$<$“, или „$\geq$“, или „$\leq$“), где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные действительные числа. Алгоритм решения тот же.

В случаях, когда в выражении вида (1) некоторые из чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ равны между собой, то есть функция имеет вид $f(x) = (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_t)^{k_t}$,

$k_1, k_2, ..., k_t \in \mathbb{Z}^*$, при построении „кривой знаков“ используют следующее правило:

- если k_i, $i \in \{1, 2, ..., t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, – четное число, то „при переходе через нуль c_i“ знак функции не меняется;
- если k_i, $i \in \{1, 2, ..., t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, – нечетное число, то „при переходе через нуль c_i“ знак функции f меняется на противоположный.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\dfrac{x(3-x)(x+4)^4}{x^2-5x+6} \geq 0.$

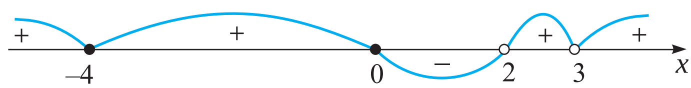
Решение:

Преобразуем левую часть неравенства и получим $\dfrac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)} \leq 0.$ Пусть функция f задана формулой $f(x) = \dfrac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)}$. Значит, нужно найти все значения x, при которых $f(x) \leq 0$.

Находим нули числителя: 0, 3, –4, и нули знаменателя: 2, 3.

Делаем вывод, что функция меняет знак в точках 0 и 2, а в –4 и 3 она не меняет знак.

Получим следующую „кривую знаков“:



Итак, $f(x) \leq 0$ для $x \in [0, 2) \cup \{-4\}$.

Ответ: $S = \{-4\} \cup [0, 2)$.

Упражнения и задачи

А

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $3x - 15 - 2(x+4) > 6 - x$;

б) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{15}$;

в) $x - 3 - \dfrac{3x+7}{2} \geq \dfrac{4x-1}{2}$;

г) $(x-6)(x+1) \leq (x-1)(x+6)$.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{1}{x} \geq 1$; б) $\dfrac{x(x-2)}{3x-1} \leq 0$; в) $\dfrac{x}{1-x} < 0$; г) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \geq 0$; д) $x \geq \dfrac{1}{x}$.

Б

3. Фермер хочет оградить участок для животных, имеющий форму равнобедренной трапеции. Боковые стороны трапеции имеют длину 10 м, а большее основание в 1,5 раза длиннее меньшего основания. Какова должна быть длина меньшего основания, чтобы длина изгороди была больше, чем 50 м?

4. Какие из данных высказываний ложны? Найдите ошибку.

а) Если $x^2 \geq 16$, то $x \geq 4$.

б) Если $x^2 < 25$, то $x < 5$.

в) Если $x^2 > 1$, то $x < 1$.

г) Если $5 - x \geq 4$, то $x \geq 1$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{x(x-1)^3(x+2)}{x^2-1} \leq 0$;

б) $\dfrac{3x^2-5x+7}{x^3+1} > 0$;

в) $\dfrac{2x^2-x-3}{-x^2-7x+8} \geq 0$.

6. Составьте рациональное неравенство с неизвестным в знаменателе, множеством решений которого является множество:

а) $S = [-1, 1]$;

б) $S = (-\infty, 0]$;

в) $S = \varnothing$;

г) $S = \mathbb{R}$.

§4 Системы и совокупности неравенств с одним неизвестным. Повторение и дополнения

4.1. Системы неравенств с одним неизвестным

Вспомним, что такое система неравенств с одним неизвестным.

Пусть, например, даны два неравенства с одним неизвестным $A(x) > 0$ и $B(x) > 0$. Если ставится задача об отыскании всех значений неизвестного, которые удовлетворяют одновременно *каждому из этих неравенств,* то говорят, что нужно решить систему из двух неравенств с одним неизвестным.

Соответствующая система неравенств обозначается: $\begin{cases} A(x) > 0, \\ B(x) > 0. \end{cases}$ (1)

Замечания. **1.** Каждое неравенство в системе (1) может быть разного типа: „≥“, „≤“, „<“.

2. Система неравенств может содержать два или более неравенств.

Определение. Значение неизвестного, при котором верно *каждое* из неравенств системы, называется **решением** системы неравенств с одним неизвестным.

Решить систему неравенств – значит найти множество ее решений.

Множество решений системы неравенств (обозначается S) есть *пересечение* множеств решений неравенств, образующих систему.

Определение. Две системы неравенств с одним неизвестным называются **равносильными**, если их множества решений равны.

Системы неравенств, которые не имеют решений, являются равносильными.

Замечание. Равносильные системы неравенств, решаемые на некотором множестве, называются ***равносильными системами неравенств на этом множестве***.

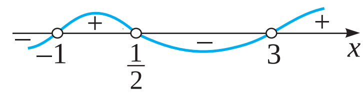
Задания с решением

1. Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{(x-3)(x+1)} < 0, \\ x^2+1 \geq 0. \end{cases}$

Решение:

Находим ОДЗ системы: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

Используя метод интервалов, находим решения первого неравенства:



Значит, $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

Второе неравенство имеет решения $x \in (-\infty, +\infty)$. (Докажите!)

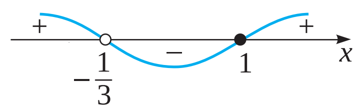
Ответ: $S = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

2. Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases} 2x + 9 > x + 7, \\ \dfrac{x-1}{x+\frac{1}{3}} \le 0. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Первое неравенство имеет решения $x \in (-2, +\infty)$.



Второе неравенство имеет решения $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Тогда исходная система имеет решения $x \in (-2, +\infty) \cap \left(-\frac{1}{3}, 1\right] = \left(-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Ответ: $S = \left(-\frac{1}{3}, 1\right]$.

4.2. Совокупности неравенств с одним неизвестным

Пусть, например, даны два неравенства с одним неизвестным $A(x) < 0$ и $B(x) < 0$. Если ставится задача об отыскании всех значений неизвестного, каждое из которых удовлетворяет *по крайней мере одному из этих неравенств*, то говорят, что нужно решить совокупность из двух неравенств с одним неизвестным.

Совокупность неравенств обозначается: $\left[\begin{array}{l} A(x) < 0, \\ B(x) < 0. \end{array}\right.$ (2)

Замечания. **1.** Каждое неравенство в совокупности (2) может быть разного типа: „≥“, „>“, „≤“.

2. Совокупность неравенств может содержать два или более неравенств.

Определение. Значение неизвестного, при котором верно хотя бы одно из неравенств совокупности, называется **решением** совокупности неравенств с одним неизвестным.

Решить совокупность неравенств – значит найти множество его решений.

Множество решений совокупности неравенств с одним неизвестным (обозначается S) есть *объединение* множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Определение. Две совокупности неравенств с одним неизвестным называются **равносильными**, если их множества решений совпадают.

Совокупности неравенств, которые не имеют решений, являются равносильными.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 2x+9>x+7, \\ \dfrac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\le 0. \end{array}\right.$

Решение:

Первое неравенство имеет решения $x\in(-2,+\infty)$. Второе неравенство имеет решения $x\in\left(-\frac{1}{3},1\right]$. Объединяем множества решений обоих неравенств $(-2,+\infty)\cup\left(-\frac{1}{3},1\right]$ и получаем решения исходной совокупности: $x\in(-2,+\infty)$.

Ответ: $S=(-2,+\infty)$.

Упражнения и задачи

А

1. Выясните, равносильны ли системы:

а) $\begin{cases} -2x+1\le 0, \\ \dfrac{x}{x-1}>1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ \dfrac{1}{x-1}>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+1<0, \\ x(x-1)\le 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^3(x^2-1)>0, \\ \dfrac{1}{x^2+4}<0. \end{cases}$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $-1\le 3x-1\le 8$; б) $0<x(x-3)\le 4$; в) $-3\le\dfrac{x}{2-x}<0$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{(x-3)(2-x)}\ge 0, \\ 3x-1<2(x+1); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-12x+120\ge 0, \\ (x-5)(x+6)<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\le\dfrac{1}{x}, \\ 3x-1>5-\dfrac{2}{x}. \end{cases}$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{(x-3)(2-x)}\ge 0, \\ 3x-1<2(x+1); \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{x}\ge 0, \\ -4x+4\le 0; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)(x+2)>0, \\ x^2+x\le 0, \\ -x+5<0. \end{array}\right.$

5. Найдите значения x, $x\in\mathbb{R}$, при которых существует треугольник со сторонами, длины которых равны $3x+1$, $x+3$, $4x-2$.

Б

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} (x-3)^2\le 0, \\ \dfrac{x^3+x^5}{x+1}>1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(2-x)}{(x-2)(x-3)}>0, \\ x(x-1)(x-2)\le 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3(x-5)-6\ge\dfrac{1}{2}x, \\ \dfrac{5}{x}<1, \\ x(x-1)\ge 2. \end{cases}$

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\frac{7-5x}{5-x} \leq 4+\frac{x}{x-5}-\frac{3x}{25-x^2} \leq 4$; б) $-3 \leq \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} < 1$.

8. Моторная лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км – против течения. Скорость лодки равна 1 км/ч. В каких пределах должна быть скорость лодки, чтобы продолжительность всей прогулки была не менее 3 часов и не более 4 часов?

9. Составьте систему неравенств с одним неизвестным, множеством решений которой является: а) $S=(-\infty, 2)\cup\{3\}$; б) $S=\{-3, 0\}$; в) $S=\varnothing$.

10*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} |3x-1|<x, \\ \frac{|x|}{(x-2)(x-3)} \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x^2-1| \geq 8, \\ \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{(x-3)(4-x)} < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3}{x} < |x-1|, \\ 2x^2-|x|-1 \geq 0. \end{cases}$

11*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \leq 0$.

Упражнения и задачи на повторение

A

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3,5(x-4)=4x+8$; б) $5\frac{1}{4}-x=0,1\left(10-\frac{1}{2}x\right)$; в) $\frac{1}{3}x=\frac{4}{7}-\frac{x}{5}$.

2. Переведите на математический язык, затем решите задачу:

а) с помощью уравнения; б) с помощью системы уравнений.

1) Сумма двух действительных чисел равна 44. Найдите эти числа, если известно, что одно из них на 10 больше другого.
2) Разность двух действительных чисел равна 45. Найдите эти числа, если известно, что одно из них в 10 раз меньше другого.
3) На двух овощных базах хранятся 520 т яблок. Если перевести 60 т яблок из одной базы на другую, то количество яблок на обеих базах было бы равным. Какое количество яблок было изначально на каждой базе?

3. На стоянке припаркованы двухколесные мотоциклы и автомашины. Всего 48 единиц и 168 колес. Сколько мотоциклов и сколько машин на этой стоянке?

Решите задачу:

а) методом фальшивой гипотезы;

б) с помощью уравнения;

в) с помощью системы уравнений.

4. Известно, что точки $A(3,-1)$ и $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ принадлежат графику функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Найдите координаты другой точки $C(x,\ y)$, которая также принадлежит графику функции f.

5. Ивану 7 лет, а его отцу – 39 лет. Определите, сколько еще лет возраст Ивана будет меньше, чем $\frac{2}{3}$ возраста отца.

6. У акционерного общества 3 учредителя. Их долевое участие (в процентах) в создании общества соотносится как $2:3:5$. Чистый доход общества в 2011 году составил 450 000 леев. Этот доход разделили среди акционеров пропорционально их долевому участию. Каков доход (в леях) каждого акционера в 2011 году?

7. Найдите действительные числа x и y, если известно, что $2x-3y=1$ и $x+2y=-3$.

8. Найдите действительные корни многочлена:

а) $P(X)=(X^2-1)(3X^2-X-2)$; б) $Q(X)=X^3-X^2+X-1$.

9. Если умножить многочлен aX^2-2X+b на многочлен X^2+aX-1, то получим многочлен четвертой степени, у которого коэффициент при X^2 равен 8, а коэффициент при X равен –2. Найдите числа a и b.

10. Найдите истинностное значение высказывания:

а) $\frac{x-5}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)\geq 0$. б) $\frac{x^2-4}{x+3}<0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x+3)<0$.

Б

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=\frac{5}{2}$; б) $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=\frac{8}{3}$.

12. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ 2x-5=y;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=14,\\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12};\end{cases}$ в) $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6},\\ x-y=2.\end{cases}$

13. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2y^2+xy-72=0,\\ x+y-6=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11.\end{cases}$

14. При каких действительных значениях m система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x-y=m\end{cases}$

а) имеет единственное решение; б) имеет два решения; в) несовместна?

15. Докажите, что при любых $x\in\mathbb{R}$:

а) $x^2-10x+1>-x^2-7x-1$; б) $5x^2-5x+1>-2x^2+5x-6$.

16. Одна из сторон прямоугольника на 7 см длиннее другой. Какова может быть длина этой стороны, если площадь прямоугольника меньше, чем $60\ \text{см}^2$?

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Дополните, чтобы полученное высказывание стало истинным: 1

$$\begin{cases}3x-2y=-3\\x^2-xy=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\square\\\square\end{cases}$$

2. Дан многочлен $P(X)=-3X^2-X+2$.

а) Найдите действительные корни многочлена $P(X)$. 2

б) Составьте многочлен второй степени, корнями которого являются противоположные значения корней многочлена $P(X)$. 1

3. Дана функция $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$.

а) Найдите D_f. 1

б) Определите, при каких действительных значениях x функция f принимает неотрицательные значения. 2

4. Букет из 3 тюльпанов и 4 нарциссов стоит 44 лея, а букет из 6 тюльпанов и 3 нарциссов стоит 63 лея. Сколько стоит один тюльпан и сколько один нарцисс? 3

Б

1. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases}x-y+xy=3,\\xy^2-x^2y=-2.\end{cases}$ 2

2. Дана функция $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}+\dfrac{1}{x}$. 2

а) Найдите D_f.

б) Постройте график функции f.

3. С вокзалов A и B, расположенных на расстоянии 600 км, навстречу друг другу одновременно отправляются два поезда. Через 6 ч расстояние между ними составляло 60 км. Если бы поезд из A отправился на 1 ч 30 мин раньше поезда из B, то они бы встретились на середине пути между A и B. Найдите скорость каждого поезда. 3

4. Дана система $\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-1}\geq 0,\\-3x^2+\square<0.\end{cases}$ 3

а) Впишите такое действительное число, чтобы множество решений системы совпало с множеством решений первого неравенства.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ полученную систему.

ОДЗ

Решения

- Объединение множеств решений уравнений (систем)
- Совокупность уравнений (систем)
- Пересечение множеств решений уравнений
- Системы уравнений

Методы решений

Уравнения	Неравенства
1. Применение формул 2. Графический метод 3. Использование вспомогательных неизвестных 4. Метод приведения 5. Метод подстановки 6. Метод разложения на множители 7. Другие методы	1. Метод интервалов 2. Приведение к равносильному неравенству (равносильной системе, совокупности) 3. Использование вспомогательных неизвестных 4. Другие методы

Решения

- Пересечение множеств решений неравенств (систем)
- Системы неравенств
- Объединение множеств решений неравенств
- Совокупности неравенств (систем)

Равносильность

Уравнения

алгебраические

I. Уравнения:

$ax+b=0,\ a\neq 0$

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$

и др.

Примеры:

$3x-1=0;\ 4x^2-6x=0;$

$x^2+x^2+x+1=0.$

II. Системы, совокупности

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} ax+b=0, \\ ax^2+bx+c=0 \end{array}\right.$ и др.

рациональные

I. Уравнения

$\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$, где

$A(X), B(X)$ – многочлены.

Примеры:

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x+1}=0;\ \ x-\dfrac{2}{x}=3.$

II. Системы, совокупности

$\begin{cases} x-\dfrac{1}{y}=5, \\ 3x+\dfrac{2}{y}=0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+x=5, \\ 2-\dfrac{1}{x+1}=3. \end{array}\right.$

симметрические

I. Уравнения

Примеры:

$x+y+xy=0;\ \ x^2+y^2=1.$

II. Системы уравнений

Примеры:

$\begin{cases} 2x+2y-xy=0, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=-2. \end{cases}$

однородные

I. Уравнения

Примеры:

$2x+3y=0;\ \ x^2-xy+y^2=2.$

II. Системы уравнений

$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=2, \\ x^2-xy+2y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3-y^3=0, \\ x^2y+xy^2=1. \end{cases}$

Неравенства

I степени

I. Неравенства

$ax+b>0,\ a\neq 0$

$ax+b\geq 0,\ a\neq 0$

$ax+b<0,\ a\neq 0$

$ax+b\leq 0,\ a\neq 0$

Пример:

$1-3x<-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x>3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>1.$

II. Системы, совокупности

Примеры:

$\begin{cases} 6x-4>0 \\ 2-7x\leq 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x-0{,}3<0 \\ 2x-\sqrt{5}\geq 0 \end{array}\right.$

рациональные

I. Неравенства

$\dfrac{A(x)}{B(x)}>0,\ \ \dfrac{A(x)}{B(x)}\leq 0$ и др.,

где $A(X), B(X)$ – многочлены.

Пример:

$\dfrac{1}{x}>1$

II. Системы, совокупности

Примеры:

$\begin{cases} \dfrac{2}{x}>0 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}<0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{x-1}\leq 0 \\ x-\dfrac{1}{2x}>0 \end{array}\right.$

Другие уравнения, неравенства, системы, совокупности

Равносильность

Уравнения (неравенства) с модулем

Уравнения (неравенства) с параметром

МОДУЛЬ 7 Элементарные функции. Уравнения. Неравенства

То, что мы знаем, – очень мало,
То, чего мы не знаем, – огромно.
Пьер Симон Лаплас

Цели

- распознавание изученных функций, уравнений, неравенств, систем, совокупностей в различных контекстах;
- применение изученных функций и их свойств в решении задач из разных областей;
- классификация уравнений, неравенств, систем, совокупностей по различным критериям;
- решение уравнений, неравенств, систем, совокупностей адекватными методами;
- моделирование повседневных ситуаций и/или ситуаций из разных областей с помощью изученных функций, уравнений, неравенств, систем, совокупностей.

§1 Функция I степени. Уравнения I степени. Неравенства I степени

1.1. Функция I степени

Задача. Служба такси в муниципии Кишинэу предлагает услуги по следующим тарифам:

- посадка – 12 леев,
- поездка в черте города – 2,2 лея/км,
- поездка за пределы города – 4,2 лея/км.

а) Запишите формулу зависимости стоимости y поездки на такси в черте города от пройденного x расстояния.

б) Является ли данная зависимость функциональной? Какого типа эта функция?

в) Рассчитайте стоимость поездки на этом такси семьи Петреску от дома до центра города, если расстояние равно 10,3 км.

г) Достаточно ли 510 леев для поездки на такси из Кишинэу в Бэлць, если расстояние между этими городами равно 120 км?

Решение:

а) $y = 2{,}2x + 12$. (Обоснуйте!)

б) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2{,}2x + 12$ – функция I степени. (Обоснуйте!)

в) Так как $x = 10{,}3$, получаем $y = 2{,}2 \cdot 10{,}3 + 12 = 34{,}66$ (лея).

г) Имеем $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4{,}2x + 12$. Поскольку $x = 120$, делаем вывод, что 510 леев недостаточно для оплаты этой поездки. (Обоснуйте!)

Определение. **Функцией I степени** называется функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Свойства функции I степени:

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° График функции f пересекает ось Oy в точке $(0, b)$, а ось Ox – в точке $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

3° *Нуль функции*: $x_0 = -\frac{b}{a}$.

4° Если $a > 0$: $f(x) > 0$ при $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ и $f(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.

Если $a < 0$: $f(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ и $f(x) < 0$ при $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

5° Функция является нечетной лишь при $b = 0$: $f(-x) = a \cdot (-x) = -f(x)$. В остальных случаях функция ни четная, ни нечетная.

6° *Монотонность*: При $a > 0$ функция строго возрастает на $\mathbb{R}$ (из $x_1 < x_2$ следует последовательно $ax_1 < ax_2$, $ax_1 + b < ax_2 + b$, $f(x_1) < f(x_2)$). При $a < 0$ функция строго убывает.

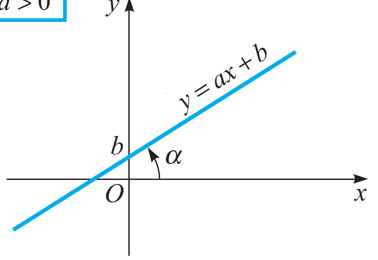
7° Функция f не является периодической, поскольку она строго монотонна на неограниченном промежутке.

8° Исходя из свойства 6°, функция f не имеет локальных экстремумов.

9° Функция f биективна.

10° Графиком функции является прямая. Ее расположение зависит от знака углового коэффициента $a = \operatorname{tg}\alpha$: если $a > 0$, то прямая образует острый угол с положительной полуосью Ox (от оси Ox против часовой стрелки) (рис. 7.1 а)), а если $a < 0$, то этот угол тупой (рис. 7.1 б)).

а) $a > 0$



б) $a < 0$

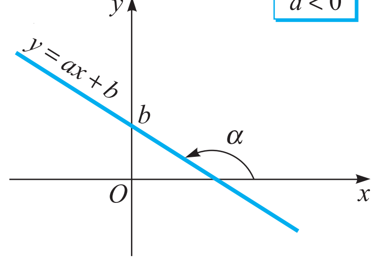


Рис. 7.1

1.2. Уравнения I степени. Неравенства I степени

> **Определения.** • Уравнение вида $ax+b=0$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется **линейным уравнением** (точнее, **афинным уравнением**).
> • Если $a \neq 0$, линейное уравнение называется **уравнением I степени**.

Система двух уравнений I степени с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Решением системы является упорядоченная пара значений (a, b) неизвестных, которая превращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Напомним методы решения систем двух уравнений I степени с двумя неизвестными:

✓ метод подстановки; ✓ метод приведения; ✓ графический метод.

> **Определение.** Неравенства вида $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, где $a\neq 0$, $a, b\in\mathbb{R}$, называются **неравенствами I степени с одним неизвестным**.

Как правило, неравенства I степени решаются при помощи равносильных преобразований.

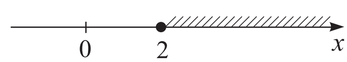
Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $3x-6\geq 0$.

Решение:

$3x-6\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq 6 \Leftrightarrow x\geq 2.$

Графически множество решений неравенства изображается следующим образом:



Ответ: $S=[2, +\infty)$.

Множеством решений системы (совокупности) неравенств I степени с одним неизвестным является пересечение (объединение) множеств решений неравенств этой системы (совокупности).

Задание с решением

Решите на множестве $\mathbb{R}$: а) систему неравенств $\begin{cases} 3(x-1)\geq x-6, \\ x>5x+4; \end{cases}$

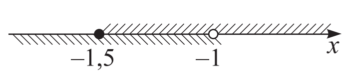
б) совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)\geq x-6, \\ x>5x+4. \end{array}\right.$

Решение:

а) $\begin{cases} 3(x-1)\geq x-6 \\ x>5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3\geq x-6 \\ 4x<-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq -3 \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1{,}5, \\ x<-1. \end{cases}$

Ответ: $S=[-1{,}5; -1)$.

б) $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)\geq x-6 \\ x>5x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq -1{,}5, \\ x<-1. \end{array}\right.$ Получим:



Ответ: $S=\mathbb{R}$.

1.3. Линейные уравнения с параметром

Пусть $F(x, a)=0$ – уравнение, содержащее неизвестные x и a. Если ставится задача для каждого значения a решить уравнение относительно x, то уравнение $F(x, a)=0$ называется ***уравнением с неизвестным x и параметром a***.

Задание с решением

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $ax=2$; б) $(a^2-9)x=a-3$.

Решение:

а) 1) Если $a=0$, то получаем уравнение $0\cdot x=2$, которое не имеет решений. Значит, $S=\varnothing$.

2) Если $a\neq 0$, то получаем уравнение I степени $ax=2$, имеющее решение $\frac{2}{a}$. Значит, $S=\left\{\frac{2}{a}\right\}$.

Ответ: $S=\varnothing$ при $a=0$; $S=\left\{\frac{2}{a}\right\}$ при $a\in\mathbb{R}^*$.

б) $(a^2-9)x=a-3 \Leftrightarrow (a-3)(a+3)x=a-3$.

1) Если $a=3$, то получаем уравнение $0\cdot x=0$. Значит, $S=\mathbb{R}$.

2) Если $a=-3$, то получаем уравнение $0\cdot x=-6$. Значит, $S=\varnothing$.

3) Если $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$, то получаем уравнение I степени $(a-3)(a+3)x=a-3$, имеющее решение $x=\frac{1}{a+3}$. Значит, $S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$.

Ответ: $S=\mathbb{R}$ при $a=3$; $S=\varnothing$ при $a=-3$; $S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$.

Упражнения и задачи

A

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3{,}5(x-2)=8{,}(24)$; б) $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$; в) $-\frac{3}{4}+6x=2{,}(2)(x-1)$.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, тремя методами, систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=3,\\-3x+2y=-4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-0{,}5x+2y=2,\\3x-y=-1.\end{cases}$

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: а) $9(x-2)-3(2x+1)>5x$; б) $4(2x-1)-3(3x+2)>0$.

4. Даны функции $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{12-x}{6}+1$, $g(x)=-2{,}5x+6$.

а) Найдите нули функций f и g.

б) Определите интервалы, на которых $f(x)\geq 0$; $f(x)<0$; $g(x)\leq 0$; $g(x)>0$.

в) Найдите координаты точки пересечения графиков функций G_f и G_g.

г) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(x)<g(x)$.

д) Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases}f(x)\leq 0,\\g(x)>0.\end{cases}$

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $(1-3x)(2{,}5x+6)=0$; б) $\left(3\frac{1}{5}x+10\right)\left(2-10\frac{1}{3}x\right)=0$.

6. Решите тремя методами задачу:

а) За рабочий день 25 строителей получили 6 500 леев. Зарплата некоторых из них составляет 200 леев за день, а остальных – в 1,5 раза больше. Сколько строителей получили по 200 леев за рабочий день?

б) Бассейн емкостью 35,7 гекталитра можно наполнить водой из двух труб за 7 ч. За час через одну трубу протекает воды на 90 л больше, чем через другую. Сколько воды поступает в час через каждую трубу?

7. Укажите в декартовой системе координат множество точек:

1) абсциссы которых удовлетворяют неравенству: а) $-3<x<2$; б) $-1\le x<6$;

2) ординаты которых удовлетворяют неравенству: а) $-1<y<2$; б) $3<y\le 5$.

8. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение: а) $P_{n-3}\cdot A_n^3=20P_{n-2}$; б) $C_{n-2}^2+C_{n-2}^3+C_{n-2}^4=0$.

Б

9. При каких значениях действительного параметра a множеством решений уравнения $(a+1)x-8=0$ является:

а) $S=\{8\}$; б) $S=\{-2\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $ax=x+2$; б) $(a^2-1)x=2a^2+a-3$; в) $ax=a$; г) $2ax-1=x+3$.

11. Даны функции $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$, $g(x)=1-2x$.

а) Докажите, что f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, а g строго убывает на $\mathbb{R}$.

б) Найдите значения x, при которых график G_f расположен выше графика G_g.

12. При каких значениях действительного параметра a система уравнений $\begin{cases}ax+3y=-a\\3x+ay=8\end{cases}$ имеет неотрицательные решения?

13. Решите задачу: а) с помощью уравнения; б) с помощью системы уравнений.

Расстояние между двумя вокзалами равно 650 км. Скорый поезд проходит это расстояние на 12 ч быстрее, чем товарный поезд, поскольку его скорость на 24 км/ч больше, чем скорость товарного поезда. Найдите скорость каждого поезда.

14. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство: а) $C_{2n}^7>C_{2n}^5$; б) $C_{15}^{k-2}>C_{15}^k$.

15. Сплав из меди и олова массой 12 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов олова следует добавить к этому сплаву, чтобы получить сплав, содержащий 40% меди?

16. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы после их плавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

17. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $\frac{2}{5x-a}=\frac{3}{ax-1}$; б) $a-2=\frac{3x+1}{x+1}$.

18*. При каких значениях действительного параметра a система уравнений:

$$\begin{cases}x+(2a-1)y=2a\\(2a+1)x+(a^2+2)y=2(a^2+a+1)\end{cases}$$

а) совместна и определена; б) совместна и неопределена; в) несовместна?

§2 Функция II степени. Уравнения II степени. Неравенства II степени

2.1. Функция II степени

Определение. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **функцией II степени**.

Основные свойства функции II степени:

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то график не пересекает ось Ox, а если $D \geq 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ и график пересекает ось Ox в одной или в двух точках.

3° Пусть $a > 0$. Если $D < 0$, то $f(x) > 0$ для $x \in \mathbb{R}$. Если $D \geq 0$, то $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (x_1, x_2)$, $x_1 \leq x_2$.

Пусть $a < 0$. Если $D < 0$, то $f(x) < 0$ для $x \in \mathbb{R}$. Если $D \geq 0$, то $f(x) > 0$ при $x \in (x_1, x_2)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $x_1 \leq x_2$.

4° При $b = 0$ функция четная: $f(-x) = a(-x)^2 + c = f(x)$. В остальных случаях функция не является ни четной, ни нечетной.

5° При $a > 0$ функция f строго возрастает на $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ и строго убывает на $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$. При $a < 0$ функция f строго убывает на $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ и строго возрастает на $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ (см. модуль 5, теорема 2).

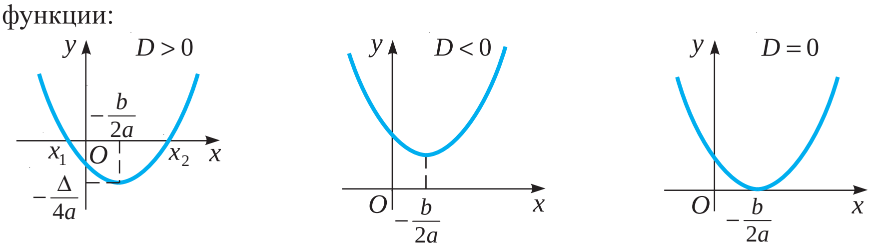
6° Функция f не является периодической, поскольку она монотонна на бесконечном (неограниченном) промежутке.

7° Если $a > 0$, то $y_{\min} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{D}{4a}$, а если $a < 0$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – точка локального максимума (см. модуль 5, §2) и $y_{\max} = -\dfrac{D}{4a}$.

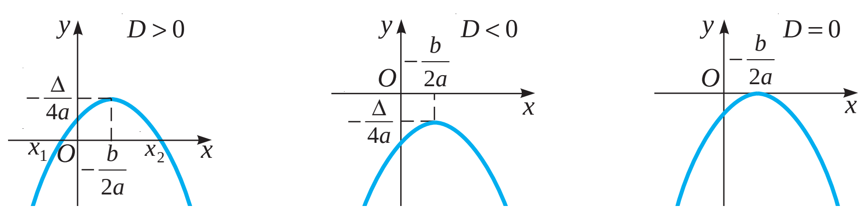
8° Функция f не является биективной.

9° График функции:

$a > 0$



$a < 0$



2.2. Уравнения II степени с одним неизвестным

Определение. Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **уравнением II степени** (или **квадратным уравнением**), а a, b, c называются его **коэффициентами**.

Отмечаем, что решения уравнения II степени являются абсциссами точек пересечения графика функции II степени, соответствующей этому уравнению, с осью Ox.

Существование действительных решений квадратного уравнения, а также их количество зависит от значения дискриминанта $D=b^2-4ac$ данного уравнения.

1) Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных решений. Значит, $S=\varnothing$.

2) Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет одно действительное решение: $x=-\dfrac{b}{2a}$. То есть, $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

3) Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных решения: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Значит, $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right\}$.

Уравнение II степени $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, делением на a сводится к равносильному ***приведенному квадратному уравнению***:

$$x^2+px+q=0,\ p, q \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1 (теорема Виета)

Если x_1, x_2 – решения уравнения

$$ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0, \qquad (1)$$

то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Если x_1, x_2 – решения уравнения

$$x^2+px+q=0, \qquad (3)$$

то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1 \cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (4)$$

Теорема 2 (обратная теорема Виета)

Если действительные числа x_1, x_2 удовлетворяют соотношениям (2), то эти числа являются решениями уравнения (1).

Если действительные числа x_1, x_2 удовлетворяют условиям (4), то эти числа являются решениями уравнения (3).

2.3. Уравнения II степени с параметром

Пусть $F(x, a)=0$ – уравнение II степени, содержащее неизвестные x и a. Если ставится задача для каждого значения a решить уравнение относительно x, то уравнение $F(x, a)=0$ называется ***уравнением II степени с неизвестным x и параметром a***.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с параметром a, $a \in \mathbb{R}$:

$$(a-1)x^2-2(2a-1)x+4a+3=0.$$

Решение:

1) Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент при x^2 принимает значение нуль, так как в этом случае заданное уравнение преобразуется в уравнение I степени. Получаем $a=1$.

При $a=1$ уравнение принимает вид $-2x+7=0 \Leftrightarrow x=3{,}5$.

2) При $a\neq 1$ находим значения параметра a, при которых дискриминант принимает значение нуль: $D=4(2a-1)^2-4(a-1)(4a+3)=-12a+16=0 \Leftrightarrow a=1\frac{1}{3}$.

Если $a>1\frac{1}{3}$, то $D<0$ и уравнение не имеет действительных решений.

Если $a<1\frac{1}{3}$ и $a\neq 1$, то $D>0$ и уравнение имеет решения $x_1=\dfrac{(2a-1)-\sqrt{4-3a}}{a-1}$, $x_2=\dfrac{(2a-1)+\sqrt{4-3a}}{a-1}$.

Ответ: $S=\{3{,}5\}$ при $a=1$; $S=\varnothing$ при $a\in\left(1\frac{1}{3},+\infty\right)$;

$S=\left\{\dfrac{2a-1-\sqrt{4-3a}}{a-1},\ \dfrac{2a-1+\sqrt{4-3a}}{a-1}\right\}$ при $a\in(-\infty,1)\cup\left(1,1\frac{1}{3}\right)$;

$S=\{5\}$ при $a=1\frac{1}{3}$.

2.4. Геометрическая интерпретация некоторых уравнений II степени с двумя неизвестными

Геометрически множество решений уравнения с двумя неизвестными изображается соответствующим множеством точек в декартовой системе координат. Форма фигуры зависит от степени уравнения и его вида.

Наиболее простые уравнения II степени с двумя неизвестными и их геометрические изображения представлены на рисунке 7.2.

Используя уравнения этих фигур, можно решить разные задачи.

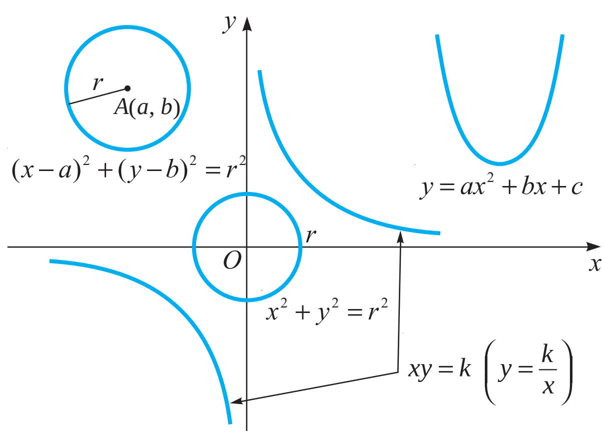


Рис. 7.2

Задачи с решением

1. Часть дороги имеет форму прямой, заданной уравнением $y=-4x+3$. Часть железной дороги имеет форму гиперболы, заданной уравнением $y=\dfrac{3}{x}$. Если прямолинейная дорога будет достроена, пересечется ли она с железной дорогой?

Решение:

Задача сводится к нахождению точек пересечения соответствующих прямой и гиперболы. В свою очередь, эта задача сводится к определению совместности системы уравнений: $\begin{cases} y=-4x+3, \\ y=\dfrac{3}{x}. \end{cases}$ Подставляя y во второе уравнение, получаем систему $\begin{cases} y=-4x+3, \\ -4x+3=\dfrac{3}{x}. \end{cases}$ Так как второе уравнение не имеет действительных решений (Проверьте!), то и система не имеет решений. Значит, достроенная прямолинейная дорога не пересечет железную дорогу.

2. Найдите радиус и центр окружности, касательной с осями координат и с гиперболой $y=\dfrac{4}{x}$ (рис. 7.3).

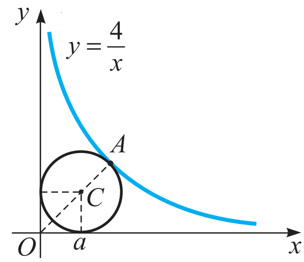


Рис. 7.3

Решение:

Исходя из симметрических соображений, ясно, что центр этой окружности будет расположен на прямой, заданной уравнением $y=x$, следовательно, его координатами будут (a, a). Эта прямая пересекает гиперболу в точке A, координаты которой являются решениями системы $\begin{cases} y=x, \\ y=\dfrac{4}{x}. \end{cases}$

Получаем $A_1(-2, -2)$, $A(2, 2)$. Замечаем, что $A_1(-2, -2)$ не удовлетворяет условию задачи. Центр C окружности будет удовлетворять условию: $AC=a$, значит, $\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=a$, $|a|<2$. Получаем $a=4-2\sqrt{2}$. Таким образом, центром окружности является точка $C(4-2\sqrt{2}, 4-2\sqrt{2})$ и ее радиус $r=4-2\sqrt{2}$.

2.5. Уравнения с модулем

Уравнения с модулем решаются различными методами.

1 Применение определения модуля

Пример. $|x-2|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=5 \\ x-2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-3. \end{array}\right.$ *Ответ*: $S=\{-3, 7\}$.

2 Использование соотношения $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Пример. $|x+3|=|2x-1| \Leftrightarrow (x+3)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{3}, \\ x=4. \end{array}\right.$

Ответ: $S=\left\{-\dfrac{2}{3}, 4\right\}$.

3 Применение соотношения $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Пример. $|x^2-x|=|4+2x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=4+2x \\ x^2-x=-4-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0 \\ x^2+x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Ответ: $S=\{-1, 4\}$.

4 Использование вспомогательных неизвестных (замена неизвестных)

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2x^2-|x|-1=0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Пусть $|x| = t,\ t \geq 0$. Так как $x^2 = |x|^2$, то получим уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, решение исходного уравнения свелось к решению совокупности из двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} |x| = 1 \\ |x| = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$ *Ответ*: $S = \{-1, 1\}$.

5 Применение метода интервалов

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $|2x - 1| - 3|x + 3| = 2x$.

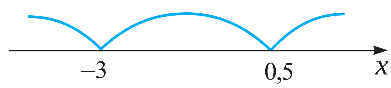
Решение:

1) Определим ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

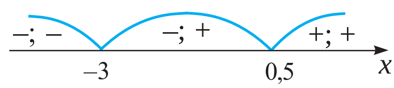
2) Находим нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0{,}5; \qquad x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3.$$

3) Полученные нули делят числовую ось (в общем случае ОДЗ исходного уравнения) на интервалы $(-\infty; -3),\ [-3; 0{,}5),\ [0{,}5; +\infty)$:



4) Раскрываем соответствующие модули на каждом интервале:



5) Решаем уравнение на каждом интервале с учетом раскрываемости модулей на соответствующем интервале.

Рассмотрим следующие случаи.

а) Для $x \in (-\infty, -3)$ имеем $2x - 1 < 0,\ x + 3 \leq 0$. Тогда $|2x - 1| = -(2x - 1)$, $|x + 3| = -(x + 3)$ и получаем:

$$-(2x - 1) + 3(x + 3) = 2x \Leftrightarrow -x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \notin (-\infty, -3).$$

Итак, $x = 10$ не является решением исходного уравнения.

б) Для $x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right)$ имеем $2x - 1 \leq 0,\ x + 3 \geq 0$ и получаем:

$$-(2x - 1) - 3(x + 3) = 2x \Leftrightarrow -7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7} \in \left[-3, \frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, $x = -\frac{8}{7}$ – решение исходного уравнения.

в) Для $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ имеем $2x - 1 \geq 0,\ x + 3 > 0$ и получаем:

$$2x - 1 - 3(x + 3) = 2x \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Значит, $x = -\frac{10}{3}$ не является решением исходного уравнения.

6) Ответ представляет собой объединение множеств решений, полученных в каждом из рассмотренных случаев.

Ответ: $S = \left\{-\frac{8}{7}\right\}$.

6 Графический метод

Пример

Определим, при каких значениях действительного параметра a уравнение $|x^2-2x-3|=a$ имеет три действительных решения.

Решение:

Строим график функции, заданной формулой $f(x)=|x^2-2x-3|$. Замечаем, что только прямая параллельная оси Oy, заданная уравнением $y=4$, имеет 3 общие точки с построенным графиком.

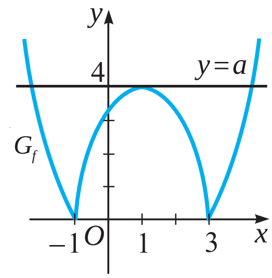


Рис. 7.4

Итак, при $a=4$ исходное уравнение имеет ровно три действительных решения.

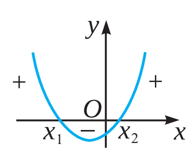
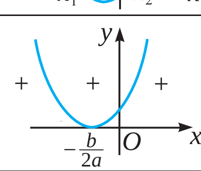
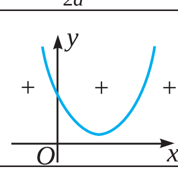
2.6. Неравенства II степени с одним неизвестным

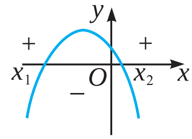
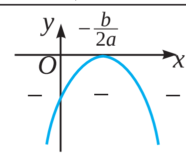
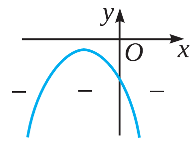
Определение. Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, где $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, называются **неравенствами II степени с одним неизвестным**.

Рассмотрим два метода решения неравенств II степени.

1 Применение результатов исследования функции

Пусть функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. В таблице указаны множества решений неравенства $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$, в зависимости от значений коэффициента a и дискриминанта $D=b^2-4ac$, где $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $(D\geq 0)$ – решения уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

Значения		Множество решений неравенства $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$	Знак функции, заданной формулой $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$
a	D		
	$D>0$	$S=(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$	
$a>0$	$D=0$	$S=\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$	
	$D<0$	$S=(-\infty, +\infty)$	

$a<0$	$D>0$	$S=(x_1,\ x_2)$	
	$D=0$	$S=\varnothing$	
	$D<0$	$S=\varnothing$	

Замечание. Множество решений неравенства $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0,$ получается путем добавления решений уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$ к множеству решений неравенства $ax^2+bx+c>0$. Например, множеством решений неравенства $ax^2+bx+c\geq 0$ при $a>0$, $D>0$ является множество $S=(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,\ +\infty)$.

Аналогично получают множества решений других видов неравенств II степени.

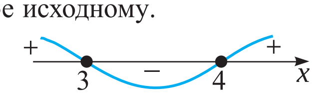
2 Метод интервалов

Изложим суть применения метода интервалов на примере решения на множестве $\mathbb{R}$ неравенства $x^2-7x+12\leq 0$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Решениями квадратного уравнения $x^2-7x+12=0$ являются $x_1=3$, $x_2=4$. Разложим выражение $x^2-7x+12$ на множители: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Тогда получим неравенство $(x-3)(x-4)\leq 0$, равносильное исходному.

Применив метод интервалов, строим „кривую знаков“:



Итак, $x\in[3,\ 4]$.

Ответ: $S=[3,\ 4]$.

2.7. Неравенства с модулем

Неравенства с модулем также решаются разными методами.

I Неравенство вида $|f(x)|\leq g(x)$ в ОДЗ равносильно двойному неравенству $-g(x)\leq f(x)\leq g(x)$, то есть системе $\begin{cases} f(x)\geq -g(x), \\ f(x)\leq g(x). \end{cases}$

Пример

$|3x-5|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq 3x-5\leq 4\Leftrightarrow 1\leq 3x\leq 9\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{3},\ 3\right]$.

Аналогично для случая „<“.

2 **Неравенство вида $|f(x)| \geq g(x)$** на ОДЗ равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array}\right.$$

Пример

$$|2-x| \geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x \geq 3 \\ 2-x \leq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty).$$

Аналогично для случая „>“.

3 **Метод замены неизвестных**

Пример

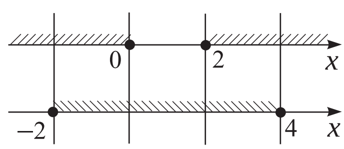
Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(x-1)^2 - 4|x-1| + 3 \leq 0$.

Решение:

Имеем $(x-1)^2 = |x-1|^2$. Пусть $|x-1| = t$, $t \geq 0$. Тогда получаем неравенство $t^2 - 4t + 3 \leq 0$, имеющее решения $t \in [1, 3]$, или $1 \leq t \leq 3$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем:
$$1 \leq |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \geq 1, \\ |x-1| \leq 3. \end{cases}$$

Решаем первое неравенство системы:
$$|x-1| \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \geq 1 \\ x-1 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Для второго неравенства имеем:
$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$.



Итак, система, а значит и исходное неравенство имеют решения: $x \in [-2, 0] \cup [2, 4]$.

Ответ: $S = [-2, 0] \cup [2, 4]$.

4 **Метод интервалов**. Алгоритм применения этого метода для решения неравенств с модулем аналогичен алгоритму решения уравнений с модулем.

Упражнения и задачи

A

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $x^2 - 5x + 6 > 0$; б) $3x^2 - x + 1 \leq 0$; в) $-2x^2 - x + 4 \leq 0$; г) $2x + 7 > 2x^2 + 8x + 11$.

2. Найдите промежутки, на которых функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принимает положительные (отрицательные) значения:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; б) $f(x) = -2x^2 - 4x + \frac{5}{2}$; в) $f(x) = x^2 + 3x$.

3. Найдите область определения функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}x^2 - 2}}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3}}$.

4. Космический корабль запущен с начальной скоростью 100 м/с. Зависимость между пройденным расстоянием h и временем t задана функцией $h(t)=100t-4{,}9t^2$. Какое расстояние пролетел корабль за первые 10 секунд?

5. Найдите длины сторон прямоугольника с максимальной площадью, если его периметр равен 20 см.

6. Запишите уравнение окружности с центром $A(4,\ 5)$, касающейся прямой $y=2x+3$.

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x-8|=2$; б) $|3x+1|=-5$;
в) $|x+2|=|x-3|$; г) $2|x-1|=|x-3|-|4-x|$;
д) $|x^2-5x+4|=2$; е) $|x(x-3)|=4$.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $|x-2|\le 3$; б) $5|2x+1|\ge -1$; в) $|-6(x+3)|>4$;
г) $x^2-3|x|-4\le 0$; д) $|x|\cdot|x-1|\ge 20$; е) $|x-1|\cdot|x-2|<6$.

9. Найдите точки локального экстремума для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=|2x^2-3x+1|$; б) $f(x)=2|x|^2-3|x|+1$.

10. Мяч, подброшенный вверх с начальной скоростью 72 м/с, будет находиться через t секунд на высоте $h(t)=72t-4{,}9t^2$ (от поверхности Земли).

а) Найдите высоту, на которой будет находиться мяч через 5 с.
б) Через сколько секунд мяч упадет на Землю?

11. Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$;
в) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{9-x^2}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}-\sqrt{x^2-3x-4}$.

Б

12. Решите графически систему, а затем аналитически проверьте ее решения:

а) $\begin{cases}x^2-4x-6y=20,\\ xy=-8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-8x-4y=6,\\ y^2+5y-5x=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+y^2=36,\\ x^2+6y=36.\end{cases}$

13. а) Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(2,\ 0)$, $B(5,\ 0)$ и касающейся оси Oy.

б) Найдите координаты точек пересечения парабол $y=-2x^2-x-6$ и $y=x^2-2$.
в) Найдите координаты точек пересечения гиперболы $yx=2$ и окружности $x^2+y^2=4$.

14. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x-1|-3|x+4|=x$; б) $\big||2x+1|-2x\big|=3|x+2|$; в) $\dfrac{9}{|3x-1|-8}=|3x-1|$.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $|x^2-9x+18|+x\ge 5$; б) $|2x-3|>|x-5|-3|2-x|$; в) $|x-4|\ge|x+2|$;
г) $\dfrac{|x|\cdot(2-|x-1|)}{(x-1)^3}>0$; д) $|2x^2-x-1|\le 0$; е) $|1-3x|\cdot|x^2-x|>0$.

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $|x-a|-2|x-4|=2$; б) $|x+2|+|3x-1|=a$.

17. Найдите действительные значения параметра a, при которых неравенство $ax^2+(a-1)x-(a-2)>0$ не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$.

18. Найдите действительные значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)x^2+(a+1)x-(a+1)>0$ имеет решения для всех $x\in\mathbb{R}$.

19. Найдите действительные значения параметра a, при которых неравенство $x^2-(4a+1)x+(a+2)(3a-1)>0$ имеет решения для любого $x<0$.

20. Найдите действительные значения параметра a, при которых неравенство $x+\dfrac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$ не имеет положительных решений.

21*. Для функции $f\colon(-\infty,-1]\to(-\infty,-2]$, $f(x)=-x^2-2x-3$, найдите f^{-1}.

22. Пусть дана окружность $x^2+y^2=9$. Запишите уравнение окружности, проходящей через начало прямоугольной системы координат, точку $A(1, 0)$ и которая касается заданной окружности.

23*. Найдите значения действительного параметра a, при которых множеством решений системы неравенств $\begin{cases}\dfrac{ax}{x^2+4}<1{,}5\\ 6x^4-48x^2+96\geq 0\end{cases}$ является множество $\mathbb{R}$.

24*. При каких значениях действительного параметра a любое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ является и решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3<0$?

§ 3 Функция радикал. Степенная функция. Иррациональные уравнения. Иррациональные неравенства

3.1. Функция радикал

Определение. **Функциями радикал** называются функции
$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$, и $g\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=\sqrt[2n]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Пример

$f_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\sqrt[3]{x}$, и $f_2\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f_2(x)=\sqrt[4]{x}$, – функции радикал.

Основные свойства функции радикал

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$

1° $D(f)=\mathbb{R}$.

2° У функции f единственный нуль: $x_1=0$. Точкой пересечения графика G_f с осью Oy является точка $O(0, 0)$.

3° $f(x)>0$ при $x\in(0,+\infty)$;
$f(x)<0$ при $x\in(-\infty,0)$.

4° Функция f – нечетная:
$f(-x)=\sqrt[2n+1]{-x}=\sqrt[2n+1]{-1}\cdot\sqrt[2n+1]{x}=-f(x)$.

$g\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=\sqrt[2n]{x}$

1° $D(g)=\mathbb{R}_+$.

2° У функции g единственный нуль: $x_1=0$. Точкой пересечения графика G_g с осью Oy является точка $O(0, 0)$.

3° $g(x)>0$ при $x\in(0,+\infty)$;
функция g не принимает отрицательные значения.

4° Функция g не является ни четной, ни нечетной, поскольку множество $D(g)$ не симметрично относительно $O(0, 0)$.

5° Функция f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$ (вытекает из свойства 7° радикалов).

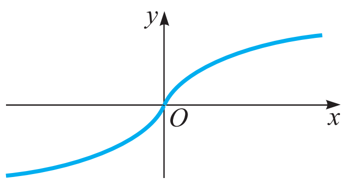
6° Функция f не является периодической, поскольку она строго монотонна на бесконечном промежутке.

7° Функция f не имеет локальных экстремумов, так как она строго монотонна на бесконечном промежутке.

8° Функция f биективна.

9° Функция f обратима. Обратной функцией к f является $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x^{2n+1}$.

10° График функции
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$:



5° Функция g строго возрастает на множестве $\mathbb{R}_+$.

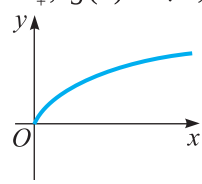
6° Функция g не является периодической.

7° Функция g не имеет локальных экстремумов.

8° Функция g биективна.

9° Функция g обратима. Обратной функцией к g является $g^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g^{-1}(x) = x^{2n}$.

10° График функции
$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$:



3.2. Степенная функция с действительным показателем

Определение. **Степенной функцией с действительным показателем** называется функция вида $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

Основные свойства степенной функции

1° Областью определения степенной функции f является $\mathbb{R}_+^*$, поскольку степень с действительным показателем рассматривается только для положительного основания.

2° Из свойств степени следует, что на $\mathbb{R}_+^*$ функция f строго возрастает при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$.

3° Функция f не является ни четной, ни нечетной.

4° Функция f не является периодической и не имеет точек локального экстремума, поскольку она монотонна на $D(f)$.

5° График степенной функции строится в зависимости от значений показателя степени. Возможны следующие виды графиков степенной функции (рис. 7.5):

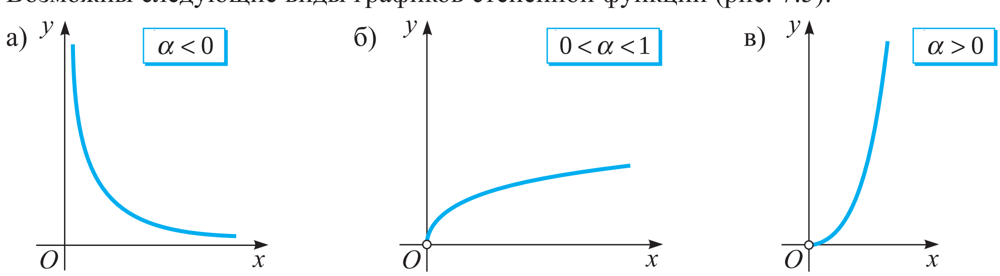


Рис. 7.5

Замечание. Функции, заданные формулами $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ и $g(x)=\sqrt[n]{x}$, где n – нечетное натуральное число, различны, потому что различны их области определения: $D(f)=\mathbb{R}_+^*$, а $D(g)=\mathbb{R}$.

Упражнения и задачи

А

1. Найдите область определения функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{x-3}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$.

2. Постройте график функции:

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5$; б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[5]{x}$.

3. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^4$; б) $f(x)=x^5$.

Б

4. Найдите сумму и произведение функций $f,g: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^4,\ g(x)=x^5$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\sqrt[4]{x}$.

5. Найдите область определения и множество значений функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{1-x}$; в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+4}}$.

6. Пользуясь определением монотонности, найдите промежутки монотонности функции $f: D\to\mathbb{R}$: а) $f(x)=x^2+2$; б) $f(x)=(x+2)^2$; в) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+4$; г) $f(x)=(x+4)^{\frac{1}{3}}$.

7. Докажите, что функция $f: D\to E$ обратима, и найдите соответствующую ей обратную функцию:

а) $f:\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^4$; б) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{4x}$; в) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}$.

8*. Найдите сумму, произведение и композицию $f\circ g$ функций $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=x^3$; б) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt[3]{x}$.

3.3. Иррациональные уравнения

Задача. У фермера два участка земли квадратной формы. Площадь одного из них на 32 сотки меньше другого. Найдите площадь каждого участка, если известно, что общая длина ограды равна 320 м.

Решение:

Пусть x м^2 – площадь первого участка, тогда $(x-3200)$ м^2 – площадь второго участка. Согласно условию задачи, получаем уравнение $4\sqrt{x}+4\sqrt{x-3200}=320$. Это уравнение называется иррациональным.

Назовем ***иррациональным уравнением*** такое уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком корня или в основании степени с рациональным показателем.

Например $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+1}=2,\ x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+3=0$ являются иррациональными уравнениями.

Отметим, что при решении иррациональных уравнений в результате некоторых преобразований возможно появление посторонних решений. Это может быть обусловлено тем, что, например, для любого $k\in\mathbb{N}^*$, $f^{2k}(x)=g^{2k}(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.$ Поэтому для исходного уравнения $f(x)=g(x)$ можем получить и посторонние решения, а именно решения уравнения $f(x)=-g(x)$.

Итак, в результате возведения обеих частей уравнения $f(x)=g(x)$ в четную натуральную степень можем получить посторонние решения.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{4-x}=-x-2$.

Решение:

Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем $4-x=x^2+4x+4\Leftrightarrow x^2+5x=0$. Находим, $x_1=-5,\ x_2=0$. Проверкой в исходном уравнении убеждаемся, что -5 является решением, а 0 не является решением данного уравнения (это решение уравнения $\sqrt{4-x}=x+2$).

Напомним, если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ одного знака при любом $x\in$ ОДЗ, то для всех $n\in\mathbb{N}^*$ уравнения $f(x)=g(x)$ и $(f(x))^n=(g(x))^n$ равносильны на ОДЗ.

Решение иррациональных уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 3. Для любого $n\in\mathbb{N}^*$ уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases}f(x)=(g(x))^{2n},\\ g(x)\ge 0,\end{cases}$

а уравнение $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)=(g(x))^{2n+1}$.

Задание. Докажите теорему 3.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{1-x^2}=x+1$.

Решение:

$$\sqrt{1-x^2}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\ 1-x^2=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\{-1,\ 0\}$.

Отметим, что уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$ имеют одну и ту же ОДЗ. Поэтому, решив заданное уравнение методом возведения обеих частей в четную натуральную степень и убедившись затем, что найденное решение x_0 принадлежит его ОДЗ, мы еще не можем утверждать, что x_0 является решением заданного уравнения. Однако, если $x_0\notin$ ОДЗ заданного уравнения, то x_0 является посторонним решением этого уравнения.

Посторонние решения также могут появляться в результате выполнения некоторых подстановок.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$ (1).

Решение:

Возведем в куб обе части уравнения (1) и получим уравнение

$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\,(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})=-(x+1)$ (2), равносильное заданному.

Учитывая уравнение (1), заменим в (2) выражение из скобок выражением $\sqrt[3]{x-1}$ и получим $\sqrt[3]{(x+1)(x-1)(3x+1)}=-(x+1)$ (3). Возведем обе части уравнения (3) в куб и получим уравнение $(x+1)(3x+1)(x-1)+(x+1)^3=0$, имеющее решения $x_1=-1$, $x_2=0$.

При подстановке найденных значений x в заданном уравнении убеждаемся, что его решением является только -1.

Ответ: $S=\{-1\}$.

При возведении обеих частей уравнения (1) в куб получили уравнение (2), равносильное заданному. Однако последующая замена выражения $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ на выражение $\sqrt[3]{x-1}$ привела к появлению постороннего решения.

Замечание. ***Проверка*** является необходимой частью решения иррационального уравнения, кроме случаев, когда все уравнения, полученные в процессе решения, являются равносильными заданному на ОДЗ исходного уравнения.

Один из общих методов решения иррациональных уравнений состоит в сведении их к уравнениям (системам, содержащим как уравнения, так и неравенства) без радикалов, равносильным заданному иррациональному уравнению. При применении этого метода проверка не обязательна.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{2x+3}=x$.

Решение:

$$\sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $S=\{3\}$.

Иногда применение этого метода усложняет процесс решения, поэтому в таких случаях используют другие методы (теорему 3 или ниже рассмотренные методы).

Если нахождение ОДЗ или решение неравенства $g(x)\ge 0$ сложнее, чем само решение иррационального уравнения, то не нужно находить ОДЗ и решать неравенство $g(x)\ge 0$, а только проверить, удовлетворяют ли полученные решения этим условиям.

Иногда нахождением ОДЗ завершается решение заданного уравнения.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x \le 2. \end{cases}$ Эта система неравенств не имеет решений, следовательно, и исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: $S=\varnothing$.

Рассмотрим некоторые методы, часто применяемые при решении иррациональных уравнений.

1 Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень

Как правило, этот метод используется при решении уравнений вида:

$$\sqrt[k]{f(x)}=g(x);\ \sqrt[k]{f(x)}\pm\sqrt[k]{g(x)}=h(x);\ \sqrt[k]{f(x)}\pm\sqrt[k]{g(x)}=\sqrt[k]{h(x)},\ k\in\mathbb{N},\ k\ge 2.$$

Мы уже применили этот метод при решении уравнения $\sqrt{2x+3}=x$ (см. стр. 124).

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$.

Решение:

Находим ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Уединяя один радикал и возведя обе части в квадрат, получим:

$$(\sqrt{x+1})^2=(8-\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow x+32=8\sqrt{3x+1}.$$

После возведения в квадрат обеих частей последнего уравнения получим квадратное уравнение $x^2-128x+960=0$, имеющее решения $x_1=8$, $x_2=120$.

Выполним проверку, так как преобразования не были равносильными. Значения $x_1, x_2 \in$ ОДЗ. Значит, оба значения могут быть решениями исходного уравнения. Подстановкой в заданном уравнении убеждаемся, что 8 является решением исходного уравнения, а 120 таковым не является.

Ответ: $S=\{8\}$.

2 Решение уравнений вида $f(x)\sqrt[2k]{g(x)}=0,\ k\in\mathbb{N}^*$

На ОДЗ это уравнение равносильно системе $\begin{cases} g(x) \ge 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right. \end{cases}$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $(x^2-4x+3)\sqrt{4-x^2}=0$.

Решение:

$(x^2-4x+3)\sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ 4-x^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$ *Ответ*: $S=\{-2, 1, 2\}$.

3 Метод введения вспомогательных неизвестных

а) *Использование одного вспомогательного неизвестного*

Этим методом некоторые иррациональные уравнения сводятся к уравнениям без радикалов.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

Решение:

ОДЗ: $x^2+5x+1\geq 0$.

На ОДЗ: $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2 \Leftrightarrow 3(x^2+5x+1)+2\sqrt{x^2+5x+1}-5=0$.

Пусть $\sqrt{x^2+5x+1}=t\geq 0$. Получим уравнение $3t^2+2t-5=0$, имеющее решения $t_1=1,\ t_2=-\frac{5}{3}$. Так как $t_2=-\frac{5}{3}<0$, то решаем только уравнение $\sqrt{x^2+5x+1}=1$, которое имеет решения $x_1=0,\ x_2=-5$.

Проверка не обязательна, поскольку выполненные преобразования являются равносильными.

Ответ: $S=\{-5,\ 0\}$.

б) *Использование двух вспомогательных неизвестных*

При решении некоторых иррациональных уравнений удобнее использовать два вспомогательных неизвестных. Этот метод позволяет свести иррациональное уравнение к системе уравнений, не содержащих радикалы.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}77+x\geq 0\\ 20-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow\ x\in[-77,\ 20]$.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{77+x}=u,\\ \sqrt[4]{20-x}=v.\end{cases}$ (4). Тогда исходное уравнение записывается в виде $u+v=5$.

Чтобы получить еще одно уравнение с неизвестными u и v, возведем в четвертую степень обе части уравнений системы (4). Получим систему $\begin{cases}77+x=u^4,\\ 20-x=v^4,\end{cases}$ откуда $u^4+v^4=97$.

Итак, получили систему уравнений $\begin{cases}u+v=5,\\ u^4+v^4=97.\end{cases}$ Применяя преобразования $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2$, получим решения системы $\begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases}$ или $\begin{cases}u=3,\\ v=2.\end{cases}$ (Проверьте!)

Для нахождения решений исходного уравнения решим системы:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{77+x}=2,\\ \sqrt[4]{20-x}=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt[4]{77+x}=3,\\ \sqrt[4]{20-x}=2.\end{cases}$$

Первая система имеет решение –61, а вторая – решение 4.

Проверкой устанавливаем, что оба значения являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $S=\{-61, 4\}$.

Замечание. Этот метод может быть применен при решении уравнений, содержащих два радикала.

4 Решение уравнений вида $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x),\ k\in\mathbb{N}^*$

Для любых $k\in\mathbb{N}^*$ это уравнение (согласно теореме 3) равносильно уравнению $f(x)=(g(x))^{2k+1}$.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt[3]{x^3+x^2+x-12}=x$.

Решение:

$\sqrt[3]{x^3+x^2+x-12}=x \Leftrightarrow x^3+x^2+x-12=x^3 \Leftrightarrow x^2+x-12=0$, откуда $x_1=-4,\ x_2=3$.

Ответ: $S=\{-4, 3\}$.

5 Специальные методы решения иррациональных уравнений

а) ***Метод умножения обеих частей уравнения на сопряженное выражение***

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$ (5).

Решение:

Умножив обе части уравнения (5) на выражение $\varphi(x)=\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}$, получим:

$$x^2-3x+3-x^2+3x-6=3(\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}=-1. \qquad (6)$$

Сложив уравнения (5) и (6), придем к уравнению $\sqrt{x^2-3x+3}=1$.

Значит, $x^2-3x+3=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, откуда $x_1=1,\ x_2=2$.

Подставив значения 1 и 2 в исходное уравнение, убеждаемся в том, что оба значения являются его решениями.

Ответ: $S=\{1, 2\}$.

Замечание. Как правило, этот метод применяется при решении иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=h(x)$.

б) ***Метод выделения полного квадрата (куба и т. д.) в подкоренных выражениях***

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

Решение:

Имеем ОДЗ: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\in[1,+\infty)$, так как замечаем, что $x+2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}+1)^2$, $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2$.

Выполнив равносильные на ОДЗ преобразования, получим:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=x-1 \Leftrightarrow$$
$$|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=x-1.$$

Пусть $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0.$ Тогда получим уравнение $t+1+|t-1|=t^2.$

Решив это уравнение известными методами (учитывая, что $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0,$ а также ОДЗ), получим решение исходного уравнения: $x=5.$

Ответ: $S=\{5\}.$

Замечание. Как правило, решение иррационального уравнения может быть найдено несколькими методами. Опыт подскажет, какой из них более эффективен для заданного уравнения.

Упражнения и задачи

А

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x+1}=x-5;$ б) $\sqrt{x-1}-x=-7;$ в) $\sqrt{x+1}=2x+1;$

г) $\sqrt{x^2-3x+4}-x=2;$ д) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1;$ е) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1.$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(1-x^2)\sqrt{2x-5}=0;$ б) $(3x^2-x-2)\sqrt{1-4x}=0;$

в) $(1-3x)\sqrt{x^2-2x+1}=0;$ г) $(x^2-5x+6)\sqrt{2x^2-x-3}=0.$

3. Впишите действительное число, затем решите на множестве $\mathbb{R}$ полученное уравнение:

а) $\sqrt{1-2x}=\square\cdot x+1;$ б) $\sqrt{\square\cdot x+2}=1-3x;$ в) $\sqrt{0{,}5x-\square}=x+2.$

4. Определите истинностное значение высказывания $\sqrt[3]{x^2}=1 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}=1.$

Б

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x}=x+1;$ б) $\sqrt{x+3}=x-1;$ в) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x;$ г) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2;$

д) соответствующее задаче, сформулированной в начале п. 3.3, а затем ответьте на вопрос задачи.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1};$ б) $\sqrt{x+6}=\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5};$

в) $\sqrt[3]{x-5}=x+1;$ г) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(x^3-1)\sqrt{x^2-7x+12}=0;$ б) $(2x^2-x-1)\sqrt{x^2-64}=0.$

8. Используя вспомогательное неизвестное, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x;$ б) $x-5\sqrt{x}+6=0;$ в) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+1=0;$

г) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}=1;$ д) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

9. Методом умножения обеих частей уравнения на соответствующее сопряженное выражение решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x^2-2x-4}+\sqrt{x^2+3x-1}=4$; б) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

10. Используя два вспомогательных неизвестных, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$; б) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$; в) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.

11*. Применяя наиболее эффективный метод, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$; б) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$; г) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

д) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$; е) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

12*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\cdot\sqrt[n]{x^2-1}$; б) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$.

13. Составьте иррациональное уравнение, которое:

а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения;

г) имеет множеством решений промежуток вида $[a, b]$;

д) имеет множеством решений промежуток вида $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, a)$).

14. Составьте иррациональное уравнение, решениями которого являются числа 4 и –1.

15*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\cdot\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\cdot\sqrt[3]{a^2-x^2}$; б) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

3.4. Иррациональные неравенства

Задача. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x-3\sqrt{x}-4\leq 0$.

Это неравенство является иррациональным.

Будем называть ***иррациональным неравенством*** такое неравенство, в котором неизвестное содержится под знаком корня или в основании степени с рациональным показателем.

Например, $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}-2\geq 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<1$ – иррациональные неравенства.

Иррациональные неравенства решаются с использованием приемов и методов, аналогичных применяемым при решении иррациональных уравнений.

Замечание. При решении иррациональных неравенств будем выполнять равносильные преобразования, учитывая следующие утверждения:

I Если n – нечетное натуральное число, то неравенство $f(x)<g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n<(g(x))^n$.

II Если функции f и g неотрицательны на множестве M и n – ненулевое натуральное число, то неравенство $f(x)<g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n<(g(x))^n$ на множестве M.

III Если функции f и g отрицательны на множестве M и n, $n\in\mathbb{N}^*$, – четное число, то неравенство $f(x)<g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n>(g(x))^n$ на множестве M.

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов иррациональных неравенств.

1 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Учитывая свойства корней (радикалов) и неравенств, имеем:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

2 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Используя свойства корней и неравенств, получаем:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Замечание. Из второй системы исключено неравенство $f(x) \geq 0$, так как оно следует из третьего неравенства этой системы.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{3x+1} > 2x$.

Решение:

$$\sqrt{3x+1} > 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x < 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 3x+1 > 4x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \\ x \in [0, 1) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right).$$

Ответ: $S = \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$.

3 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

На основании свойств радикалов и неравенств делаем вывод, что

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{3}x$.

Решение:

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x^2 \leq 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Ответ: $S = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Замечание. В некоторых случаях удобнее решать смешанную совокупность $\left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}=g(x),\\ \sqrt{f(x)}<g(x),\end{array}\right.$ равносильную исходному неравенству.

4 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

Учитывая свойства корней и неравенств, получаем:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq 0\\ g(x)<0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)\geq g^2(x)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq 0,\\ g(x)<0;\end{cases}\\ \begin{cases} g(x)\geq 0,\\ f(x)\geq g^2(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Замечание. В некоторых случаях удобнее решать смешанную совокупность $\left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}=g(x),\\ \sqrt{f(x)}>g(x),\end{array}\right.$ равносильную исходному неравенству.

При решении иррациональных неравенств будем использовать те же методы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в натуральную степень, применение вспомогательных неизвестных, выделение полного квадрата (куба) в подкоренных выражениях и др.

Примеры

1 Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}\geq 1.$

Решение:

ОДЗ: $x\in[2, +\infty)$. Заданное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2x+1}\geq 1+\sqrt{x-2}.$ Обе части этого неравенства неотрицательны на ОДЗ. Значит, возведем в квадрат и получим равносильное неравенство $2\sqrt{x-2}\leq x+2.$

Имеем $2\sqrt{x-2}\leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0\\ x+2\geq 0\\ 4(x-2)\leq (x+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2\\ x^2+12\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in[2, +\infty).$

Учитывая ОДЗ, получим решения исходного неравенства.

Ответ: $S=[2, +\infty)$.

2 Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}>-1.$

Решение:

ОДЗ: $x\in[2, +\infty)$. Пусть $\sqrt{x-2}=t,\ t\geq 0,$ тогда $x=t^2+2.$ Получаем неравенство

$$\sqrt{t^2-4t+4}-\sqrt{t^2-6t+9}>-1 \Leftrightarrow |t-2|-|t-3|>-1.$$

Неравенство $|t-2|-|t-3|>-1$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} t<2,\\ -(t-2)+(t-3)>-1;\end{cases} \quad \begin{cases} 2\leq t<3,\\ (t-2)+(t-3)>-1;\end{cases} \quad \begin{cases} t\geq 3,\\ (t-2)-(t-3)>-1.\end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решения $t\in(2,3)$, а третья – $t\in[3,+\infty)$.

Возвращаясь к неизвестному x и учитывая ОДЗ, получаем систему $\begin{cases}\sqrt{x-2}>2,\\ x\geq 2.\end{cases}$

Решениями этой системы, а также исходного неравенства являются $x\in(6,+\infty)$.

Ответ: $S=(6,+\infty)$.

Упражнения и задачи

Б

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

1. а) $\sqrt{2x+3}>1$; б) $\sqrt{1-x}\leq 2$; в) $\sqrt{x^2-3x}\leq -3$;
г) $\sqrt{x^2-3x+2}\geq -5$; д) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{1-2x}}\leq 1$; е) $\sqrt[3]{x+2}>-2$.

2. а) $\sqrt{2x+10}>3x-5$; б) $\sqrt{x^2-4x}<x-3$; в) $\sqrt{x^2-5x+6}\geq x+4$;
г) $\sqrt{(x-4)(x+1)}\leq 3(x+1)$; д) $\sqrt[3]{x^3-2x}\geq x$; е) $\sqrt[3]{1+x^3}\leq 2+x$.

3. а) $\dfrac{3x^2-5x+8}{\sqrt{x^2-9}}\geq 0$; б) $\dfrac{(x-1)\sqrt{x-8}}{x^2-16}\geq 0$; в) $(x^2-3x)\sqrt[3]{1-x}\leq 0$.

4. а) $\sqrt{x+3}\leq 2+\sqrt{x-4}$; б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{3x}}>2$;
в) $(x-4)\sqrt{x^2-3}\leq x^2-16$; г) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}\leq\sqrt{2x+4}$.

5. а) $\dfrac{\sqrt{5-20x-x^2}}{x}\geq 1$; б) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2-x}<2$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}<\dfrac{1}{1-x}$.

6. а) $\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt{4x^2-4x+1}\leq 2$; б) $2+x-3\sqrt{x^2-6x+9}>x^2$;
в) $|t-1|+\sqrt{9t^2+6t+1}\leq 2t$; г) $|1-\sqrt[3]{x-2}|-|\sqrt[3]{x+1}-3|\leq 2$.

7. а) $x^2+\sqrt{x^2+11}>31$; б) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+1}}-\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-x}}\geq\dfrac{7}{12}$; в) $\sqrt{x^2-3x+5}\geq 3x+7-x^2$.

8*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство, где a – действительный параметр:
а) $x+4a>5\sqrt{ax}$; б) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2}$; в) $\sqrt{1-x^2}\geq 2x+a$.

9. Впишите действительное число, затем решите на множестве $\mathbb{R}$ полученное неравенство:
а) $\sqrt{\boxed{}\cdot x+4}\geq x$; б) $\sqrt{x^2-3x-4}<\boxed{}\cdot x+1$; в) $\sqrt{3x^2-x-2}>\sqrt{3}\cdot x+\boxed{}$.

10. Решите неравенство, предложенное в начале п. 3.4.

11. Составьте иррациональное неравенство, которое на множестве $\mathbb{R}$:
а) имеет одно решение; б) имеет два решения;
в) не имеет решений; г) имеет множеством решений промежуток вида (a, b).

3.5. Системы и совокупности иррациональных уравнений

При решении систем (совокупностей) иррациональных уравнений следует применять как общие методы решения систем алгебраических уравнений (метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения вспомогательных неизвестных и др.), так и соответствующие методы решения иррациональных уравнений.

Рассмотрим несколько примеров систем и совокупностей иррациональных уравнений.

Задания с решением

1. Решим на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+7} = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ y+7 \geq 0. \end{cases}$ Подставим $x = 1 + y$ в первое уравнение и получим иррациональное уравнение $\sqrt{y} + \sqrt{y+7} = 3$, имеющее решение $y = \frac{1}{9}$. (Проверьте!) Тогда $x = \frac{10}{9}$.

Проверка. Пара чисел $\left(\frac{10}{9}, \frac{1}{9}\right)$ принадлежит ОДЗ. Подставив эти значения в заданную систему, убеждаемся, что пара чисел $\left(\frac{10}{9}, \frac{1}{9}\right)$ является решением исходной системы.

Ответ: $S = \left\{\left(\frac{10}{9}, \frac{1}{9}\right)\right\}$.

2. Решим на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему $\begin{cases} \sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y} = 10, \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 121. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0, \\ x^2 - y^2 \geq 0. \end{cases}$ Заметим, что на ОДЗ имеем $\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}$.

Применим метод введения вспомогательных неизвестных.

Пусть $\begin{cases} \sqrt[4]{x-y} = u, \\ \sqrt[4]{x+y} = v, \end{cases}$ $u \geq 0, v \geq 0$. Получаем: $\begin{cases} u - v = 10 \\ (u \cdot v)^2 = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u - v = 10, \\ uv = 11; \end{cases} \\ \begin{cases} u - v = 10, \\ uv = -11. \end{cases} \end{array}\right.$

Учитывая, что $u \geq 0$, $v \geq 0$, получаем $u = 11$, $v = 1$.

Итак, решение исходной системы свелось к решению системы простых иррациональных уравнений: $\begin{cases} \sqrt[4]{x-y} = 11 \\ \sqrt[4]{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 14641 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7321, \\ y = -7320. \end{cases}$

Проверка не обязательна, так как выполненные преобразования равносильны.

Ответ: $S = \{(7321, -7320)\}$.

3. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x^2 \cdot \sqrt{2x^2-1} - 2x = x^2 - 2x\sqrt{2x^2-1}$.

Решение:

ОДЗ: $2x^2 - 1 \geq 0$. Применим метод разложения на множители и запишем исходное уравнение в виде $(\sqrt{2x^2-1}-1)(x^2+2x)=0$. Решение этого уравнения сводится к решению на ОДЗ совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-1}-1=0,\\ x^2+2x=0.\end{array}\right.$

Первое уравнение имеет решения $x_1=-1,\ x_2=1,$ а второе уравнение имеет решения $x_3=0,\ \ x_4=-2$. Выполнив проверку с учетом ОДЗ, убеждаемся, что только значения $-2,\ -1,\ 1$ являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $S=\{-2,-1,1\}$.

Упражнения и задачи

Б

1. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3,\\ 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\\ x-2y=-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}=\sqrt{x+y}+1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1=0,\\ 2x+y=5;\end{cases}$ д) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ xy=27;\end{cases}$ е) $\begin{cases}4(\sqrt{x}+\sqrt{y})-6\sqrt{xy}=0,\\ x+y=5.\end{cases}$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=14,\\ x^2+y^2+xy=84;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ совокупность уравнений:

а) $\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2,\\ \sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x};\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2+\sqrt{x^2-16}=18,\\ (x^2-9)\sqrt{x+1}=0.\end{array}\right.$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}-2\sqrt{x+1}=3\sqrt{x}$; б) $(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-16x+2}-x+1)=0$.

5. Составьте систему иррациональных уравнений, которая:

а) имеет одно решение; б) имеет два решения;
в) не имеет решений; г) имеет бесконечное множество решений.

6. Составьте систему иррациональных уравнений, решением которой является пара чисел $(-2,0)$.

7. Составьте иррациональное уравнение, решение которого сводится к решению совокупности иррациональных уравнений.

8*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему уравнений, где a – действительный параметр:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4a,\\ x-y=8a^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=a+\sqrt{y},\\ x^2+2x-y^2-4y-3=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=a^2,\\ x+\sqrt{xy}+y=a.\end{cases}$

3.6. Системы и совокупности иррациональных неравенств с одним неизвестным

Идея состоит в сведении решения систем (совокупностей) иррациональных неравенств к решению систем (совокупностей) неравенств, не содержащих радикалы.

Системы иррациональных неравенств

Рассмотрим два примера систем иррациональных неравенств.

Примеры

1 Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases}\sqrt{x+1}>1,\\ \sqrt{3x-2}<x.\end{cases}$

Решение:

Эта система равносильна следующей системе алгебраических неравенств:

$$\begin{cases}x+1>1\\ x>0\\ 3x-2\geq 0\\ 3x-2<x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{2}{3},\\ x^2-3x+2>0.\end{cases}$$

(Проверьте!)

Решив последнюю систему, получаем решения $x\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)\cup(2,+\infty)$, являющиеся и решениями исходной системы.

Ответ: $S=\left[\dfrac{2}{3},1\right)\cup(2,+\infty)$.

2 Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases}x^2-4+2\sqrt{x^2-1}\leq 0,\\ (3x+1)\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}\geq 0.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}x^2-1\geq 0,\\ \dfrac{x-1}{2-x}\geq 0.\end{cases}$ Решив эту систему, получим ОДЗ исходной системы: $x\in[1,2)$.

Совокупности иррациональных неравенств

Рассмотрим два примера совокупностей иррациональных неравенств.

Примеры

1 Решим на множестве $\mathbb{R}$ совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}x-4\sqrt{x}+3\leq 0,\\ \sqrt{3x+1}\geq x+1.\end{array}\right.$

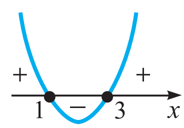
Решение:

Решаем первое неравенство.

Для него имеем ОДЗ: $x\in[0,+\infty)$.

Пусть $\sqrt{x}=t$, $t\geq 0$.

Получаем алгебраическое неравенство $t^2-4t+3\leq 0$, имеющее решения $t\in[1,3]$, или $1\leq t\leq 3$.

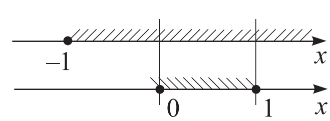


Возвращаясь к неизвестному x, получаем $1\leq\sqrt{x}\leq 3\Leftrightarrow 1\leq x\leq 9$. Учитывая ОДЗ первого неравенства, получаем его решения $x\in[1,9]$ (9).

Второе неравенство равносильно совокупности систем алгебраических неравенств: $\begin{cases}x+1<0,\\ 3x+1\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+1\geq 0,\\ 3x+1\geq(x+1)^2.\end{cases}$

Первая система не имеет решений. (Проверьте!) Для второй системы имеем:

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ x^2-x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,1]\quad(10).$$



Объединение множеств решений неравенств исходной совокупности, то есть

Решаем на ОДЗ первое неравенство системы.

Пусть $\sqrt{x^2-1}=t,\ t\ge 0$. Получаем неравенство $t^2+2t-3\le 0$, имеющее решения $t\in[-3,1]$. Так как $t\ge 0$, получим решения $t\in[0,1]$, откуда $0\le\sqrt{x^2-1}\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1\ge 0,\\ x^2-1\le 1.\end{cases}$ Эта система имеет решения: $x\in[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.

Учитывая ОДЗ, получим решения первого неравенства системы:

$$x\in[1,\sqrt{2}].\qquad (7)$$

Второе неравенство на ОДЗ равносильно совокупности $\left[\begin{aligned}&(3x+1)\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}=0,\\ &(3x+1)\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}>0.\end{aligned}\right.$

Уравнение совокупности имеет решение $x = 1$, а неравенство – решения $x\in(1,2)$.

Значит, совокупность имеет решения

$$x\in[1,2).\qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что исходная система имеет решения $x\in[1,\sqrt{2})$.

Ответ: $S=[1,\sqrt{2})$.

объединение множеств (9) и (10), является решением этой совокупности: [0, 9].

Ответ: $S=[0,9]$.

2 Решим на множестве $\mathbb{R}$ совокупность неравенств $\left[\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\ge 0,\\ &\sqrt{9x^2-18x+9}<x+3.\end{aligned}\right.$

Решение:

Для первого неравенства имеем:

$$\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x+3=0\\ x-1\ne 0\end{cases}\\ &\begin{cases}x+3>0\\ x-1>0\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in\{-3\}\cup(1,+\infty)\quad (11).$

Для второго неравенства получаем

$\sqrt{9x^2-18x+9}<x+3\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 3|x-1|<x+3\Leftrightarrow x\in(0,3)\quad (12).$

Из (11) и (12) следует, что решениями исходной совокупности являются:

$$x\in\{-3\}\cup(0,+\infty).$$

Ответ: $S=\{-3\}\cup(0,+\infty)$.

Замечание. Аналогично нужно поступать и в случае решения совокупности систем иррациональных неравенств.

Упражнения и задачи

Б

Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

1. а) $\begin{cases}\sqrt{x^2-6x+2}>3,\\ \sqrt{x-3}\ge 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<2,\\ \dfrac{x-1}{3x+2}\ge 0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\sqrt{x-3}>-5,\\ \sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}\le 1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{3+x}{\sqrt{x-2}}\le 0,\\ x-11\sqrt{x}+12\ge 0.\end{cases}$

2. а) $\begin{cases}\sqrt{4x^2-4x+1}-(x^2-2x-3)\le 2,\\ \sqrt{x-1}\le x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+1)\sqrt{x^2-4}\ge 0,\\ \sqrt[3]{2x^2-x}-\sqrt[3]{1-x}<0.\end{cases}$

3. Решите на множестве R совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{aligned}&\frac{x^2+2x+8}{\sqrt{3-x}}\ge 0,\\ &\sqrt{x+1}\le x;\end{aligned}\right.$ б) $\left[\begin{aligned}&2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}<1,\\ &3x^2-\sqrt{x^2+x}\ge -3x;\end{aligned}\right.$ в) $\left[\begin{aligned}&3x\sqrt{x+1}>0,\\ &\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x+1}}\le 1.\end{aligned}\right.$

4. Составьте:

а) систему иррациональных неравенств с одним неизвестным, множеством решений которой является промежуток $(-1,\ 2)$;

б) совокупность иррациональных неравенств с одним неизвестным, множеством решений которой является промежуток $(-1,\ 2)$.

5. Составьте систему иррациональных неравенств, которая:

а) имеет одно решение; б) имеет два решения;

в) имеет множеством решений промежуток вида $[a,\ b]$; г) не имеет решений.

Проверочная работа I

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 - x + 3$.

а) Найдите нули функции f. **1**

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(x) \geq 0$. **1**

в) Определите аналитически координаты точек пересечения графиков G_f и G_g, если $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 3$. **2**

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\left|7\frac{1}{4} - 3{,}2x\right| \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 0$. **3**

3. Двое рабочих выполнили вместе заказ за 12 ч. Если бы сначала первый рабочий выполнил половину заказа, а затем другой – вторую половину, то заказ был бы выполнен за 25 ч. За какое время могли бы выполнить этот заказ каждый из рабочих в отдельности? **3**

Б

1. Дано неравенство $\sqrt{5-2x} + 1 \leq \frac{6}{\sqrt{5-2x}}$.

а) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство. **2**

б) Найдите целые решения этого неравенства. **1**

в) Запишите функцию f II степени, нули которой являются целыми решениями неравенства. **1**

г) Определите промежутки монотонности функции f. **1**

2. Дан многочлен $P(X) = X^2 - (a-3)X + a$.

а) При каких действительных значениях a многочлен $P(X)$ имеет хотя бы один корень? **2**

б) Найдите сумму квадратов корней многочлена $P(X)$. **1**

в) Определите наименьшее значение суммы квадратов корней многочлена $P(X)$. **1**

г) При каких значениях a многочлен $P(X)$ имеет два положительных корня? **1**

§4 Показательная функция. Показательные уравнения. Показательные неравенства

4.1. Показательная функция

Во время цепной ядерной реакции вместо каждого свободного нейтрона через l секунд возникают ν других свободных нейтронов. Величины l и ν зависят от вещества и среды, в которой происходит реакция. Было выявлено, что количество K свободных нейтронов в момент времени t оценивается по формуле $K = K_0 \cdot e^{(\nu-1)t/l}$, где K_0 – количество свободных нейтронов в момент времени $t_0 = 0$, e – постоянная. Функция вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = e^{\mu t}$, применяемая в этих расчетах, является показательной функцией.

Определение. **Показательной функцией** называется функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, где $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.

Например, $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, – показательные функции.

Замечание. Случай $a = 1$ исключаем из рассмотрения, так как получаем постоянную функцию $f(x) = 1$, свойства которой совершенно отличаются от свойств показательной функции.

Основные свойства показательной функции

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° $E(f) = \mathbb{R}_+^*$.

В самом деле, согласно свойствам степени с действительным показателем известно, что $a^x > 0$ для любого действительного x. Следовательно, $E(f) \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Справедливо и обратное включение.

3° Из свойства 2° следует, что показательная функция не имеет нулей. Ее график пересекает ось Oy в точке (0, 1), так как $a^0 = 1$ для всех $a > 0$.

4° В силу свойств сравнения степеней с одинаковым основанием и с произвольным действительным показателем (модуль 3, § 2) следует, что показательная функция строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, если $a > 1$, и строго убывает на $\mathbb{R}$, если $0 < a < 1$.

Замечание. В силу монотонности показательной функции верны следующие равносильности:

$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta \ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ a > 1),$$
$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1),$$
$$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1),$$

которые применяются при решении показательных уравнений и неравенств.

5° Показательная функция принимает положительные значения на множестве $\mathbb{R}$.

6° Показательная функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x)=a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ и существует x_0 такое, что $f(-x_0)\neq \pm f(x_0)$.

7° Показательная функция не является периодической, так как она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}$.

8° Показательная функция не имеет локальных экстремумов, поскольку она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}$.

9° Показательная функция сюръективна (свойство 2°) и инъективна (свойство 4°, замечание), значит, она биективна и обратима.

10° График показательной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, изображен на рисунке 7.6.

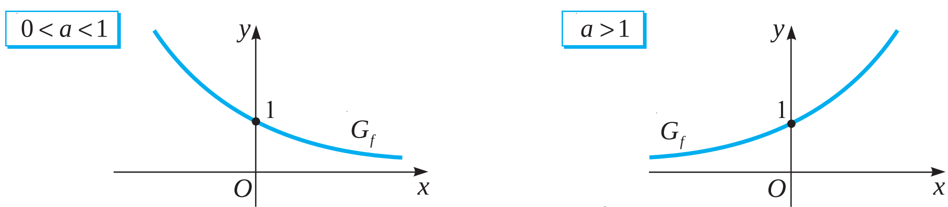


Рис. 7.6

Задание. На рисунке 7.7 изображены графики функций $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Используя эти графики, определите свойства функций f_1 и f_2.

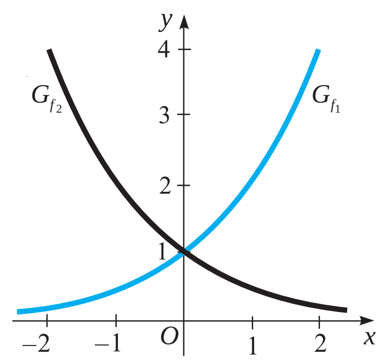


Рис. 7.7

Задания с решением

1. Сравним числа $5^{\sqrt{3}}$ и $5^{\sqrt{2,5}}$.

Решение:

Так как функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=5^x$, строго возрастает, а $\sqrt{3}>\sqrt{2,5}$, то $5^{\sqrt{3}}>5^{\sqrt{2,5}}$.

2. Сравним с 1: а) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$.

Решение:

а) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$ – это значение показательной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$, в точке $x_0=\sqrt{5}>0$. Так как основание этой функции меньше 1, то $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}<1$.

б) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$ – это значение показательной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=(\sqrt{2}-1)^x$, в точке $x_0=-\dfrac{3}{2}<0$.

Так как основание этой функции меньше 1, то $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}>1$.

4.2. Показательные уравнения

Задача. Ученик X класса 3 января 2012 г. положил на счет в банке один лей под 10% годовой прибыли. Через сколько лет он станет миллионером?

Решение:

Через 1 год на счету у ученика будет $1+0{,}1=1{,}1$ (лея), а через 2 года будет $1{,}1+0{,}11=1{,}21=1{,}1^2$ (лея) и т. д. Пусть x – соответствующее количество лет. Составляем уравнение: $1{,}1^x=1\,000\,000$.

Полученное уравнение является показательным уравнением.

Будем называть ***показательным уравнением*** такое уравнение, показателем степени которого является выражение, содержащее неизвестное, а основание степени – положительная постоянная, отличная от 1.

Например $2^x=8,\ 5\cdot 3^{2x-1}=5^{2x},\ 4^{2x}-4^x=20$ – показательные уравнения.

Решение показательных уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 4. Если $a>0$ и $a\neq 1$, то уравнения $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ и $f(x)=g(x)$ равносильны.

Задание. Докажите теорему 4.

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов показательных уравнений.

1 Показательные уравнения вида $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ a, b\in\mathbb{R}$

1) Пусть $f(x)=x$. Уравнение $a^x=b$ называется ***простейшим показательным уравнением***. Возможны следующие частные случаи.

а) $b\le 0$. Уравнение $a^x=b$ не имеет решений (см. график показательной функции – рисунок 7.6).

б) $b>0$ и $b=a^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$. Тогда $a^x=b\Leftrightarrow a^x=a^\alpha\Leftrightarrow x=\alpha$.

Пример. $5^x=25\Leftrightarrow 5^x=5^2\Leftrightarrow x=2$. *Ответ*: $S=\{2\}$.

в) $b>0$ и b не представлено в виде степени a. В этом случае применяем основное логарифмическое тождество $b=a^{\log_a b}$. На основании теоремы 4 получим:

$$a^x=b\Leftrightarrow a^x=a^{\log_a b}\Leftrightarrow x=\log_a b.$$

Пример. $3^x=12\Leftrightarrow 3^x=3^{\log_3 12}\Leftrightarrow x=\log_3 12$. *Ответ*: $S=\{\log_3 12\}$.

2) Аналогично поступаем при решении уравнений вида $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ a, b\in\mathbb{R}$.

2 Показательные уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1,\ a\in\mathbb{R}$, равносильны (согласно теореме 4) уравнению $f(x)=g(x)$.

Пример. $0{,}2^{x^3-1}=0{,}2^{x^2-1}\Leftrightarrow x^3-1=x^2-1\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0$.

Ответ: $S=\{0, 1\}$.

3 Показательные уравнения, решаемые методом разложения на множители

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $12^x+6^x-4^x-2^x=0$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Группируя слагаемые, получаем: $(12^x+6^x)-(4^x+2^x)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2^x\cdot6^x+6^x)-(2^{2x}+2^x)=0\Leftrightarrow 6^x(2^x+1)-2^x(2^x+1)=0\Leftrightarrow(2^x+1)(6^x-2^x)=0.$
Значит, $6^x-2^x=0$ или $2^x+1=0$, откуда $6^x=2^x$ или $2^x=-1$.

Решением уравнения $6^x=2^x$ является $x=0$, а второе уравнение не имеет решений.

Ответ: $S=\{0\}$.

4 Показательные уравнения вида $f(a^x)=0$ решаются ***методом введения вспомогательного неизвестного*** $a^x=t$, которым заданное уравнение приводят к уравнению вида $f(t)=0$.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $9^x-2\cdot3^x=3$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. $9^x-2\cdot3^x=3\Leftrightarrow(3^x)^2-2\cdot3^x-3=0$. Пусть $3^x=t,\ t>0$. Получаем уравнение $t^2-2t-3=0$, имеющее решения $t_1=3,\ t_2=-1$. Из них только $t_1=3>0$. Значит, решаем уравнение $3^x=3$ и получаем $x=1$.

Ответ: $S=\{1\}$.

Некоторые показательные уравнения, у которых основания степеней различны, а показатели соответствующих степеней равны, можно решать методом введения вспомогательного неизвестного после деления обеих частей уравнения на одну из этих степеней.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $8^x+18^x-2\cdot27^x=0$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Разделим обе части уравнения на 8^x и получим уравнение
$1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}=0.$ Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t,\ t>0.$ Тогда:
$2t^3-t^2-1=0\Leftrightarrow(t-1)(2t^2+t+1)=0\Leftrightarrow t=1.$ Значит, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1\Leftrightarrow x=0.$

Ответ: $S=\{0\}$.

5 Показательные уравнения, решаемые методом логарифмирования

Примеры

1. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $4^{2x-1}=3^x$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Логарифмируя это уравнение по основанию 10, получаем уравнение $(2x-1)\lg4=x\lg3$, равносильное исходному. Откуда $x=\dfrac{\lg4}{\lg16-\lg3}$.

Ответ: $S=\left\{\dfrac{\lg4}{\lg16-\lg3}\right\}$.

2 Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $3^{6^x}=4^{5^x}$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Логарифмируя это уравнение по основанию 10, получаем $6^x\lg 3=5^x\lg 4$.

Вновь логарифмируя, получаем: $x\lg 6+\lg\lg 3=x\lg 5+\lg\lg 4 \Leftrightarrow x=\dfrac{\lg\lg 4-\lg\lg 3}{\lg 6-\lg 5}$.

Ответ: $S=\left\{\dfrac{\lg\lg 4-\lg\lg 3}{\lg 6-\lg 5}\right\}$.

6 Некоторые показательные уравнения решаются с применением свойств функций, представляющих соответственно левую и правую части уравнения.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $5^x=-4x+1$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Подбором находим решение $x=0$. Так как функция f, заданная формулой $f(x)=5^x$, строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, а функция g, заданная формулой $g(x)=-4x+1$, строго убывает на множестве $\mathbb{R}$, то графики этих функций могут пересечься не более одного раза. Итак, уравнение имеет только одно решение: $x=0$.

Ответ: $S=\{0\}$.

7 Уравнения вида $a^{f(x)}\cdot b^{g(x)}=a^p\cdot b^q$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $5^x\cdot 2^{\frac{x+2}{x}}=40$.

Решение:

$$5^x\cdot 2^{\frac{x+2}{x}}=40 \Leftrightarrow \begin{cases}5^x\cdot 2^{\frac{x+2}{x}}=5\cdot 2^3\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5^{x-1}=2^{3-\frac{x+2}{x}}\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=\dfrac{2(x-1)}{x}\log_5 2\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=\log_5 4.\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\{1,\ \log_5 4\}$.

В общем случае имеем

$$a^{f(x)}\cdot b^{g(x)}=a^p\cdot b^q \Leftrightarrow a^{f(x)-p}=b^{q-g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in D_f\cap D_g,\\ f(x)-p=[q-g(x)]\log_a b.\end{cases}$$

8 Существуют уравнения, в которых **неизвестное содержится как в основании степени, так и в показателе степени**, то есть уравнения вида $h(x)^{f(x)}=h(x)^{g(x)}$.

Уравнение вида $h(x)^{f(x)}=h(x)^{g(x)}$, где $h(x)>0$, (показательно-степенное) равносильно совокупности систем $\begin{cases}h(x)>0,\\ h(x)\neq 1,\\ f(x)=g(x);\end{cases}$ $\begin{cases}h(x)=1,\\ x\in D(f)\cap D(g).\end{cases}$

Пример

Уравнение $(x+1)^{x^2-2}=(x+1)^x$ равносильно совокупности $\begin{cases}x+1>0,\\ x+1\neq 1,\\ x^2-2=x;\end{cases}$ $\begin{cases}x+1=1,\\ x\in\mathbb{R}.\end{cases}$

Ответ: $S=\{0,\ 2\}$.

Упражнения и задачи

А

1. Постройте график и определите свойства функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=4^x$; б) $f(x)=1{,}5^x$; в) $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$; г) $f(x)=4^{-x}$.

2. Определите значение a $(a\in(0,1)$ или $a>1)$, если известно, что:

а) $a^{\sqrt{2}}>a$; б) $a^{-0,5}<-a^{-\sqrt{2}}$; в) $a^{2,7}<a^{\sqrt{7}}$.

3. Сравните числа: а) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ и $(\sqrt{2})^{1,3}$; б) $(0{,}3)^{-\sqrt{3}}$ и $(0{,}3)^{-1,8}$.

4. Найдите значения x, при которых функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ принимает значения меньше 1, если:

а) $f(x)=(5\sqrt{5})^x$; б) $f(x)=(0{,}5)^x$; в) $f(x)=3^{-x}$.

Решите на множестве R уравнение:

5. а) $1{,}1^x=1000000$; б) $4^x=64$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$; г) $(0{,}2)^{-x}=\frac{1}{25}$;

д) $7^x=\sqrt[3]{49}$; е) $3^{2x+2}=-81$; ж) $11^{x+1}=121$; з) $0{,}2^{x^2+x}=0$.

6. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^4$; б) $12^{x+1}=15$; в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^{x-1}=\frac{125}{64}$.

7. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^{x^2-1}$; б) $(0{,}5)^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{4}$; в) $\sqrt[3]{4^{x+1}}\cdot 16=\sqrt{4^{x^2}}$.

8. а) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-2}=77$; б) $4^{x+3}-4\cdot 7^x+2\cdot 7^{x+1}=4^{x-1}$; в) $3^{x+2}+3\cdot 5^{x+4}=3^{x+6}-5^{x+3}$.

9. а) $9^x+3^x=272$; б) $16^x-4\cdot 4^x+3=0$; в) $2\cdot 2^x+3\cdot 2^{\frac{x}{2}}+1=0$.

Б

10. Постройте график и определите свойства функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=3^{|x|}$; б) $f(x)=|3^x|$; в) $f(x)=2^{|x|+1}$.

11. Выберите числа, которые больше, чем 1: $(\sqrt{2})^{-\sqrt{3}}$, $(\sqrt{3})^{0,1}$, $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$.

12. Сравните: а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{5}}$ с $\frac{9}{49}$; б) 3^{-4} с 2^{-3}.

13. При каких значениях x функции $f, g\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sqrt{2})^x$, $g(x)=(0{,}25)^{x-2}$, принимают равные значения?

14. При каких значениях x функция $f\colon D\to\mathbb{R}$ принимает значения больше, чем 1, если:

а) $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; б) $f(x)=2^{\frac{x}{2}}$.

Решите на множестве R уравнение:

15. а) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2}\cdot\left(\frac{25}{64}\right)^{x^2}=\frac{625}{65536}$; б) $(0{,}6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

16. а) $5^{2x}+35\cdot 7^x=35\cdot 5^{2x}+7^x$; б) $4^x-3^{x+1,5}+2^{2x-1}=3^{x+0,5}$.

17. а) $81^{x^2-1}-36\cdot 9^{x^2-3}+3=0$; б) $8^x-2^{x+1}-4=0$.

18. а) $(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}=4$; б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2}-\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x^2}=10$.

19. а) $4^x+10^x-2\cdot 25^x=0$; б) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$; в) $3\cdot\sqrt[x]{4}-4\cdot\sqrt[x]{10}+\sqrt[x]{25}=0$.

20. а) $4^{|x-3|}+4^{|x+1|}=4^x$; б) $|5^x-1|+|5^x-5|=2$; в) $|x-1|^{x^2-2x}=1$.

21. а) $3^x+4^x=5^x$; б) $2^x-3^{\frac{x}{2}}=7$; в) $\left(\frac{2}{5}\right)^x=-3x^2+2x-1$.

22. а) $|x-3|^{x^2-3x}=(x-3)^4$; б) $(x^2-x)\cdot 8^{\sqrt{2-x}}+12\cdot 8^{\sqrt{2-x}}=(x^2-x)\cdot 8^{\sqrt{2x}}+12\cdot 8^{\sqrt{2\cdot x}}$.

23. а) $6^{(x+3)\log_6 2}\cdot 2^{x^2-2x}=32$; б) $7^{(x-2)\log_7 3}\cdot 3^{x^2+3x}=27$; в) $3^x\cdot 7^{\frac{x+3}{x}}=1323$.

24. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:
а) $625^{|x+1|}-2\cdot 25^{|x+1|}+a=0$; б) $3\cdot 4^{x-2}+27-a=a\cdot 4^{x-2}$; в) $a\cdot 2^x+2^{-x}=5$.

25. Составьте показательное уравнение, решением которого является –3.

26. Составьте показательное уравнение, которое:
а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения.

4.3. Показательные неравенства

Задача. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2^{2x+2}<6^x+2\cdot 3^{2x+2}$.

Это неравенство является показательным неравенством.

Будем называть ***показательным неравенством*** неравенство, в котором показатель степени является выражением, содержащим неизвестное, а основание степени – положительная постоянная, отличная от 1.

Например, неравенства $3^x<9$, $9^x-2\cdot 3^x-8\le 0$ являются показательными.

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов показательных неравенств.

1 Показательные неравенства вида $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $a>0$, $a\ne 1$, $a\in\mathbb{R}$

Решение неравенств этого вида основано на теореме 5.

Теорема 5. Если $a>1$, то неравенство $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)<g(x)$.
Если $0<a<1$, то неравенство $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)>g(x)$.

Доказательство этой теоремы основано на свойстве 4° (п. 4.1) показательной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\ne 1$.

Примеры

1. Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2^{3x-1}<4$.

Решение:

$2^{3x-1}<4 \Leftrightarrow 2^{3x-1}<2^2 \Leftrightarrow 3x-1<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 1)$.

Ответ: $S=(-\infty, 1)$.

2. Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$.

Решение:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \Leftrightarrow x+2>-2x \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Ответ: $S=\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Аналогично решают неравенства вида:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a^{f(x)} \le a^{g(x)},\ a^{f(x)} \ge a^{g(x)}, \text{ где } a > 0,\ a \ne 1,\ a \in \mathbb{R}.$$

При применении тех же методов, что и при решении показательных уравнений, решение заданного показательного неравенства, как правило, сводится к решению более простого неравенства вида:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a^{f(x)} \le a^{g(x)},\ a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a^{f(x)} \ge a^{g(x)},\ a > 0,\ a \ne 1,\ a \in \mathbb{R}.$$

2 В некоторых случаях **неизвестное содержится как в основании степени, так и в показателе степени**, то есть неравенство имеет вид $h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$.

а) Неравенство $\boldsymbol{h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}}$ равносильно следующей совокупности систем

$$\begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

б) Неравенство $\boldsymbol{h(x)^{f(x)} \ge h(x)^{g(x)}}$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) \ge g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) \le g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

в) В некоторых случаях удобнее использовать равносильность:

$$h(x)^{f(x)} \ge h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}, \\ h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)}. \end{array}\right.$$

Аналогично поступаем и в случае знаков „>“, „≤“.

В настоящем учебнике решения таких неравенств рассматриваются только при условии, что $h(x) > 0$.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(x-1)^x \ge (x-1)^{2x+1}$, если $x - 1 > 0$.

Решение:

Имеем $h(x) = x - 1$, $f(x) = x$, $g(x) = 2x + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$.

$$(x-1)^x \ge (x-1)^{2x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x-1 < 1 \\ x \le 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 > 1 \\ x \ge 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1,\ 2) \\ x \in \varnothing \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (1,\ 2].$$

Ответ: $S = (1,\ 2]$.

Упражнения и задачи

Б

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

1. а) $6^{x-3} > 36$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+4} < \frac{1}{125}$; в) $5^{x^2+x} > 1$; г) $2^{x^2-x+8} > 0$;

д) $0{,}3^{x+5} < -4$; е) $2^x \cdot 5^x \le 0{,}01 \cdot (10^{x-2})^3$; ж) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+3}$.

2. а) $25^x - 5^x - 20 \le 0$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10$; в) $0{,}49^{x+1} - 5\cdot 0{,}7^{x+1} - 14 \ge 0$.

3. а) $1000\cdot 0{,}3^{\sqrt{x+1}-1} \ge 27$; б) $(\lg 4)^{2x-5} < (\log_4 10)^{2-x}$;
в) $3^{-x+2}\cdot 5^{-x+2} > 15\cdot(225^{2x-1})^3$; г) $0{,}6^{x-3} < 5\cdot 36^{3-x}$.

4. а) предложенное в начале п. 4.3; б) $\frac{1}{0{,}4^x+5} < \frac{1}{0{,}4^{x+1}-1}$; в) $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$;
г) $8^x + 18^x - 2\cdot 3^{3x} \le 0$; д) $2^{2x+1} - 5\cdot 2^x + 2 > 0$; е) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} \le 3^x - 9$;
ж) $\left(\frac{4}{7}\right)^{13x^2} \le \left(\frac{4}{7}\right)^{x^2+36} \le \left(\frac{49}{16}\right)^{-6x^2}$; з) $4^{\sqrt{x+1{,}5}} + 6^{\sqrt{x}} > 9^{\sqrt{x+1}}$; и) $64^x - 7\cdot 8^x + 12 \ge 0$.

5. а) $1 < 5^{|x^2-x|} < 25$; б) $|3^x - 2| - |3^x - 1| \ge |3^x + 1| - 5$; в) $6^{2|x|} - 2\cdot 18^{|x|} - 8\cdot 3^{2|x|} > 0$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $(2x^2 - 3x + 8)^{x^2-x-2} \ge 1$; б) $(3x-1)^{x^2-4} < (3x-1)^{3x}$; в) $|2x^2 - 7|^{|x|-1} \ge |2x^2 - 7|^{3|x-1|-1}$.

7. Составьте показательное неравенство, которое:
а) имеет одно решение;
б) имеет два решения;
в) имеет множество решений вида $[a, b]$;
г) имеет множество решений вида $(c, +\infty)$ или $(-\infty, d)$;
д) не имеет решений.

8. Составьте показательное неравенство, множеством решений которого является промежуток $(-3, 2]$.

9*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство, где a – действительный параметр:
а) $a^2 - 2\cdot 4^{x+1} - a\cdot 2^{x+1} > 0$; б) $\frac{a^x}{a^x - 1} > \frac{1 + a^{-x}}{1 + 2a^{-x}}$.

§5 Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения. Логарифмические неравенства

5.1. Логарифмическая функция

Известно, что показательная функция для $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ обратима. Обратная показательной функции называется *логарифмической функцией*. Другими словами, справедлива равносильность:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x,\ x > 0,\ a > 0,\ a \ne 1.$$

Определение. **Логарифмической функцией** называется функция $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, где $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \ne 1$.

Например, $f_1, f_2: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \log_3 x$, $f_2(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, являются логарифмическими функциями.

Большинство ***свойств логарифмической функции*** выводятся из свойств показательной функции с тем же основанием.

1° $D(f)=\mathbb{R}_+^*$, так как множество $D(f)$ совпадает с областью значений показательной функции.

2° $E(f)=\mathbb{R}$ – область определения показательной функции.

3° Логарифмическая функция принимает значение 0 только в точке $x_0=1$, так как $\log_a x=0 \Leftrightarrow x_0=1$. Ее график не пересекает ось Oy, поскольку $0\notin\mathbb{R}_+^*$.

4° Логарифмическая функция строго возрастает (убывает) на $\mathbb{R}_+^*$, если основание $a\in(1,+\infty)$ (соответственно $a\in(0,1)$).
Действительно, для $a>1$ и $x_1>x_2$, в силу основного логарифмического тождества (модуль 3, п. 3.1), имеем $a^{\log_a x_1}>a^{\log_a x_2}$.
Так как показательная функция строго возрастает (убывает) на $\mathbb{R}$, при $a>1$ $(0<a<1)$, то: $\log_a x_1>\log_a x_2$ $(\log_a x_1<\log_a x_2)$.

5° В силу монотонности следует, что при $a>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения для $x\in(1,+\infty)$ и отрицательные для $x\in(0,1)$.
Если $0<a<1$, то логарифмическая функция принимает положительные значения для $x\in(0,1)$ и отрицательные для $x\in(1,+\infty)$.
Действительно, для $a>1$, на основании монотонности, имеем:
$$\log_a x>0 \Leftrightarrow \log_a x>\log_a 1 \Leftrightarrow x>1.$$
Аналогично доказываются остальные случаи.

6° Так как множество $\mathbb{R}_+^*$ не симметрично относительно начала координат, то логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной.

7° Логарифмическая функция не является периодической, поскольку она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}_+^*$.

8° Логарифмическая функция не имеет локальных экстремумов, так как она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}_+^*$.

9° Логарифмическая функция биективна, значит, является обратимой. Обратная к логарифмической функции – это показательная функция с тем же основанием.

10° График логарифмической функции $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, изображен на рисунке 7.8.

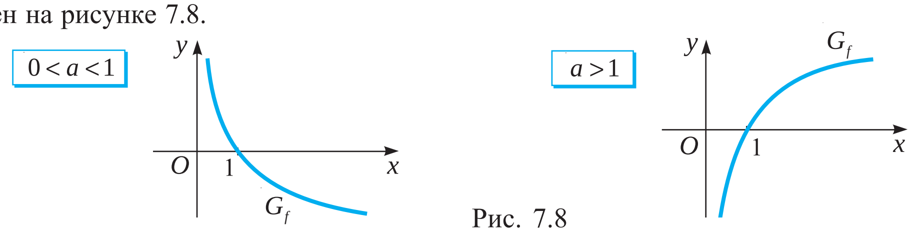


Рис. 7.8

Замечание. В силу монотонности логарифмической функции верны следующие равносильности (для $\alpha,\beta,a\in\mathbb{R}_+^*$, $a\neq 1$):
$$\log_a\alpha>\log_a\beta \Leftrightarrow \alpha>\beta,\ \ a>1,$$
$$\log_a\alpha>\log_a\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta,\ \ 0<a<1,$$
$$\log_a\alpha=\log_a\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta,$$
которые применяются при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Задание с решением

Даны функции $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f_1(x) = 2^x;\ f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$

а) Построим графики логарифмических функций:

$g_1\colon\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g_1(x) = f_1^{-1}(x) = \log_2 x,\ \ g_2\colon\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g_2(x) = f_2^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x).$

б) Построим в одной декартовой системе координат графики функций $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$.

Решение:

а) Составим таблицу значений для функций g_1 и g_2:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g_1(x) = \log_2 x$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$g_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	–1	–2	–3

Графики функций $g_1,\ g_2$ изображены на рисунке 7.9.

б) Графики функций $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$ изображены на рисунке 7.10.

Замечаем, что графики функций f_1 и g_1, f_2 и g_2 симметричны относительно биссектрисы I и III четвертей.

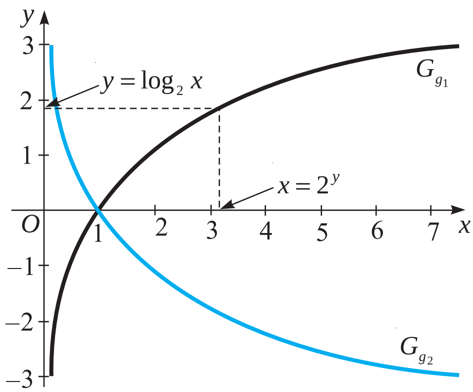


Рис. 7.9

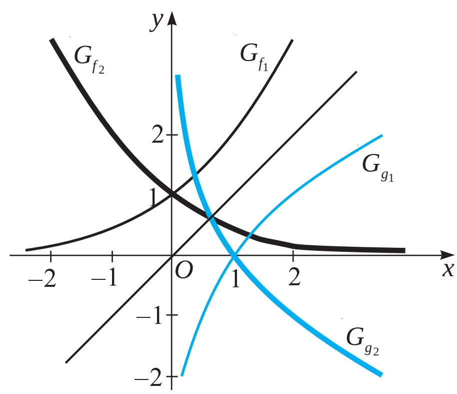


Рис. 7.10

Применение логарифмов и логарифмических функций в различных областях:

✓ *В химии*: при нахождении pH жидких веществ.

✓ *В сейсмологии*: при измерении силы подземных толчков по шкале Рихтера.

✓ *В физике*: при измерении количества децибелов громкости звуков.

✓ *В астрономии*: свечение небесного тела; вычисление мнимой силы свечения небесного тела.

✓ *В биологии*: формула молекулы ДНК; раковины улиток и морских моллюсков.

Задание с решением

Сравним: а) $\log_{\sqrt{3}} 2$ с $\log_9 7$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ с $\log_7 5$.

Решение:

а) Преобразуем эти выражения, чтобы получить логарифмы по одному и тому же основанию:

$$\log_{\sqrt{3}} 2 = 2\log_3 2 = \log_3 4, \qquad \log_9 7 = \frac{1}{2}\log_3 7 = \log_3 \sqrt{7}.$$

Так как логарифмическая функция с основанием больше 1 строго возрастает и $4>\sqrt{7}$, то $\log_3 4>\log_3\sqrt{7}$. Значит, $\log_{\sqrt{3}} 2>\log_9 7$.

б) В силу свойства 5° логарифмической функции имеем $\log_{\frac{1}{2}} 3<0$, а $\log_7 5>0$. Следовательно, $\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_7 5$.

Упражнения и задачи

А

1. Постройте график и определите свойства функции $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:
а) $f(x)=\log_5 x$; б) $f(x)=\log_{0,1} x$; в) $f(x)=\lg x$; г) $f(x)=\ln x$.

2. Сравните с 0, затем с 1:
а) $\log_3 2$; б) $\log_3 0{,}2$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}5$; г) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}2$.

3. Используя свойства изученных функций, сравните:
а) $(\sqrt{3})^{-3}$ с 81^{-16}; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\sqrt{5}$ с 1; в) $\log_5\frac{1}{3}$ с $\log_5\frac{1}{10}$.

4. Определите интервалы монотонности, четность или нечетность, множество значений, локальные экстремумы функции, заданной формулой:
а) $f(x)=5^x$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $f(x)=\log_{1,3} x$.

Б

5. Укажите числа, которые больше 1: $\log_{1,1} 0{,}5$, $\log_{2-\sqrt{3}} 1{,}01$, $\log_{123} 120$.

6. Сравните $\log_{\sqrt{3}} 6$ с $\log_3 5$.

7. При каких значениях x функции $f, g\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x-1)$, $g(x)=\log_3 x$, принимают одинаковые значения?

8. Докажите, что функция f обратима, и найдите обратную к ней функцию:
а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=2^{x-3}$; б) $f\colon (2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_3(x-2)$.

9. При каких значениях x функция $f\colon D\to\mathbb{R}$ принимает значения больше 1, если:
а) $f(x)=\log_{0,2} x$; б) $f(x)=\lg(x-3)$.

10. Найдите множество $\mathbb{R}\setminus D(f)$, если функция f задана формулой:
а) $f(x)=\lg\{x\}$; б) $f(x)=(x-2)^{\sqrt{3}}$; в) $f(x)=\sqrt{\lg(2x+1)}$.

11. Используя свойства изученных функций, сравните:
а) 2 с $\log_3 8$; б) 3 с $(\sqrt{13})^{-0,1}$; в) $5^{\frac{2}{3}}$ с $17^{-0,3}$; г) $3^{0,1}$ с $\log_9 7$.

12. Определите интервалы монотонности, четность или нечетность, множество значений, локальные экстремумы функции, заданной формулой:
а) $f(x)=(\sqrt{3})^{x-1}$; б) $f(x)=(\sqrt{0{,}3})^{|x-1|}$; в) $f(x)=|\log_{\sqrt{2}}(x-1)|$.

13. Найдите $D(f)$ функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=\log_{|x|}(x+2)$; б) $f(x)=\lg\frac{4-3\lg x-\lg^2 x}{\lg x}$; в) $f(x)=\lg|9-x^2|+\sqrt{x^2-1}$.

5.2. Логарифмические уравнения

Будем называть ***логарифмическим уравнением*** такое уравнение, в котором выражение с неизвестным содержится в основании логарифмов и/или под знаком логарифмов.

Например, $\log_3(3x-1)=2$, $\log_{x-1}(x^2-3x+2)=1$ являются логарифмическими уравнениями.

Замечание. В результате замены суммы $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ на произведение $\log_a(f(x)\cdot g(x))$, как правило, расширяется ОДЗ выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$.

Действительно, ОДЗ выражения $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ является множеством решений системы $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases}$ а ОДЗ выражения $\log_a(f(x)\cdot g(x))$ – множеством решений совокупности систем $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases}$

В таких случаях возможно появление посторонних решений. Аналогично может произойти расширение ОДЗ при замене выражения $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ выражением $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов логарифмических уравнений.

1 Логарифмические уравнения вида $\log_a f(x)=b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b\in\mathbb{R}$

Возможны следующие частные случаи

Уравнение $\log_a x=b$ называется ***простейшим логарифмическим уравнением***.

а) Используя определение логарифма, получаем решение $x=a^b$.

Пример

Для уравнения $\log_3 x=2$ имеем $x=3^2=9$.

Ответ: $S=\{9\}$.

б) Решим уравнение $\log_a x=b$ другим способом. Выражаем b как логарифм по основанию a и получаем $b=b\cdot\log_a a=\log_a a^b$. Тогда $\log_a x=\log_a a^b \Leftrightarrow x=a^b$.

Пример

Для уравнения $\log_4 x=2$ имеем $\log_4 x=\log_4 16 \Leftrightarrow x=16$.

Ответ: $S=\{16\}$.

2 Логарифмические уравнения вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$

Решение таких уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 6. Если $a>0$, $a\neq 1$, то уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$ или системе $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_5(x^2+1)=\log_5(x+3)$.

Решение:

$$\log_5(x^2+1)=\log_5(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=x+3 \\ x^2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $S=\{-1, 2\}$.

3 Логарифмические уравнения, решаемые методом группировки

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_2(x-1)=\log_4(x+2)^4-\log_2 3x$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0 \\ (x+2)^4>0 \\ 3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$ Сгруппировав удобным способом слагаемые, получим

$$\log_2(x-1)+\log_2 3x=\log_4(x+2)^4 \Leftrightarrow \log_2 3x(x-1)=\log_2(x+2)^2 \Leftrightarrow 2x^2-7x-4=0,$$

откуда $x_1=4\in$ ОДЗ, $x_2=-\frac{1}{2}\notin$ ОДЗ. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что значение 4 является его решением.

Ответ: $S=\{4\}$.

4 Логарифмические уравнения вида $f(\log_a x)=0$ решаются методом замены неизвестного. Заменой $\log_a x=t$ заданное уравнение сводится к решению уравнений вида $\log_a x=t_i$, где t_i являются решениями уравнения $f(t)=0$.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_3^2(x+1)+\log_3(x+1)-12=0$.

Решение:

ОДЗ: $x+1>0 \Leftrightarrow x\in(-1,+\infty)$. Пусть $\log_3(x+1)=t$, Тогда получаем уравнение $t^2+t-12=0$, решения которого $t_1=3, t_2=-4$.

Решаем совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} \log_3(x+1)=3, \\ \log_3(x+1)=-4, \end{array}\right.$ откуда находим $\left[\begin{array}{l} x=26\in \text{ОДЗ}, \\ x=-\frac{80}{81}\in \text{ОДЗ}. \end{array}\right.$

Так как выполненные преобразования равносильны, то эти числа являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $S=\left\{-\frac{80}{81}, 26\right\}$.

5 Логарифмическое уравнение вида $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)>0 \\ a(x)>0 \\ a(x)\neq 1 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ или системе $\begin{cases} g(x)>0, \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)=g(x). \end{cases}$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_{x+1}(x^2-1)=\log_{x+1}(3x-1)$.

Решение:

$$\log_{x+1}(x^2-1)=\log_{x+1}(3x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-1>0\\x+1>0\\x+1\neq 1\\x^2-1=3x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{3}\\x^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{3}\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $S=\{3\}$.

6 Существуют логарифмические уравнения, которые не относятся ни к одному из представленных видов.

а) Уравнения, содержащие логарифмы по разным основаниям

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_4 x+\log_3 x=2$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$. Используя формулу перехода к другому основанию, получаем:

$$\frac{\lg x}{\lg 4}+\frac{\lg x}{\lg 3}=2\Leftrightarrow x=10^{\frac{2\lg 4\lg 3}{\lg 12}}.$$

Ответ: $S=\left\{10^{\frac{2\lg 4\lg 3}{\lg 12}}\right\}$.

б) Уравнения, в которых неизвестное содержится как в основании, так и под знаком логарифмов

Пример. $\log_{x+1}5+\log_5(x+1)=2$.

Решение:

ОДЗ: $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Так как $\log_{x+1}5=\frac{1}{\log_5(x+1)}$, то:

$$\frac{1}{\log_5(x+1)}+\log_5(x+1)=2\Leftrightarrow \log_5(x+1)=1\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $S=\{4\}$.

в) Уравнения, где неизвестное содержится как в основании степени, так и в показателе степени, который может содержать и логарифмы

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}_+^*$ уравнение $x^{\log_4 x}+4^{\log_4^2 x}=8$.

Решение:

ОДЗ: $x\in(0,+\infty)$. Поскольку $x^{\log_4 x}=(4^{\log_4 x})^{\log_4 x}=4^{\log_4^2 x}$, подставив $x^{\log_4 x}=4^{\log_4^2 x}$ в исходное уравнение, получим уравнение $2\cdot 4^{\log_4^2 x}=8$, решения которого $x_1=4\in$ ОДЗ, $x_2=\frac{1}{4}\in$ ОДЗ.

Ответ: $S=\left\{\frac{1}{4},4\right\}$.

7 Некоторые уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, можно решить при помощи свойств функций, являющихся соответственно правой и левой частями уравнения.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_6(x+2)=13-3x$.

Решение:

ОДЗ: $x\in(-2,+\infty)$. Подбором находим решение $x=4$. Так как функция f, заданная формулой $f(x)=\log_6(x+2)$, строго возрастает на ОДЗ, а функция g, заданная формулой $g(x)=13-3x$, строго убывает на ОДЗ, то графики этих функций пересекаются только в одной точке. Значит, уравнение имеет единственное решение: $x=4$.

Ответ: $S=\{4\}$.

Замечание. Рассмотренные методы решения логарифмических уравнений можно классифицировать следующим образом:

а) ***метод потенцирования***, то есть переход от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к уравнению $f(x)=g(x)$;

б) ***метод введения вспомогательных неизвестных***;

в) ***метод логарифмирования***, то есть переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Упражнения и задачи

А

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

1. а) $\log_2 x=4$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x=0$; в) $\log_{100} x=1$;
г) $\log_{0,3} x=-1$; д) $\log_{\sqrt{3}} x=-2$; е) $\log_{-8} x=3$.

2. а) $\log_{0,1}(3x-1)=-1$; б) $\log_2(x^2-4)=2$; в) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x)=6$.

3. а) $\log_3(x+2)=\log_3 x^2$; б) $\log_{0,1}(x^2-x-1)=\log_{0,1}(x+4)$; в) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x}+1)=\log_{\sqrt{5}}(2\sqrt{x})$.

4. а) $3(\lg(x-1)-2)=\lg 5-\lg(x-1)$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x^2-\lg 4=\log_{\frac{1}{2}} x+\lg 25$.

5. а) $\lg(35-x^3)=3\lg(5-x)$; б) $\log_3^2(x+2)-3\log_3(x+2)-4=0$; в) $12-\lg^2 x=\lg x$.

Б

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$; б) $\log_x 2+\log_2 x=-2{,}5$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}^2 9x+\log_3\dfrac{x^2}{9}=8$; г) $2\log_4 x^2-\log_4^2(-x)=4$;

д) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x}=4,\ x>0$; е) $x^{\lg x-4}=100,\ x>0$;

ж) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$; з) $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3=0$;

и) $x^{1+\log_3 x}=9x^2,\ x>0$; к) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x},\ x>0$;

л) $3^{\log_2 x^2}\cdot 5^{\log_4 x^2}=2025$.

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+2)=3-x$; б) $\log_4(17x-1)=2^x$; в) $1-2x=\lg\frac{x}{2000}$.

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\log_2(x^2-x)^2-2\log_2(x+2)=2$; б) $\log_3(3^x-8)=|2-x|$.

9. Составьте логарифмическое уравнение, решениями которого являются числа 0 и 2.

10. Составьте логарифмическое уравнение, которое на множестве $\mathbb{R}$:

а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения.

11*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $x^{\log_a x}=a^2x,\ a>0,\ x>0$; б) $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$; в) $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg a$.

5.3. Логарифмические неравенства

Задача. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $0{,}5^{\log_{0,1}(x^2-3x+2)}<1$.

Решение:

ОДЗ: $x^2-3x+2>0$. Учитывая, что это неравенство вида $a^{f(x)}<1$, где $a=0{,}5<1$, получаем равносильное неравенство $\log_{0,1}(x^2-3x+2)>0$, которое является логарифмическим неравенством.

Будем называть ***логарифмическим неравенством*** такое неравенство, в котором выражение с неизвестным содержится в основании логарифмов и/или под знаком логарифмов.

Например, $\log_5 x<2$, $\log_{0,2}(3x-1)\ge 0$, $\lg^2 x-\lg x-6\le 0$,

$\log_{x+1}(x-3)>\log_{x+1}x$ являются логарифмическими неравенствами.

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов логарифмических неравенств.

1 Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, $a>0$, $a\ne 1$, $a\in\mathbb{R}$

Решение неравенств этого вида основано на теореме 7.

Теорема 7. Если $a>1$, то неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ (1) равносильно системе $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$

Если $0<a<1$, то неравенство (1) равносильно системе $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

Задание. Докажите теорему 7.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\log_2(3x-1)>\log_2(5-x)$.

Решение:

$$\log_2(3x-1)>\log_2(5-x)\Leftrightarrow\begin{cases}5-x>0\\3x-1>5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5\\x>1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1{,}5;\ 5).$$

Ответ: $S=(1{,}5;\ 5)$.

Аналогично решают логарифмические неравенства вида:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x),\ \log_a f(x) < \log_a g(x),\ \log_a f(x) \leq \log_a g(x), \qquad (2)$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Решение логарифмического неравенства сводится, как правило, к решению неравенства вида (1) или (2).

2 Логарифмические неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$

Это неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\log_{x+1}(2x+1) \geq \log_{x+1}(x-1)$.

Решение:

$$\log_{x+1}(2x+1) \geq \log_{x+1}(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 > 1 \\ x-1 > 0 \\ 2x+1 \geq x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+1 < 1 \\ 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \leq x-1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x > 1.$$

Ответ: $S = (1, +\infty)$.

Аналогично решают логарифмические неравенства вида:

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x),\ \log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x),\ \log_{h(x)} f(x) \leq \log_{h(x)} g(x).$$

3 Решение логарифмических неравенств методом логарифмирования

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}_+^*$ неравенство $x^{2\lg x} > 100$.

Решение:

ОДЗ: $x \in (0, +\infty)$. Так как на ОДЗ обе части неравенства положительны, то логарифмируем по основанию 10 и получаем логарифмическое неравенство:

$$\lg x^{2\lg x} > \lg 100 \Leftrightarrow 2\lg^2 x > 2.$$

Значит, $\lg^2 x > 1 \Leftrightarrow (\lg x - 1)(\lg x + 1) > 0$. Получаем $\lg x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x < -1 \\ \lg x > 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{10}, \\ x > 10. \end{array} \right.$ Учитывая ОДЗ, находим, что $x \in \left(0, \dfrac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

Ответ: $S = \left(0, \dfrac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

Замечание. Знак полученного неравенства („<“, „≤“, „>“, „≥“) не изменится при логарифмировании, если логарифмируем обе его части по основанию $a>1$; знак полученного неравенства („<“, „≤“, „>“, „≥“) меняется на противоположный, если логарифмируем обе его части по основанию $0<a<1$.

Упражнения и задачи

Б

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

1. а) $\log_2(1-x)<0$; б) $\lg(x^2+1)\le 1$; в) $\ln(3-2x)\le 0$;
г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-7)>-2$; д) $\log_{0,1}(x^2-3x+2)>0$; е) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x)\ge 2$.

2. а) $\log_4(x^2+1)\ge\log_4(3x+1)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}(2-x)\le\log_{\frac{2}{3}}(5x-8)$; в) $\lg(2x+1)>\log_{\frac{1}{10}}x$.

3. а) $\log_2(x-3)-\log_2 2x\ge 1$; б) $\lg(2x-4)+\lg 3x<\lg(x+1)$.

4. а) $\lg^2(2x+3)-12\lg(2x+3)+20\le 0$; б) $2\log^2_{\frac{1}{5}}6x-5\log_{\frac{1}{5}}6x+3>0$;
в) $\dfrac{1}{1+\log_3 x}+\dfrac{1}{1-\log_3 x}<2$; г) $\log^2_2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)-5\le 0$.

5. а) $\log_{\frac{x-1}{2x+1}}0,5>1$; б) $\log_x(x^3-x^2+x+2)\le 3$;
в) $\log_{0,3}\left[\lg\dfrac{x^2-1}{x+3}\right]\ge 0$; г) $\dfrac{\log_4(2-3x)}{x-4}<0$;
д) $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2\le 0$; е) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x\ge 1$;
ж) $\dfrac{\ln 6-\ln(10-x^2)}{\ln(x+2)}<0$; з) $\log_3(\log_2(2-\log_4 x))>1$;
и) $x^{\log_2 x}+16\cdot x^{-\log_2 x}>17,\ x>0$; к) $\log_{x^2-1}3x\le\log_{x^2-1}(4-x)$.

6. а) $\log_3|x+5|-\log_{\frac{1}{3}}|x-1|\ge\log_3 x$; б) $\log_{|x-1|}(x-4)\le 2$;
в) $\dfrac{\log_{0,2}|x+1|}{x^2-9x}>0$; г) $\log_{|x|}\sqrt{20-9x}>1$.

7. Составьте логарифмическое неравенство, множеством решений которого является интервал $[0,+\infty)$.

8*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство, где a – действительный параметр:
а) $\log_a(1-x^2)\ge 1$; б) $x^{\log_a x}>a,\ x>0$; в) $\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+1)$.

9*. Дано неравенство $\left(\log_2\dfrac{4a+4}{a}\right)\cdot x^2+2\left(\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)\cdot x+\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}>0$. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство верно для любых действительных значениях x.
(Математическая Олимпиада Республики Молдова, 2012)

5.4. Системы и совокупности показательных и логарифмических уравнений

Не существует единого универсального метода решения систем (совокупностей) показательных и логарифмических уравнений. При их решении применяются те же методы, что и при решении систем (совокупностей) алгебраических уравнений, а также изученные методы, применяемые при решении уравнений, составляющих заданную систему (совокупность).

Задания с решением

1. Решим на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases}2^x\cdot 3^{2y}=12,\\ 2^{2y}\cdot 3^x=18.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Умножив почленно уравнения системы, получим:

$$2^{x+2y}\cdot 3^{x+2y}=6^3 \Leftrightarrow 6^{x+2y}=6^3 \Leftrightarrow x+2y=3.$$

Разделив почленно первое уравнение системы на второе (все слагаемые уравнений ненулевые на множестве $\mathbb{R}$), получим: $2^{x-2y}\cdot 3^{2y-x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2y}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x-2y=1.$

Таким образом, решение исходной системы свелось к решению системы алгебраических уравнений $\begin{cases}x+2y=3,\\ x-2y=1,\end{cases}$ решением которой является пара чисел $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$. Учитывая равносильность выполненных преобразований, делаем вывод, что $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ является решением заданной системы.

Ответ: $S=\left\{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $(16\cdot 4^{2x-1}-12\cdot 4^{x-1}-1)\cdot\lg(3x^3-18x^2+1)=0.$

Решение:

ОДЗ: $3x^3-18x^2+1>0$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}16\cdot 4^{2x-1}-12\cdot 4^{x-1}-1=0,\\ \lg(3x^3-18x^2+1)=0.\end{array}\right.$

Решаем первое уравнение: $16\cdot 4^{2x-1}-12\cdot 4^{x-1}-1=0\Leftrightarrow 4\cdot 4^{2x}-3\cdot 4^x-1=0$ и получаем решение $x_1=0$. (Проверьте!)

Решаем второе уравнение: $\lg(3x^3-18x^2+1)=0\Leftrightarrow 3x^3-18x^2+1=1\Leftrightarrow 3x^3-18x^2=0$, откуда $x_2=0,\ x_3=6$. Подставляя значения 0 и 6 в неравенство $3x^3-18x^2+1>0$, убеждаемся в том, что они принадлежат ОДЗ исходного уравнения. Тогда совокупность, а значит, и исходное уравнение имеют решения 0 и 6.

Ответ: $S=\{0,\ 6\}$.

Упражнения и задачи

А

1. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}3^x+3^y=12,\\ x+y=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5^x-2^{2y}=77,\\ 5^{\frac{x}{2}}-2^y=7;\end{cases}$ в) $\begin{cases}16^x=48y,\\ 4^x=3y;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 10,\\ x^2+y^2=16;\end{cases}$ д) $\begin{cases}\log_3^2 y+\log_3^2 x=1,\\ 2\log_3 y\cdot\log_3 x=3;\end{cases}$ е) $\begin{cases}10^{2-\lg(x-y)}=3^{2\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}},\\ \lg(x-y)=\lg 40-\lg(x+y);\end{cases}$

ж) $\begin{cases}3^y\cdot 3^x=81,\\ \ln(y+x)^2=\ln x+2\ln 3;\end{cases}$ з) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\ 2x^2-y=3;\end{cases}$ и) $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(y-x)=4,\\ 3^x+2\cdot 3^{y-2}=171.\end{cases}$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ совокупность уравнений:

а) $\left[\begin{array}{l}\lg^2(x+1)-9\lg(x+1)-10=0,\\ 2^{2x}+2^{x+1}+24=0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}\log_3(5-x)-\dfrac{1}{3}\log_3(35-x^3)=0,\\ x^{\lg x}=10;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}4^x+10^x=2\cdot 25^x,\\ \log_3(7-2x)-\log_3(x^2-3x-5)=0;\end{array}\right.$ г) $(5^{2x}-2\cdot 5^x)(1+3\log_{\frac{1}{2}} x)=0.$

Б

3. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32,\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y);\end{cases}$ б) $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12},\ \ x>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^{2y^2-1}=5,\\ x^{y^2+2}=125,\ \ x>0;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x^{x-2y}=25,\\ 4(x-2y)+\log_5 x=9,\ \ x>0;\end{cases}$ д) $\begin{cases}3(2\log_{y^2}x-\log_{\frac{1}{x}}y)=10,\\ xy=81;\end{cases}$ е) $\begin{cases}x^{y^2-7y+12}=1,\ \ x>0,\\ |x+y|=8;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\log_{|xy|}|x+y|=1,\\ 2(\log_4|xy|)\cdot\log_{|xy|}|x-y|=1;\end{cases}$ з) $\begin{cases}\lg y\cdot\lg(x-y)=\lg x\cdot\lg(x+y),\\ \lg x\cdot\lg(x-y)=\lg y\cdot\lg(x+y).\end{cases}$

4. Решите на множестве R уравнение:

а) $x^2\cdot\log_2^2 x+2x\log_2 x=x^2\cdot\log_2 x+2x\log_2^2 x;$ б) $3x\cdot 8^x+3x\cdot 18^x=2x\cdot 27^{x+\frac{1}{3}};$

в) $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^x;$ г) $x\sqrt{\log_5 x}+x\cdot\sqrt[3]{\log_5 x}=5^{\log_5(2x)}.$

5. Составьте систему показательных и логарифмических уравнений, которая на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

а) имеет два решения; б) имеет одно решение; в) не имеет решений.

6. Составьте систему логарифмических (показательных) уравнений, решением которой является пара чисел (0, 2).

7*. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений, где a – действительный параметр:

а) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2},\\ x+y=a^2+a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg^2 x+\lg^2 y=\dfrac{5}{2}\lg^2 a^2,\\ xy=a^2,\ \ a>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3^{2x+y}+3^{x+3y}=3,\\ 3^y+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x+3y}=3^{a-2x}.\end{cases}$

Упражнения и задачи на повторение

A

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (2-\sqrt{3})x + \sqrt{5}$; б) $f(x) = (\sqrt{3}-2)x - 7$; в) $f(x) = \frac{2}{17}x - \frac{3}{53}$.

1) Найдите нули функции.

2) Найдите промежутки, на которых функция f принимает положительные значения.

3) Постройте график G_f.

2. У Ольги 500 леев. Ежемесячно она добавляет к этой сумме по 80 леев.

а) Задайте функцию, описывающую зависимость накопленной суммы денег от количества месяцев.

б) Через сколько месяцев она соберет 1900 леев, необходимых для покупки компьютера?

3. Температура земли на поверхности равна 20°C, на глубине 2 км температура равна 90°C, а на глубине 10 км – 370°C.

а) Предположив, что зависимость между глубиной и температурой является линейного типа, задайте соответствующую функцию.

б) Найдите температуру земли на глубине 3,5 км.

4. Плата за аренду автомобиля за 1 день зависит от пройденного расстояния и равна (например): 41 \$ за 100 миль; 51,8 \$ за 160 миль; 63,5 \$ за 225 миль.

а) Покажите, что зависимость платы за аренду от количества пройденных миль автомобилем является линейного типа и задайте соответствующую функцию.

б) Какую сумму следует заплатить, если автомобиль прошел 200 миль?

5. Найдите область определения функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + (x+3)^2$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

6. Найдите промежутки, на которых функция $f: D \to \mathbb{R}$ принимает положительные значения, если:

а) $f(x) = x^2 + x - 6$; б) $f(x) = \frac{4}{2-x}$; в) $f(x) = \log_6(x+2)$; г) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$.

7. Высота над землей подброшенного вверх мяча вычисляется по формуле $h(t) = -t^2 - 0{,}5t + 1{,}5$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, $t \in [0; 1{,}5]$.

а) Найдите момент времени t, в котором мяч находится на максимальной высоте.

б) Через какой промежуток времени мяч упадет на землю?

8. Уровень воды в реке Южной Америки поднялся после дождя. Затем уровень начал падать по 3 цоля в час (1 цоль = 2,54 см) и в настоящее время он на 3 стопы выше нормального уровня (1 стопа = 30 см). Предположив, что уровень воды понижается равномерно, запишите функцию I степени, задающую зависимость уровня воды (того, что выше нормы) от времени. Через какой промежуток времени уровень воды будет нормальным?

9. Используя свойства изученных функций, в том числе их графики, сравните:

а) $\sqrt[3]{720}$ с $\sqrt[3]{722}$; б) $\sqrt[5]{-91}$ с $-\sqrt[5]{91{,}2}$; в) $(\sqrt{2}-1)^{15}$ с 1;

г) $3^{-\frac{2}{7}}$ с $4^{-\frac{2}{7}}$; д) $\log_3 \pi$ с $\log_3 3{,}1$; е) $\log_{0,1} \pi$ с $\log_{0,1} \pi^2$.

Б

10. Используя свойства изученных функций, сравните:

а) $\sqrt[7]{\pi}$ с $\sqrt[7]{\dfrac{17}{5}}$; б) $(1{,}7)^{-\frac{5}{3}}$ с $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{3}}$; в) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$ с $(\sqrt{2})^{-3}$;

г) $\log_{0,9}(2-\sqrt{3})$ с $\log_{0,9}\sqrt[13]{2}$; д) $\log_{\sqrt{3}}17$ с $\log_3 5$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(\sqrt{3})^x=-1$; б) $15^x=3^x\cdot 5^{\sqrt{2}}$; в) $\log_{\sqrt{3}}(|x|+2)=-2$;

г) $\log_2 3x=\log_{32}21$; д) $\sqrt[4]{x+2}=0{,}5-\sqrt{3}$; е) $\pi^{x^2+4}=\pi^2$.

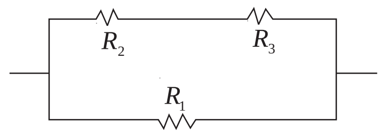
12. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x-6}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}-\sqrt{x}$; в) $f(x)=(x+1)^{-\frac{1}{3}}$.

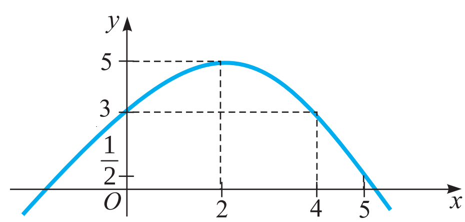
13. Выберите из множества $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{3}-2\}$ числа, принадлежащие множеству значений функции f, и найдите соответствующие значения x:

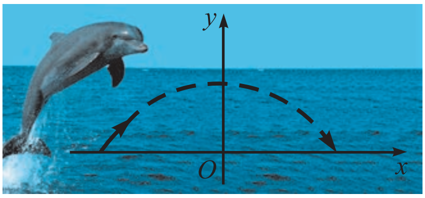
а) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$; б) $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$.

14. Для заданной электрической цепи известно, что:
$R_{\text{общее}}=2{,}25\Omega,\ R_1=3\Omega,\ R_2=4\Omega.$
Найдите R_3.



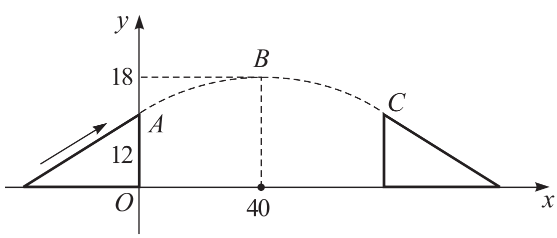
15. Используя данные рисунка, задайте соответствующую функцию II степени $f(x)=ax^2+bx+1$.





16. Дельфин прыгает из воды по траектории:
$$y=-\frac{5}{36}x^2+20.$$
а) Какую максимальную высоту достигнет дельфин?
б) Каково расстояние между точкой выхода из воды и точкой входа дельфина в воду?

17. Мотоциклист двигается по наклонной плоскости, пролетает по воздуху и затем продолжает движение по другой наклонной плоскости. Используя данные рисунка, задайте функцию II степени, частью графика которой является траектория ABC.



18*. Уточните, обратима ли функция f и, если она обратима, найдите обратную к ней функцию:

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+2$; б) $f:[2,\infty)\to[-1,\infty),\ f(x)=x^2-4x+3$.

19*. Найдите множество значений функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = |2x| + m$; б) $f(x) = (m+1)x + m - 2$.

20*. Положительное действительное число x удовлетворяет неравенству

$$|\log_9 x^{2x} - \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}| + ||1-x| - |\log_3 x|| \le (x-1)\log_{27} x^{x^3}.$$

Найдите число $\log_3 \frac{9x}{3^x}$. (Математическая Олимпиада Республики Молдова, 2010)

Проверочная работа II

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Определите истинностное значение высказывания: $2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 5^x + 15 = 0$. **2**

2. Если сложить возрасты отца и сына, то получим 52 года. Через 8 лет значение отношения возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Найдите возраст отца и возраст сына. **2**

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\left(\frac{x}{x-1} + x - 2\right)(100^{\lg(x-1)} - 2) = 0$. **3**

4. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} 4\log_4(x-y) + \log_2(x+y) = 6, \\ \sqrt{x-y} = 2. \end{cases}$ **3**

Продолжительность работы: 90 минут

Б

1. Доходы (в тыс. леев) фирмы по продаже автомобилей на протяжении 10 месяцев изменялись согласно закону: $f(x) = \begin{cases} -x+2, & 0 \le x \le 2 \\ -2x^2 + 20x - 32, & 2 < x \le 10. \end{cases}$ **2**

а) Изобразите графически доходы фирмы.

б) Определите:

1) в какие из этих 10 месяцев доходы были максимальными;

2) периоды времени, когда фирма работала в убыток;

3) периоды возрастания доходов;

4) периоды убывания доходов.

2. Запишите уравнение окружности, описанной треугольнику, заданному прямой $y = 3x + 6$ и осями координат. **1**

3. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+1). \end{cases}$ **2**

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $9^{2x - \sqrt{x^2-1}} - 4 \cdot 3^{2x+1-\sqrt{x^2-1}} + 27 \ge 0$. **2**

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $36^{|x|} - 2 \cdot 6^{|x|} + a = 0$, где a – действительный параметр. **3**

$D(f)$ — Элементарные функции. Уравнения. Неравенства — ОДЗ

Функция I степени. Функция II степени

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,$
$a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax^2 + bx + c,$
$a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

Уравнения

$ax + b = 0$

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$, $A(X), B(X)$ – многочлены

Неравенства

$ax + b > 0$ (или $<, \leq, \geq$)

$ax^2 + bx + c > 0,\ a \neq 0$ (или $<, \leq, \geq$)

$\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ (или $<, \leq, \geq$)

Системы, совокупности

$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} ax + b > c \\ a_2x^2 + b_1x + c_1 < 0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+4} > 0 \end{cases}$ и др.

Функция радикал. Степенная функция

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$
$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt[2n]{x}$
$h: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+,\ h(x) = x^{\alpha},$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Иррациональные уравнения

$\sqrt{f(x)} = g(x)$

$f(x)\sqrt[2k]{g(x)} = 0,\ k \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x),\ k \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ и др.

Иррациональные неравенства

$\sqrt{f(x)} < g(x)$

$\sqrt{f(x)} > g(x)$

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x)$ и др.

Системы, совокупности

$\begin{cases} \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} = 5 \\ 3 - \sqrt{x} = x \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} \leq x \\ x\sqrt{x} > \sqrt{x+2} \end{array}\right.$ и др.

Показательная функция

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+,\ f(x) = a^x,$
$a \in \mathbb{R}^*_+,\ a \neq 1$

Показательные уравнения

$a^{f(x)} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a, b \in \mathbb{R}$

$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$

$f(a^x) = 0$

$h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ и др.

Показательные неравенства

$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$

$h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$

$f(a^x) > 0$ и др.

Системы, совокупности

$\begin{cases} 4^x - 2^x = y \\ 8^x + 2y = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 3 \cdot 9^x + 3^x = 0 \\ 5^x - 5^{x-1} = 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 64^x + 3 \cdot 8^x - 4 < 0 \\ 1 - 5^{|x|} < 25 \end{cases}$ и др.

Логарифмическая функция

$f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,$
$a \in \mathbb{R}^*_+,\ a \neq 1$

Логарифмические уравнения

$\log_a f(x) = b,\ a > 0,$
$a \neq 1,\ a, b \in \mathbb{R}$

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$f(\log_a x) = 0$

$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ и др.

Логарифмические неравенства

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$

$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$ и др.

Системы, совокупности

$\begin{cases} \lg x + \lg y = 0 \\ 2\lg x - 3\lg y = 1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \ln^2 x - \ln x = 0 \\ \lg(x+1) = \lg(x^2 - 4) \end{array}\right.$

$\begin{cases} \log_3(x-1) > \log_9 x \\ \ln\dfrac{x}{x-1} \leq 0 \end{cases}$ и др.

Другие функции (например, тригонометрические функции)

Другие уравнения, неравенства, системы и совокупности

Смешанные

$\sqrt{2^x} - \sqrt{4^x} = 0$

$\log_2 \sqrt{x-1} > \log_2 x$

$\begin{cases} x + y = 2 \\ \lg x + \lg y = -1 \end{cases}$ и др.

Симметричные

$x + y + xy = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

$\begin{cases} 2x + 2y - xy = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$ и др.

Однородные

$2x + 3y = 0$

$x^2 - xy + y^2 = 0$

$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ и др.

Уравнения (неравенства, системы, совокупности) с модулем и/или с параметром

МОДУЛЬ 8 Элементы тригонометрии

Математика – это гимнастика ума.
Норберт Виннер

Цели

- измерение углов с использованием различных единиц измерения;
- использование тригонометрической окружности при решении задач;
- *применение свойств тригонометрических функций и свойств обратных тригонометрических функций;
- распознавание и применение основных тригонометрических тождеств и формул в различных контекстах;
- *распознавание тригонометрических уравнений и неравенств, применение адекватных методов их решения;
- применение тригонометрии в различных областях.

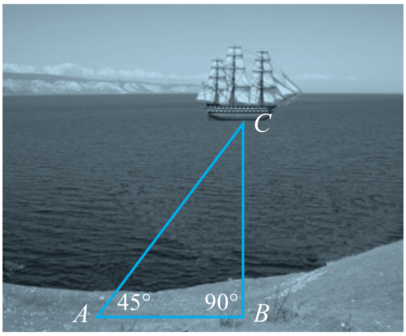
§1 Тригонометрические функции

1.1. Системы измерения углов и дуг. Обобщение понятий угла и дуги

Знаете, что...

Древние греки первыми научились определять расстояние от берега до корабля, находящегося в море. Пользуясь рисунком, объясните, как поступали древние греки.

Заключение: этот способ может быть использован в аналогичных ситуациях (приведите примеры). Следовательно, элементы тригонометрии, величины углов применимы в различных областях, в том числе в повседневной жизни.



1 *Градусная мера*

Известно, что каждой дуге окружности соответствует однозначно определенный центральный угол. В тригонометрии применяются две единицы измерения углов: градус и радиан.

Единицей измерения в градусной системе измерения является ***градус*** ($1°$), определенный как величина угла, равного $\frac{1}{90}$ части прямого угла. $\frac{1}{60}$ часть градуса равна ***1 минуте*** ($1'$), а $\frac{1}{60}$ часть минуты равна ***1 секунде*** ($1''$).

Следовательно, $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Градусная мера развернутого угла равна 180° (вдвое больше, чем мера прямого угла); градусная мера полного угла равна 360°.

2 *Радианная мера*

Радианная система измерения углов и дуг базируется на утверждении, что отношение длины дуги, соответствующей некоторому центральному углу, к длине радиуса окружности – это постоянная величина, не зависящая от длины радиуса.

Определение. Пусть l – длина дуги окружности радиуса r. **Радианной мерой** центрального угла (дуги) называется отношение длины дуги, соответствующей этому углу, к длине радиуса окружности: $\alpha = \frac{l}{r}$ (1).

Если в формуле (1) положим $l = r$, то $\alpha = 1$ радиан. ***Углом в один радиан*** (сокращенно **рад**) называется центральный угол, которому соответствует дуга, длина которой равна длине радиуса (рис. 8.1).

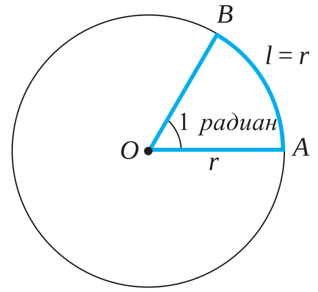


Рис. 8.1

Примеры

1. Радианная мера (α) полного угла равна 2π рад.

Действительно, так как длина окружности равна $2\pi r$, то $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ рад, где $\pi \approx 3{,}1416$.

2. Радианная мера развернутого угла равна π рад, а прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$ рад.

Замечание. Как правило, единица измерения радиан (рад) не указывается.

3 ***Переход от градусной меры к радианной мере*** осуществляется на основании

соотношения $\alpha = \frac{\pi \cdot a}{180°}$, где a – градусная мера угла. Обратный переход: $a = \frac{180° \cdot \alpha}{\pi}$, где α – радианная мера угла.

Примеры

1. Угол в 45° имеет радианную меру $\alpha = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4}$.

2. Угол в 1 радиан имеет градусную меру $a = \frac{180° \cdot 1}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}1416} \approx 57°17'44''$.

4 *Ориентированные углы и дуги*

В геометрии угол рассматривается как объединение двух замкнутых полупрямых с общим началом. Однако это понятие не применимо в некоторых случаях. Например, недостаточно сказать „Покрутите гайку на 30°" – необходимо задать и направление поворота. Часто приходится поворачивать некоторую ось, ключ на угол больший, чем 360°. Для решения этих задач обобщим понятия угла и дуги, рассматривая ***ориентированные углы*** и ***дуги***.

На плоскости рассматривают два направления для вращения луча вокруг своего начала – ***положительное*** (против часовой стрелки) и ***отрицательное*** (по часовой стрелке). Направление вращения указывается стрелкой (рис. 8.2).

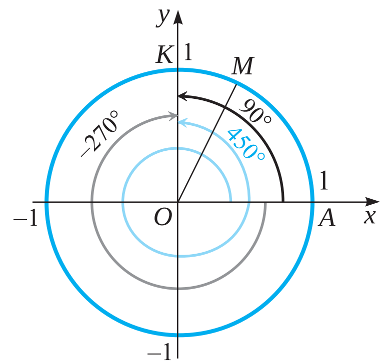


Рис. 8.2

Принято считать, что ориентированный угол AOM (точки A, M лежат на окружности) задается лучом $[OA$, который вращается вокруг своего начала. Так как одна из сторон произвольного ориентированного угла AOM совпадает с положительной полуосью $[Ox$, то в последующем будем считать, что вторая его сторона (а значит и угол AOM) задается лучом $[OM$. Угол AOM (и дуга, которую описывает точка A) называется ***положительным*** или ***отрицательным*** в зависимости от направления вращения луча $[OA$ вокруг своего начала.

Пусть луч $[OM$ составляет с положительным направлением оси Ox угол величиной α $(0<\alpha<2\pi)$. Если луч $[OM$ совершит еще n полных оборотов $(n\in\mathbb{N}^*)$ в положительном (или в отрицательном) направлении, то величина полученного ориентированного угла равна $\alpha+2\pi n$ (или $\alpha-2\pi n$). На рисунке 8.2 луч $[OK$ образует с лучом $[OA$ несколько углов: первый величиной в 90° $\left(\text{или } \dfrac{\pi}{2}\right)$, второй величиной в 450° $\left(\text{или } \dfrac{5\pi}{2}\right)$, третий величиной –270° $\left(\text{или } -\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Обобщая сказанное, делаем вывод, что величина любого ориентированного угла, образованного лучами $[OK$ и $[OA$, задается формулой: $a=90°+n\cdot 360°,\ n\in\mathbb{Z}$ (или $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$).

Определение. **Тригонометрической окружностью** называется окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Как правило, рассматриваются углы, заданные полупрямой $[OM$ и положительной полуосью $[Ox$, где M принадлежит тригонометрической окружности (рис. 8.2). Говорят, что угол AOM принадлежит I, II, III или IV четверти, если точка M принадлежит I, II, III или IV четверти соответственно.

В этих условиях получаем биективное соответствие между множеством ориентированных углов (множеством дуг) и множеством действительных чисел при выбранной единице измерения – градус или радиан. Учитывая это соответствие, условимся, что через α, β и т. д. обозначим и угол, и его величину.

1.2. Тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс

Задача. Определим высоту телеграфного столба, перпендикулярного поверхности земли, используя при этом только инструмент для измерения длины.

Решение:

Обозначим: AB – высота столба, d – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно к AB (рис. 8.3). В точке A_1 $(A_1\neq A)$ вертикально устанавливаем (параллельно AB) прямолинейный шест $[A_1B_1]$, длина которого известна. Визуально на прямой d определяем расположение точки O так, чтобы точки O, B_1, B были коллинеарны. Очевидно, что прямоугольные треугольники OA_1B_1 и OAB подобны, поэтому $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{OA}{OA_1}$, откуда $AB=\dfrac{A_1B_1}{OA_1}\cdot OA$. Поскольку мы можем найти длины отрезков OA_1, A_1B_1, OA, то вычислим и высоту столба AB.

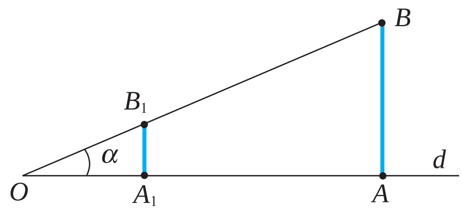


Рис. 8.3

Исходя из того, что в прямоугольных (подобных) треугольниках OA_1B_1, OAB (рис. 8.3) значение отношений вида $\dfrac{A_1B_1}{OA_1}$, $\dfrac{AB}{OA}$ – постоянная величина, были введены понятия *синус*, *косинус*, *тангенс*, *котангенс* для острых углов. А именно:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{OB},\ \cos\alpha=\frac{OA}{OB},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{OA},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{OA}{AB}.$$

Определение тригонометрических функций для произвольного угла основывается на следующей лемме:

Лемма. Если лучи $[OM_1$, $[OM_2$ совпадают ($M_1\neq O$, $M_2\neq O$), то $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}$, $\dfrac{x_1}{OM_1}=\dfrac{x_2}{OM_2}$, $\dfrac{y_1}{OM_1}=\dfrac{y_2}{OM_2}$, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки, заданные в прямоугольной системе координат xOy и $y_1\cdot y_2\neq 0$ (рис. 8.4).

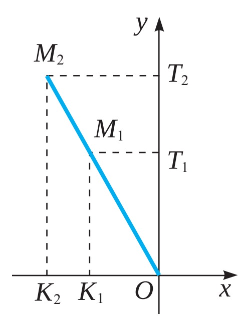


Рис. 8.4

Определения. Пусть даны тригонометрическая окружность и угол α, образованный лучом $[OM$ и положительной полуосью $[Ox$ (точка $M(x, y)$ принадлежит тригонометрической окружности) (рис. 8.5).

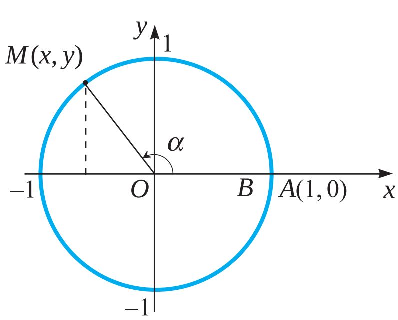


Рис. 8.5

- **Синусом угла** α называется ордината точки M (то есть $\sin\alpha=y$).
- **Косинусом угла** α называется абсцисса точки M (то есть $\cos\alpha=x$).
- **Тангенсом угла** α называется отношение ординаты к абсциссе точки M (то есть $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$).
- **Котангенсом угла** α называется отношение абсциссы к ординате точки M (то есть $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$).

Замечание. Таким образом, фактически определены числовые функции на подмножествах множества действительных чисел, так как радианная мера любого угла является действительным числом.

Определения. Называется функцией:

- **синус** – функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \sin x;$
- **косинус** – функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \cos x;$
- **тангенс** – функция $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \operatorname{tg} x;$
- **котангенс** – функция $f\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \operatorname{ctg} x.$

Замечание. В некоторых случаях используются также и функции:

секанс – функция $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x};$

косеканс – функция $f\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$

Функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс называются ***тригонометрическими функциями*** и обозначаются **sin**, **cos**, **tg**, **ctg**, **sec** и **cosec** соответственно.

Задание с решением

Вычислим значения тригонометрических функций sin, cos, tg, ctg для следующих величин углов: $0,\ \frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{3}.$

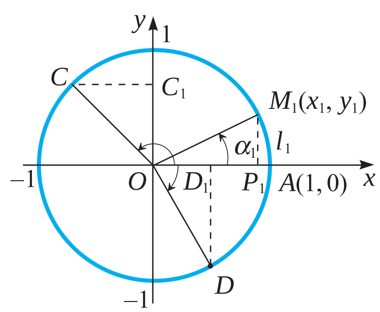


Рис. 8.6

Решение:

Углы $0,\ \frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{3}$ заданы лучами $[OA,\ [OC,\ [OD$ соответственно (рис. 8.6). Так как величины углов COC_1 и DOD_1 равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, то из треугольника OC_1C и треугольника OD_1D получаем $OC_1 = CC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ DD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ OD_1 = \frac{1}{2}$. Это позволяет найти координаты соответствующих точек: $A(1, 0),\ C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

Таким образом, по определению тригонометрических функций, имеем:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1;$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$\sin 0 = 0,\quad \cos 0 = 1,\quad \operatorname{tg} 0 = 0,$ а $\operatorname{ctg} 0$ не существует.

Аналогично получаем значения тригонометрических функций для других часто используемых углов (таб. 1).

Таблица 1

	α (радиан)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	α (градус)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$
Значение функции	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существ.
	$\operatorname{ctg}\alpha$	не существ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.3. Основные свойства тригонометрических функций

I. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

1° ***Область определения.*** $D(\sin) = \mathbb{R}$, так как для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ однозначно определяется ордината точки M тригонометрической окружности, где луч $[OM$ образует угол α с положительной полуосью $[Ox$.

2° ***Область изменения.*** $E(\sin) = [-1, 1]$. Включение $E(\sin) \subseteq [-1, 1]$ очевидно, так как $|\sin\alpha| = |y_M| \leq 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Обратное включение $[-1, 1] \subseteq E(\sin)$ получим, пользуясь тригонометрической окружностью. Для любого $a \in [-1, 1]$ рассмотрим на оси Oy точку $K(0, a)$ (рис. 8.7). Прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку K, пересекает тригонометрическую окружность хотя бы в одной точке, M. Из построения следует, что для любого угла α, заданного лучом $[OM$, имеем $\sin\alpha = a$, то есть a является значением функции синус. Итак, $E(\sin) = [-1, 1]$.

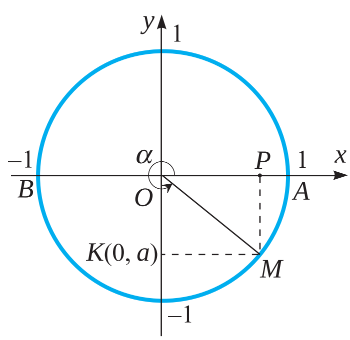


Рис. 8.7

3° ***Нули*** функции синус являются решениями уравнения $\sin t = 0$, то есть соответствующая точка имеет ординату $y = 0$. Точки имеют нулевую ординату, если они лежат на оси Ox. На рисунке 8.7 – это точки A и B. Величины углов, заданные лучом $[OA$, равны $0 + 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$, а величины углов, заданные лучом $[OB$, равны $\pi + 2\pi \cdot m,\ m \in \mathbb{Z}$. Объединением этих двух числовых множеств является множество $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Таким образом, нулями функции синус являются значения $x \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Координаты точки пересечения графика функции синус с осью Oy задаются равенством $\sin 0 = 0$, то есть график пересекает ось Oy в единственной точке с координатами $(0, 0)$.

4° ***Периодичность***. Из определения функции синус следует, что $\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha-2\pi)=\sin\alpha$, так как углы α, $\alpha\pm 2\pi$ задаются одним и тем же лучом. Это означает, что число $T=2\pi$ является периодом функции синус. Докажем, что $T=2\pi$ является ***основным периодом*** функции синус (наименьшим положительным периодом). Допустим, что существует меньший период T_1, $T_1>0$. Тогда $\sin x=\sin(x+T_1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. В частности, для $x=0$ имеем $0=\sin 0=\sin T_1$. Поскольку число T_1 является нулем функции синус, оно приобретает вид $T_1=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Единственным положительным числом вида $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, меньше, чем 2π, является $T_1=\pi$. Если бы число π было периодом, то мы бы получили, что $\sin x=\sin(x+\pi)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Но это равенство не выполнимо для всех $x\in\mathbb{R}$. Например, для $x=\frac{\pi}{2}$ получаем $\sin\frac{\pi}{2}=1$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-1$. Следовательно, число π не является периодом. Таким образом, основным периодом функции синус является 2π.

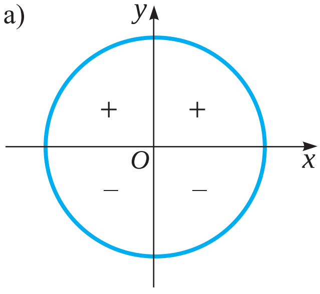
Замечание. На основании свойств периодических функций делаем вывод, что достаточно исследовать свойства функции синус на любом отрезке длины 2π.

5° ***Знак*** функции синус совпадает со знаком ординаты соответствующей точки тригонометрической окружности. Ордината точки положительна, если точка лежит выше оси Ox, а это означает, что соответствующий луч задает угол α, принадлежащий промежуткам $(2\pi k, \pi+2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$. В этом случае угол α принадлежит I или II четверти (рис. 8.8 а)). Если $\alpha\in(2\pi k-\pi, 2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$, то есть угол α принадлежит III или IV четверти, то функция синус принимает отрицательные значения (рис. 8.8 а)).

6° ***Четность или нечетность***. Если луч $[OM$ задает угол α, а луч $[OM'$ задает угол $-\alpha$ (рис. 8.8 б)), то точки M, M', лежащие на тригонометрической окружности, симметричны относительно оси Ox. Тогда для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ получим

$$\sin(-\alpha)=y_{M'}=-y_M=-\sin\alpha.$$

Значит, функция синус нечетная.



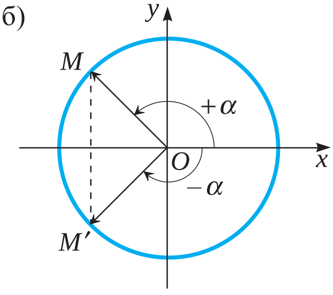


Рис. 8.8

7° ***Монотонность***. В § 2 будет доказано, что функция синус строго возрастает на каждом из отрезков $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, на которых принимает значения от -1 до 1, и строго убывает на каждом из отрезков $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, на которых принимает значения от 1 до -1.

8° ***Экстремумы***. Из свойства монотонности функции синус следует, что точки $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z},$ являются точками локального максимума этой функции и $y_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1,$ а точки $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ являются точками ее локального минимума и $y_{\min}=f\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=-1.$

9° ***График функции*** синус на отрезке $[0,\ 2\pi]$ проще построить при помощи тригонометрической окружности, учитывая при этом, что $2\pi\approx 6{,}28$ (рис. 8.9).

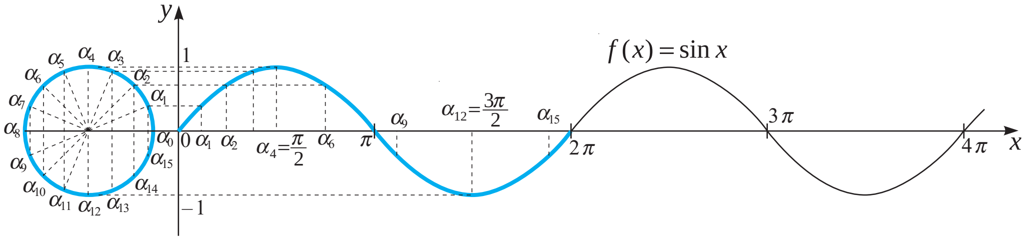


Рис. 8.9

В силу периодичности функции синус, достаточно построить ее график на отрезке $[0,\ 2\pi]$, а потом повторить его на отрезках $[2\pi,\ 4\pi]$, $[-2\pi,\ 0]$, … и т. д.

II. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$

Свойства функции косинус получаем аналогично свойствам функции синус.

1° $D(\cos)=\mathbb{R}$.

2° $E(\cos)=[-1,\ 1]$.

3° Нулями функции косинус являются значения $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, а ее график пересекает ось Oy в точке $(0,\ 1)$.

4° Функция косинус периодическая; ее основной период равен 2π.

5° Знаки функции косинус совпадают со знаками абсцисс соответствующих точек тригонометрической окружности: значения функции косинус положительны, если угол α лежит в IV или I четверти $\left(\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}\right)$, и ее значения отрицательны, если угол α лежит во II или III четверти $\left(\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}\right)$.

6° Функция косинус четная, так как, если лучи $[OM$ и $[OM'$ задают соответственно углы α и $-\alpha$, то точки $M,\ M'$ тригонометрической окружности симметричны относительно оси Ox и у них одинаковые абсциссы. Следовательно, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

7° Функция косинус строго возрастает на каждом из отрезков $[\pi+2\pi k,\ 2\pi+2\pi k]$, $k\in\mathbb{Z}$, на которых она принимает значения от -1 до 1 (четверти III, IV), и строго убывает на каждом из отрезков $[2\pi k,\ \pi+2\pi k]$, $k\in\mathbb{Z}$, на которых принимает значения от 1 до -1 (четверти I, II).

8° Для функции косинус точки $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ являются точками локального максимума и $y_{\max}=f(2\pi k)=1,$ а точки $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ являются точками локального минимума и $y_{\min}=f(\pi+2\pi k)=-1.$

9° График функции косинус изображен частично на рисунке 8.10.

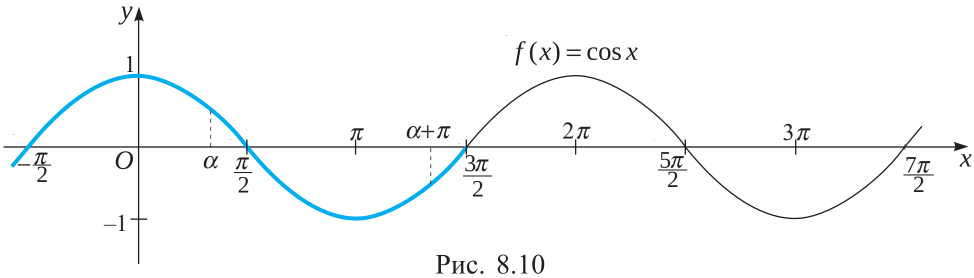


Рис. 8.10

III. Функция $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{tg}\, x$

1° $D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2° $E(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$. Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует такой угол α, при котором $\mathrm{tg}\alpha = a$, поскольку $\mathrm{tg}\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{1} = a$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 8.11).

Ордината точки пересечения полупрямой $[OM$ с касательной AB к тригонометрической окружности в точке $A(1,0)$ равна $\mathrm{tg}\alpha$. Поэтому прямая AB называется ***осью тангенсов***.

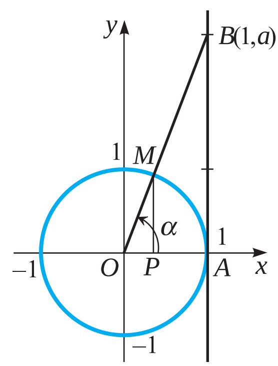


Рис. 8.11

3° Нули функции тангенс совпадают с нулями функции синус: $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4° Так как для любого $\alpha \in D(\mathrm{tg})$ имеем $\mathrm{tg}(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$, то функция тангенс – периодическая. Можно доказать, что ее основной период равен π.

5° Функция тангенс принимает положительные значения в I и III четвертях, где значения функций синус и косинус одинакового знака, и отрицательные значения – во II и IV четвертях, где значения функций синус и косинус различного знака.

6° Функция тангенс нечетная, так как для любого $\alpha \in D(\mathrm{tg})$ имеем:

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha.$$

7° Функция тангенс строго возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 8.12).

8° Функция тангенс не имеет экстремумов.

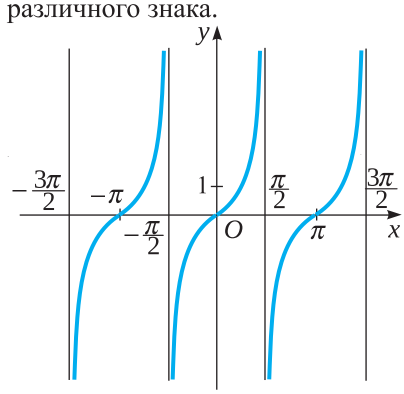


Рис. 8.12

9° График функции тангенс изображен частично на рисунке 8.12.

Замечание. Прямые $y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, являются ***вертикальными асимптотами*** графика функции $f(x)=\operatorname{tg}x$.

IV. Функция $f: D\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg}x$

1° $D(\operatorname{ctg})=\mathbb{R}\setminus\{\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2° $E(\operatorname{ctg})=\mathbb{R}$ (рис. 8.13). Абсцисса точки $B(a,1)$ равна $\operatorname{ctg}\alpha$, то есть $a=\operatorname{ctg}\alpha$. Поэтому прямая AB называется ***осью котангенсов***.

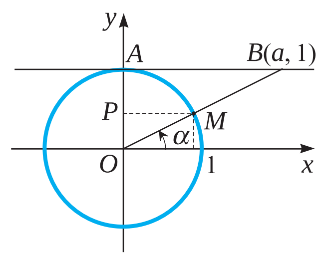


Рис. 8.13

3° Нулями функции котангенс являются значения

$$x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

4° Основной период функции котангенс равен π.

5° Функция котангенс принимает положительные значения в I и III четвертях и отрицательные – во II и IV четвертях.

6° Функция котангенс нечетная:

$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x,\ x\in D(\operatorname{ctg}).$$

7° Функция котангенс строго убывает на каждом из промежутков $(\pi k,\ \pi+\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$ (рис. 8.14).

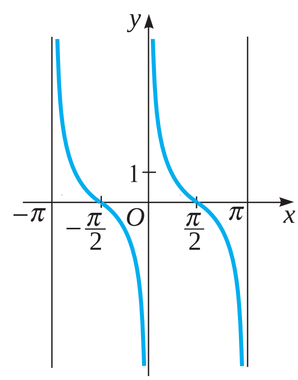


Рис. 8.14

8° Функция котангенс не имеет экстремумов.

9° График функции котангенс изображен частично на рисунке 8.14.

Приведем несколько примеров, которые решаются на основании свойств тригонометрических функций.

Задания с решением

1. Определим знак произведения $a=\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$.

Решение:

Заметим, что углы в $\frac{2\pi}{5}$ рад, $\frac{\pi}{4}$ рад принадлежат I четверти, угол в $\frac{2\pi}{3}$ рад – II четверти, угол в $\frac{4\pi}{3}$ рад – III четверти, угол в $\frac{5\pi}{3}$ рад – IV четверти. Так как $\cos\frac{2\pi}{5}>0,\ \sin\frac{2\pi}{3}>0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}>0,\ \cos\frac{4\pi}{3}<0,\ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}<0$, то число a положительно.

2. Определим знак значения выражения $\dfrac{\cos 10^\circ - \cos 9^\circ}{2 - \sin 2}$.

Решение:

Так как $0^\circ < 9^\circ < 10^\circ < 180^\circ$, а функция косинус на отрезке $[0^\circ, 180^\circ]$ строго убывающая, то $\cos 9^\circ > \cos 10^\circ$. Следовательно, $\cos 10^\circ - \cos 9^\circ < 0$, то есть числитель отрицательный. Знаменатель положительный, так как $\sin 2 < 1$. Таким образом, значение исходного выражения отрицательно.

1.4. Основные тригонометрические тождества

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ – соответствующая точка тригонометрической окружности. Так как координатами начала координат являются (0, 0), то для длины отрезка OM (радиус тригонометрической окружности) получаем:

$$1 = \sqrt{(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Отсюда следует ***основное тригонометрическое тождество***:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ \alpha \in \mathbb{R}.} \qquad (2)$$

Перемножив выражения для функций тангенса и котангенса (см. определения), получим:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \text{ или } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbb{Z}.}$$

Разделив обе части тождества (2) на $\sin^2\alpha$, или на $\cos^2\alpha$, получим:

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ \alpha \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.}$$

Упражнения и задачи

A

1. Выразите в радианах величину угла:

а) 45°, 20°, 110°;

б) 60°, –78°, 270°;

в) –120°, –31°, 180°;

г) 150°, –218°, –90°.

2. Выразите в градусах величину угла:

а) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, -2\pi$;

в) $\frac{2\pi}{7}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$;

г) $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}$.

3. Вычислите значение выражения:

а) $\sin 90^\circ + \cos 270^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $\operatorname{tg}\pi - \cos^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

в) $5\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin 2\pi$;

г) $-4\sin\frac{3\pi}{2} + 0{,}5\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}$.

4. Возможно ли, чтобы синус и косинус одного и того же угла соответственно были бы равны:

а) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{7}{25}$ и $-\frac{24}{25}$; в) 0,3 и 0,9; г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}$?

5. Возможно ли, чтобы тангенс и котангенс одного и того же угла соответственно были бы равны:

а) $\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$; б) $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{7}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $\sqrt{5}-2$ и $\sqrt{5}+2$?

6. Упростите выражение:

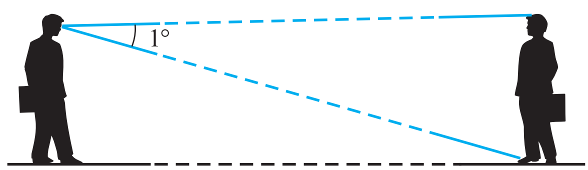
а) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\sin\alpha-\sin^3\alpha-\cos\alpha+\cos^3\alpha$;

в) $\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{4}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-5$; г) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

7. Найдите гипотенузу и величины углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны: а) 4 см и $4\sqrt{3}$ см; б) 1 см и $\sqrt{3}$ см.

8. Найдите величины углов ромба, если его сторона равна 2 см, а высота $\sqrt{2}$ см.

9. Найдите расстояние между двумя людьми (их рост равен 1,7 м), если один из них видит другого под углом 1°?



Б

10. Найдите область определения функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; б) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}$; в) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

11. Определите знак произведения $\cos110^\circ\sin\frac{5\pi}{3}\cos(-10^\circ)\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

12. Дана функция $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x\cos x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Вычислите:

а) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

13. Пользуясь монотонностью тригонометрических функций, определите знак значения выражения:

а) $\frac{\operatorname{tg}100^\circ-\operatorname{tg}160^\circ}{\sin(-10^\circ)-\sin(-20^\circ)}$; б) $\frac{\operatorname{tg}111^\circ-\operatorname{tg}105^\circ}{\sin15^\circ-\cos10^\circ}$; в) $\frac{\sin1-\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}-\operatorname{tg}2}$.

14. Исследуйте на четность функцию, заданную формулой:

а) $f(x)=\sin x+\cos x$; б) $f(x)=\sin^2x+2$; в) $f(x)=\sin2x+\sin^3x$.

15*. Найдите множество значений функции, заданной формулой:

а) $f(x)=3\cos x$; б) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$; в) $f(x)=\frac{4}{\cos x}$.

16*. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; б) $f(x)=3\sin2x$; в) $f(x)=|\cos x|$; г) $f(x)=\frac{1}{2}|\sin x|$.

§ 2 Преобразования тригонометрических выражений

2.1. Формулы сложения

а) Пусть $\alpha \geq \beta, \ \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, $m(\angle AOM_2) = \beta, \ m(\angle AOM_1) = \alpha$, где $A(1, 0), \ M_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $M_2(\cos\beta, \sin\beta)$ – точки тригонометрической окружности (рис. 8.15).

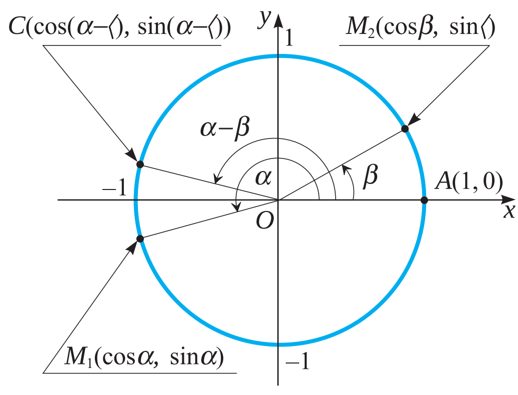


Рис. 8.15

Найдем выражение для $\cos(\alpha - \beta)$. Выберем на тригонометрической окружности точку C, удовлетворяющую условию $l_{\smile AM_2C} = l_{\smile ACM_1} - l_{\smile AM_2}$. Это означает, что $m(\angle AOC) = \alpha - \beta$.

Так как дуги AM_2C и M_2CM_1 конгруэнтны, то и соответствующие им хорды также конгруэнтны, то есть $AC = M_1M_2$. Учитывая координаты точек $A(1, 0), \ M_2(\cos\beta, \sin\beta)$, $C(\cos(\alpha-\beta), \ \sin(\alpha-\beta)), \ M_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и применив формулу вычисления длины отрезка, получим:

$$AC^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2 =$$

$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta); \quad (1)$$

$$M_1M_2^{\ 2} = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha -$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. (3)

б) Пусть $\beta > \alpha, \ \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Поскольку косинус – четная функция, то $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha)$. Заменив в формуле (3) $\cos(\alpha-\beta)$ на $\cos(\beta-\alpha)$, получим:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Известно, что любые действительные числа $\alpha^*, \ \beta^*$ (которые являются величинами углов в радианах) могут быть записаны в виде $\alpha^* = \alpha + 2k\pi, \ \beta^* = \beta + 2n\pi, \ k, n \in \mathbb{Z}$, где $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Обобщая сказанное для любых действительных чисел α, β, на основании периодичности функций синус и косинус получаем формулу:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \quad (4)$$

Поскольку $\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, учитывая четность или нечетность соответствующих тригонометрических функций, выводим:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \quad (5)$$

Примеры

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos t + \sin\frac{\pi}{2}\sin t = \sin t$. Итак, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$.

2 Заменив в формуле примера 1 t на $\frac{\pi}{2}-t$, получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=\cos t.$$

Выведем формулу для $\sin(\alpha-\beta)$ при помощи формулы (5) и формул, выведенных в примерах 1, 2:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом, получили формулу

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \text{ для любых } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \qquad (6)$$

Из формулы (6) и учитывая свойства соответствующих тригонометрических функций, можно вывести (докажите!) следующую формулу:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \text{ для любых } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \qquad (7)$$

Задание с решением

Вычислим $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Решение:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Аналогично можно вывести формулы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (8)$$

для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, таких, что существуют соответствующие тангенсы и $1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$.

Задание. Пользуясь формулами (4)–(7), выведите формулы (8).

2.2. Формулы приведения

Известно, что любой угол β, измеренный в радианах, может быть записан в виде $\beta=\frac{\pi}{2}k+\alpha,\ k\in\mathbb{Z},\ 0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда на основании формул, доказанных в п. 2.1., можно свести вычисление значений тригонометрических функций произвольного угла β к вычислению значений этих функций угла α.

Примеры

1 $\sin(\alpha+\pi)=\sin\alpha\cos\pi+\cos\alpha\sin\pi=-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha.$

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha;$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$

3 $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$

Замечание. Функция sin (функция tg) называется ***кофункцией*** для функции cos (функции ctg), и наоборот.

Для облегчения вычисления значений тригонометрических функций можно применить следующее мнемоническое правило, названное ***правилом приведения***:

1) значение любой тригонометрической функции для угла $\beta=\frac{\pi}{2}k\pm\alpha,\ k\in\mathbb{Z}$, равно значению этой же функции для угла a при четном k и равно значению соответствующей кофункции для угла a при нечетном k;
2) знак результата совпадает со знаком значения исходной функции, учитывая четверть в которой находится угол $\frac{\pi}{2}k\pm\alpha$ и считая, что $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (вне зависимости от величины a).

Задание с решением

Вычислите $\sin 1020°$.

Решение:

$\sin 1020°=\sin(90°\cdot 11+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, так как k = 11 нечетное число и 1020° принадлежит IV четверти, в которой функция синус принимает отрицательные значения.

2.3. Формулы для тригонометрических функций двойного, тройного угла (аргумента)

Полагая в (5) и (7), что $\beta=\alpha$, получим формулы:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \tag{9}$$

которые называются ***формулами косинуса и синуса двойного аргумента (угла)***.

Полагая в первой из формул (8), что $\beta=\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ определены при заданном α, получим следующую формулу для тангенса двойного аргумента:

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{2},\ \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}.} \tag{10}$$

Для тригонометрических функций тройного аргумента выводятся формулы:

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.} \tag{11}$$

Задание. Докажите формулы (10) и (11).

Выведем две формулы, которые называются ***формулами понижения степени тригонометрических функций***.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad (12)$$

Применив формулы (12), можем понизить степени с четным показателем тригонометрических функций до первой степени. Например,

Пример

$$\cos^2\frac{\pi}{24} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

2.4. Формулы преобразования суммы в произведение

Имеем $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$

$$+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Следовательно, $\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.}$

Аналогично получаем

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (13)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Задание. Выведите формулы (13).

Задание с решением

Упростим выражение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$.

Решение:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \sqrt{2}\sin x.$$

Пользуясь формулами (13), докажем ***монотонность*** тригонометрических функций (см. § 1).

Пусть, например, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$. Для разности $A = \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1$ имеем: $A = 2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Так как $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} > 0$, $\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > 0$, $A > 0$. Следовательно, $\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$, то есть функция синус на заданном промежутке строго возрастает.

Аналогично доказывается монотонность функций косинус, тангенс, котангенс (см. § 1). (Докажите!)

Упражнения

A

1. Вычислите:

а) $3\cos 0° - 2\sin\frac{\pi}{2} + 6\operatorname{tg}\pi$; б) $\sin 270° + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 90° - 2\cos 0°$;

в) $\operatorname{tg} 60° \cos 60° - 4\sin 90° \cos 45°$; г) $\cos 60° + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 30° \cdot \sin 30°$.

2. Найдите значение выражения:

а) $E = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi$; б) $E = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

3. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$ и угол α лежит в I четверти;

в) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Вычислите:

а) $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и $\sin\beta = \frac{3}{4}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и $\cos\beta = \frac{1}{4}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Вычислите:

а) $\sin 50° \cos 40° + \cos 50° \sin 40°$; б) $\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{10}$;

в) $\sin 110° \cos 70° - \cos 110° \sin(-70°)$; г) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{10}$.

6. Установите, существует ли такой угол α, при котором:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\cos\alpha = \frac{8}{41}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}25$; г) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$.

7. Упростите выражение:

а) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$; б) $2\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}2\alpha$; в) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \mathrm{ctg}^2 2\alpha$;

г) $\mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$; д) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; е) $\dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 1}{\cos\alpha}$.

8. Используя формулы понижения степени, упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha - \cos 2\alpha$; в) $\cos^2\alpha + \cos 2\alpha$.

Б

9. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Найдите $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2{,}5$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi n}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

11. Докажите, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно равенство:

а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

б) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

в) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$;

г) $(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) = (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\beta - \cos\alpha)$.

12. Докажите тождество:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

13. Докажите, что:

а) $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha) - \sin\alpha = \cos\alpha - \cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi n}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{2}{\mathrm{tg}\alpha}$ при $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}2\alpha}$ при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

14. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; б) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta$, если $\sin^2\alpha - \cos^2\beta = 0{,}8$;

в) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$; г) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, если $\mathrm{tg}\alpha = 2$, $\mathrm{tg}\beta = -1$, $\mathrm{tg}\gamma = 1$.

15. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos^4(\pi-\alpha)}{\cos^4\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) - 1}$; б) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha} + \sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}{\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha} - \sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$.

16. Докажите тождество:

а) $\sin 2\alpha \sin 2\beta = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

б) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \dfrac{2}{3}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;

в) $\dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$, где α, β, γ – величины углов треугольника;

г) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$, где α, β, γ – величины углов треугольника.

17. Докажите, что, если в треугольнике ABC:

а) $\cos B+\cos C=\sin B+\sin C$, то треугольник прямоугольный;

б) $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$, то треугольник прямоугольный или равнобедренный;

в) $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$, то треугольник равнобедренный;

г) $\cos A+\cos B-\cos(A+B)=\frac{3}{2}$, то треугольник равносторонний.

18. Найдите высоту прямоугольной трапеции, описанной около окружности, если a – острый угол трапеции, а $\mathscr{P}$ – ее периметр.

19. Составьте:

а) тригонометрическое тождество;

б) геометрическую задачу, решение которой требует применения элементов тригонометрии.

20. Приведите примеры применения элементов тригонометрии в различных областях.

§3 Тригонометрические уравнения

3.1. Обратные тригонометрические функции

При преобразовании тригонометрических функций (см. §2) возникают ситуации, в которых необходимо вычислить значение некоторой тригонометрической функции, зная значение другой тригонометрической функции того же угла или для кратного ему угла. Этот факт (и ряд других) ставит задачу нахождения угла, если известно значение некоторой тригонометрической функции для этого угла. Рассмотрим тригонометрические функции только на промежутках, где они обратимы, т. е. некоторые их сужения, а именно рассмотрим функции:

$$f_1\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1],\ \ f_1(x)=\sin x;\quad f_2\colon [0,\pi]\to[-1,1],\ \ f_2(x)=\cos x;$$

$$f_3\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ \ f_3(x)=\operatorname{tg}x;\quad f_4\colon (0,\pi)\to\mathbb{R},\ \ f_4(x)=\operatorname{ctg}x.$$

Эти функции являются обратимыми. Обратные им функции обозначаются arcsin, arccos, arctg, arcctg и соответственно читаются: „арксинус“, „арккосинус“, „арктангенс“, „арккотангенс“.

Определение. Функции $\arcsin\colon [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ g_1(x)=\arcsin x;$

$\arccos\colon [-1,1]\to[0,\pi],\ \ g_2(x)=\arccos x;$

$\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ g_3(x)=\operatorname{arctg}x;$

$\operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R}\to(0,\pi),\ \ g_4(x)=\operatorname{arcctg}x,$

называются **обратными тригонометрическими функциями**.

Итак, на основании определения обратных функций получаем:

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ x\in[-1, 1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \qquad (1)$$

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ x\in[-1, 1],\ y\in[0, \pi]; \qquad (2)$$

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \qquad (3)$$

$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x,\ x\in\mathbb{R},\ y\in(0, \pi). \qquad (4)$$

Примеры

1. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, поскольку $\frac{2\pi}{3}\in[0, \pi]$ и $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

Чтобы найти значения обратных тригонометрических функций, можем воспользоваться таблицей значений тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс (таб. 1) на соответствующих промежутках, поменяв в ней местами значения аргументов и значения функций (таб. 2, 3).

Таблица 2

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Таблица 3

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Можно доказать, что:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x\in\mathbb{R}; \qquad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R};$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x\in\mathbb{R}; \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Из определений обратных тригонометрических функций и соотношений (1)–(4) вытекают ***соотношения*** (***тождества***) (5)–(9):

$$\sin(\arcsin x) = x,\ x\in[-1, 1]; \quad \arcsin(\sin x) = x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (5)$$

$$\cos(\arccos x) = x,\ x\in[-1, 1]; \quad \arccos(\cos x) = x,\ x\in[0, \pi]. \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ x \in \mathbb{R};\quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ x \in \mathbb{R};\quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0, \pi). \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1, 1];\\ &\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1, 1];\\ &\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Задание с решением

Найдем области определения функций $f, h: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(2x-1)$, $h(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2x-2}$.

Решение:

В силу определения функции арккосинус имеем $-1 \le 2x-1 \le 1$, откуда $0 \le x \le 1$. Следовательно, $D(f) = [0, 1]$. Аргумент функции арккотангенс может принимать любое действительное значение, поэтому достаточно, чтобы знаменатель отношения $\dfrac{x-3}{2x-2}$ не превращался в нуль. Таким образом, $D(h) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Графики обратных тригонометрических функций симметричны графикам соответствующих тригонометрических функций относительно биссектрисы I и III четвертей. Графики функций arcsin, arccos, arctg и arcctg изображены в итоговой таблице „Тригонометрические функции и их свойства“ данного модуля.

3.2. Тригонометрические уравнения

Задача. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в 2 раза больше площади ее основания. Найдем величину угла CDB в равнобедренном треугольнике CDB (рис. 8.16).

Решение:

Пусть $AB = a$, $m(\angle CDE) = \alpha$, где $DE \perp BC$.

Имеем $\mathcal{A}_{\text{осн.}} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ и $\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \dfrac{1}{2}\mathcal{P}_{\text{осн.}} \cdot DE$. Так как $CE = \dfrac{a}{2}$, из треугольника CED $(m(\angle E) = 90°)$ получим:

$\dfrac{DE}{CE} = \operatorname{ctg}\alpha$, $DE = CE \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. Поскольку $\mathcal{A}_{\text{бок.}} = 3\mathcal{A}_{\text{осн.}}$, получаем $3a \cdot \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha = 2 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

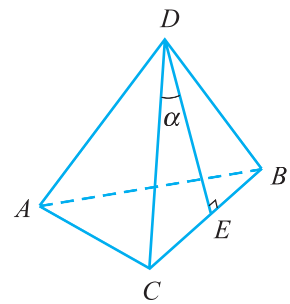


Рис. 8.16

Таким образом, решение задачи свелось к решению уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, которое является *тригонометрическим уравнением*.

Решив это уравнение (далее изучим метод решения таких уравнений) и учитывая, что $\angle CDE$ – острый, получим $m(\angle CDE) = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{3} = 60°$.

Итак, $m(\angle CDB) = 2 \cdot m(\angle CDE) = 120°$. *Ответ*: $120°$.

Определение. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрических функций, называются **тригонометрическими уравнениями**.

1 *Простейшие тригонометрические уравнения*

Определение. Тригонометрические уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где $a \in \mathbb{R}$, называются **простейшими тригонометрическими уравнениями**.

Найдем общие формулы решений простейших тригонометрических уравнений. Решения этих уравнений можно проиллюстрировать двумя способами:

1) пользуясь тригонометрической окружностью;

2) используя графики тригонометрических функций.

1 Уравнение $\sin x = a$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Проиллюстрируем решение этого уравнения при помощи тригонометрической окружности. Построим тригонометрическую окружность и прямую $y = a$ (рис. 8.17).

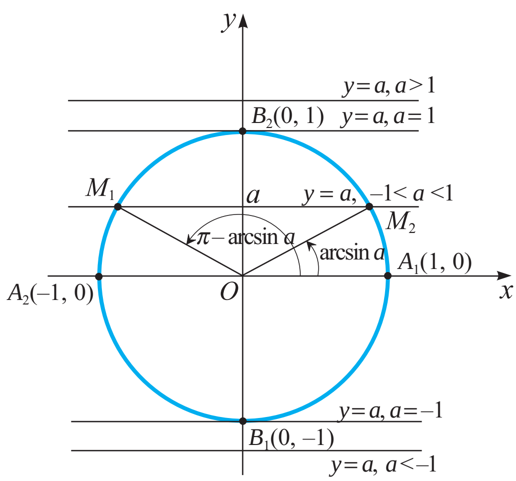


Рис. 8.17

Решениями уравнения $\sin x = a$ являются величины углов (в радианах или градусах), образованных положительной полуосью Ox и полупрямыми ($[OM_1$, $[OM_2$ и т. д.), соответствующими точкам окружности с ординатой a. Значит, при $|a| > 1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений.

Если $a = 1$, то единственная точка с ординатой 1 (точка пересечения окружности с прямой $y = 1$) – это $B_2(0, 1)$. Следовательно, частным решением уравнения $\sin x = 1$ является значение $x_0 = \frac{\pi}{2}$. На основании периодичности функции синус получаем все решения уравнения $\sin x = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Аналогично для $a = -1$ (точка $B_1(0, -1)$) получаем все решения уравнения $\sin x = -1$:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Если $a = 0$, то на окружности существуют точки $A_1(1, 0)$ и $A_2(-1, 0)$ с ординатой 0. Значит, частными решениями уравнения $\sin x = 0$ являются значения $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$.

Учитывая периодичность функции синус, получаем все решения уравнения $\sin x = 0$ в виде: $x = 0 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или их объединение:

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Если $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, то прямая $y = a$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках, M_1 и M_2, с ординатой a (рис. 8.17). Эти точки симметричны относительно оси ординат. Следовательно, частными решениями уравнения $\sin x = a$ являются значения $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$. Учитывая периодичность функции синус, получаем все решения уравнения $\sin x = a$ для $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

или объединение этих решений:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.} \qquad (13)$$

Для $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$ из (13) получаем частные решения (10)–(12). Таким образом, (13) является общей формулой решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$.

Итак, множеством решений уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, является:

$$\boxed{S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

По формуле (13) получим:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $S = \{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Замечание. Уравнение $\sin x = a$, где $a \in [-1, 1]$, имеет на множестве $\mathbb{R}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = a$ (рис. 8.18).

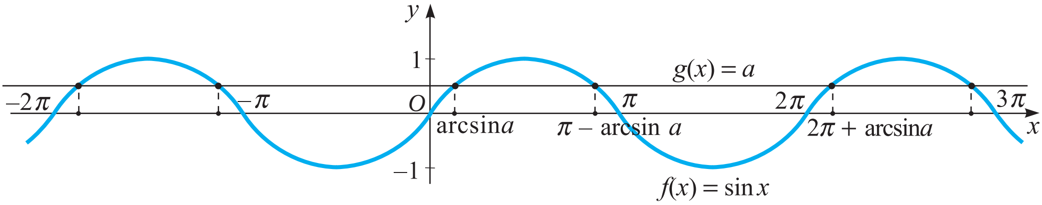


Рис. 8.18

Внимание!

При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

2 Уравнение $\cos x = a$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Даны тригонометрическая окружность и прямая $x = a$ (рис. 8.19).

Решениями уравнения $\cos x = a$ являются величины углов, образованных положительной полуосью $[Ox$ и полупрямыми ($[ON_1$, $[ON_2$, $[OD_1$, $[OD_2$ и т. д.), соответствующими точкам тригонометрической окружности с абсциссой a. При $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ не имеет решений.

Аналогично решению уравнения $\sin x = a$, пользуясь рисунком 8.19 и учитывая периодичность функции косинус, получим общую формулу решений простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

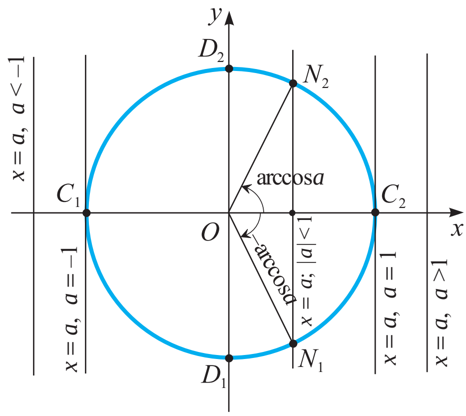


Рис. 8.19

Следовательно, множеством решений уравнения $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, является:

$$\boxed{S = \{\pm \arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (14)$$

Задание. Докажите формулу (14).

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

Согласно формуле (14) получаем решения:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

откуда $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, то есть, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Замечание. Уравнение $\cos x = a$, где $a \in [-1, 1]$, имеет на множестве $\mathbb{R}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = a$ (рис. 8.20).

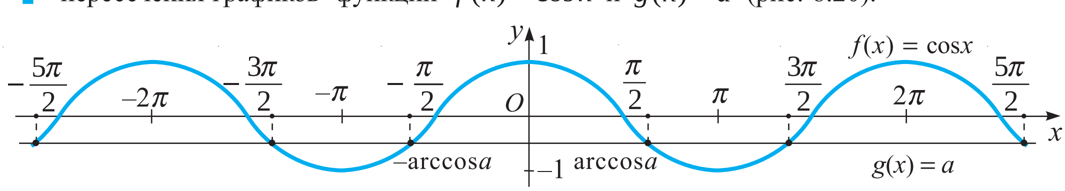


Рис. 8.20

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\arccos a \in [0, \pi]$ и $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

3 Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Так как $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$, то уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения для любого $a \in \mathbb{R}$.

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = a$, используя тригонометрическую окружность и ось тангенсов A_1T (рис. 8.21). Для любого числа a на оси тангенсов есть только одна точка $T(1, a)$ с ординатой a. Прямая OT пересекает тригонометрическую окружность в двух точках (P и P_1). Значит, существуют два угла α и $\pi + \alpha$, тангенс которых равен a, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha = \operatorname{arctg} a$.

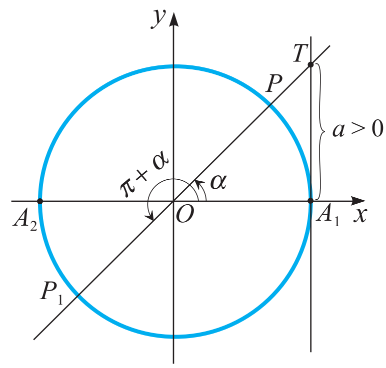


Рис. 8.21

Тогда частным решением уравнения $\operatorname{tg} x = a$ является значение $x_1 = \operatorname{arctg} a$. Аналогично решениям уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, пользуясь рисунком 8.21 и учитывая периодичность функции тангенс, получаем общую формулу решений простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Для $a = 0$ получим формулу для вычисления всех решений уравнения $\operatorname{tg} x = 0$:

$$x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, множеством решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, является:

$$\boxed{S = \{\operatorname{arctg} a + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (15)$$

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение:

По формуле (15) $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Замечание. Итак, уравнение $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, имеет на множестве $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(x) = a$ (рис. 8.22).

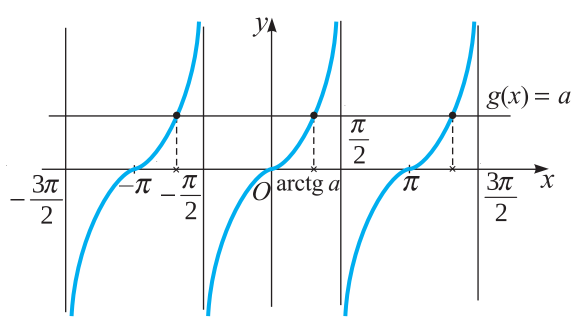


Рис. 8.22

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

4 Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Так как $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$, то уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения для любого $a \in \mathbb{R}$.

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, используя тригонометрическую окружность и ось котангенсов A_1T (рис. 8.23).

Аналогично уравнению $\operatorname{tg} x = a$, для простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, получаем общую формулу его решений:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Для $a = 0$ получим формулу для вычисления всех решений уравнения $\operatorname{ctg} x = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

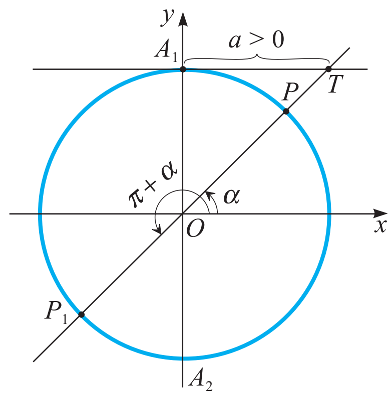


Рис. 8.23

Итак, множеством решений уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, является:

$$\boxed{S = \{\operatorname{arcctg} a + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (16)$$

Задание. Выведите формулу (16).

Замечание. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, имеет на множестве $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \operatorname{ctg} x$ и $g(x) = a$. (Постройте!)

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\operatorname{arcctg} a \in (0, \pi)$ и $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Решение:

Согласно формуле (16), $x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Значит, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2 Тригонометрические уравнения вида $f(\sin x) = 0,\ f(\cos x) = 0,\ f(\mathrm{tg}\, x) = 0,\ f(\mathrm{ctg}\, x) = 0$

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком только одной тригонометрической функции, решаются ***методом введения вспомогательного неизвестного***, приводящим исходное уравнение к такому уравнению, которое не содержит тригонометрических функций.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\cos^2 x + 2\sin x + 2 = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \le 1$. Последнее уравнение сводится к алгебраическому уравнению II степени $t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющему решения $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Уравнение $\sin t = 3$ решений не имеет.

Решениями уравнения $\sin x = -1$ являются значения $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3 Однородные тригонометрические уравнения

Определение. Тригонометрические уравнения вида

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0 \qquad (17)$$

называются **однородными тригонометрическими уравнениями *n*-ой степени, $n \in \mathbb{N}^*$, относительно $\sin x$ и $\cos x$.**

Уравнения вида (17) решаются делением обеих частей уравнения на $\cos^n x$ при $a_n \ne 0$ (на $\sin^n x$ при $a_0 \ne 0$), если $\cos x$ (соответственно $\sin x$) не является общим множителем.

Получаем равносильное уравнение $a_n \mathrm{tg}^n x + a_{n-1}\mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_1 \mathrm{tg}\, x + a_0 = 0$, которое заменой $\mathrm{tg}\, x = t$ сводится к алгебраическому уравнению:

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0.$$

Действительно, если $a_n \ne 0$ $(a_0 \ne 0)$, то не существует угла φ, для которого $\cos\varphi = 0$ $(\sin\varphi = 0)$, потому что, если бы такой угол существовал, то, заменив в первоначальном уравнении x на φ, получили бы $a_n \sin^n \varphi = 0$ $(a_0 \cos^n \varphi = 0)$ или $\sin\varphi = 0$ $(\cos\varphi = 0)$. Однако не существует угла, для которого функции синус и косинус принимали бы одновременно значение 0. Значит, деление обеих частей однородного уравнения (17) на $\cos^n x$ (соответственно на $\sin^n x$) приводит к равносильному уравнению.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\cos^2 x - \sin x \cos x + 4\sin^2 x = 2$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Подставив в заданное уравнение $2 = 2 \cdot 1 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$, получим однородное уравнение $\cos^2 x + \sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$. Деление его обеих частей на $\cos^2 x$ приводит к равносильному уравнению $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$.

Пусть $\operatorname{tg} x = t$. Тогда получаем алгебраическое уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, имеющее решения $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Вернувшись к неизвестному x, получаем совокупность тригонометрических уравнений $\operatorname{tg} x = -2$; $\operatorname{tg} x = 1$, множествами решений которых являются соответственно множества $S_1 = \{-\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $S_2 = \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ответ: $S = \{-\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Внимание! Если при решении тригонометрических уравнений возможно применение *метода разложения на множители* (особенно при решении однородных тригонометрических уравнений), то сначала применяем этот метод, а затем – другие методы решения полученных уравнений. В противном случае можем потерять решения на первом же этапе решения.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ однородное уравнение $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = 0$.

Решение:

$\cos x$ является общим множителем левой части.

Решая уравнение методом разложения на множители, получаем уравнение $\cos x(\cos x - 3\sin x) = 0$, равносильное совокупности $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x - 3\sin x = 0.\end{array}\right.$

Множествами решений этих уравнений являются соответственно множества $S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $S_2 = \left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ответ: $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Замечание. Если бы мы поделили обе части первоначального уравнения на $\cos^2 x$, то потеряли бы решения вида $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (решения уравнения $\cos x = 0$).

4 *Тригонометрические уравнения вида* $a\sin x + b\cos x = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$

Рассмотрим несколько методов решения уравнений этого вида.

1 Метод сведения к однородному уравнению

Так как $\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, а $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$, то в общем случае уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ сводится к однородному уравнению вида

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\cos^2\frac{x}{2} - b\sin^2\frac{x}{2} - c\cos^2\frac{x}{2} - c\sin^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-c)\cos^2\frac{x}{2}+2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-(b+c)\sin^2\frac{x}{2}=0 \quad (18).$$

Если $b+c=0$, то выражение из левой части уравнения (18) можно разложить на множители, и получим два простейших тригонометрических уравнения.

Если $b+c\neq 0$, то, разделив обе части уравнения (18) на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим равносильное уравнение $(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(b-c)=0$ (19).

Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда уравнение (19) приводится к уравнению

$$(b+c)t^2-2at-(b-c)=0,$$

имеющему решения $t_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$, $t_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$.

Решения уравнений $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_2$ являются решениями исходного уравнения.

Замечание. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=c$ имеет решения, если и только если $a^2+b^2\geq c^2$. При $b=-c$ уравнение сводится к простейшему тригонометрическому уравнению вида $\operatorname{tg}t=a$, а при $b=c$ применяется метод разложения на множители. При $c=0$ получаем однородное тригонометрическое уравнение I степени.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2\sin x+3\cos x=1$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Приводим исходное уравнение (оно имеет решение, так как $2^2+3^2\geq 1^2$) к однородному: $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}-3\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0$. Разделив обе части последнего уравнения на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим равносильное уравнение $2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0$. После подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ получаем алгебраическое уравнение $2t^2-2t-1=0$, имеющее решения $t_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $t_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Вернувшись к неизвестному x, получаем совокупность уравнений $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, решениями которой являются множества:

$$S_1=\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{3}}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\},\quad S_2=\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{2}+2n\pi \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Ответ: $S=\left\{2\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+2n\pi \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2 Метод введения вспомогательного угла

Разделив обе части уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ (20) на a, $a \in \mathbb{R}^*$, получим равносильное уравнение $\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$ (21).

Пусть $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Угол α называется ***вспомогательным углом***. Подставив $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$ в уравнение (21), получим:

$$\sin x + \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha.$$

Решения последнего уравнения являются решениями уравнения (20).

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{3}$, получим уравнение $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 1$. Имеем $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, $\alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда исходное уравнение сводится к уравнению $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3 Метод сведения к системе алгебраических уравнений

Дано уравнение $a\sin x + b\cos x = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Учитывая, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$, и полагая, что $\sin x = u$, $\cos x = v$, сводим заданное уравнение к системе алгебраических уравнений $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ au + bv = c. \end{cases}$ Решив эту систему и вернувшись к произведенным подстановкам, получим решения исходного уравнения.

5 *Решение тригонометрических уравнений с отбором решений*

Иногда требуется не только решить соответствующее тригонометрическое уравнение, но и отобрать те решения, которые удовлетворяют некоторым заданным изначально условиям: принадлежат заданному числовому промежутку, являются решениями других уравнений или неравенств и т. д. Рассмотрим процедуру отбора решений на конкретном примере.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $3(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x = 0$ и найдем его решения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Вводим новое неизвестное $\sin x + \cos x = t$. Тогда $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ и исходное уравнение сводится к квадратному уравнению $2t^2 - 3t - 2 = 0$, имеющему решения $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Вернувшись к неизвестному x, получим совокупность уравнений: $\sin x + \cos x = 2$; $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$.

Решаем второе уравнение методом введения вспомогательного угла и получаем уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, имеющее решения $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Для отбора решений, принадлежащих отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, рассмотрим два случая:

1) Пусть $k = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Так как $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, то $-\pi \le -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \le 2\pi n \le \frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

Значит, $-\frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \le n \le \frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

Выполнив соответствующие вычисления $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{\pi}{9}\right)$, делаем вывод, что $n = 0$.

Тогда $x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0$, или $x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$, то есть только одно решение принадлежит отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Пусть $k = 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi(2n+1),\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Так как $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, то $-\pi \le \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

Выполнив соответствующие вычисления $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{\pi}{9}\right)$, делаем вывод, что $n \in \varnothing$.

Объединение полученных в обоих случаях решений, образует множество решений исходного уравнения, принадлежащих указанному отрезку.

Ответ: $S = \left\{-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}\right\}$.

Замечание. Этим примером мы показали, как можно применить ***метод введения вспомогательного неизвестного*** при решении уравнений вида

$$f(\sin x \pm \cos x,\ \sin x \cos x) = 0.$$

Упражнения и задачи

Б

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

1. а) $\sin 2x = \sqrt{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; г) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

2. а) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos 5x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{1}{2}$.

3. а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg} 2x = 25$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{5}\right) = \sqrt{3}$.

4. а) $\cos^2 \frac{5x}{2} = \frac{1}{4}$; б) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;
г) $1 - \cos^2(3x - 2) = \cos\frac{\pi}{3}$; д) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin 6x$; е) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2\cos 3x$.

5. а) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; б) $\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0$;
в) $\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 12 = 0$; г) $2\cos^2 5x + \sin 5x + 1 = 0$.

6. а) $\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} = 0$; б) $4\sin x - 3\cos x = 0$;
в) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = \sin 2x$; г) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$.

7. а) $\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$;
в) $5\sin x + \cos x = 5$; г) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 3x$.

8. а) $\cos 2x = \sin x - \cos x$; б) $\sin 2x = 1 - \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
в) $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 1$; г) $\sin^4 2x - \cos^4 2x = 1$;
д) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; е*) $\sin x \sin 3x \cos 5x = 1$;
ж) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$; з) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;
и) $\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} = \sqrt{2}\sin\frac{5x}{2}$; к) $\frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x} = 1 - \sin 4x$.

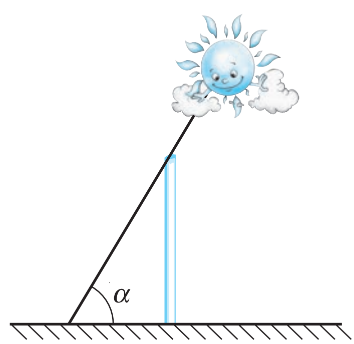
9. Найдите действительные решения тригонометрического уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

а) $1 - \sin 2x + \sin x - \cos x = 0, \ -\frac{3\pi}{4} \le x \le \pi$;

б*) $2\sin 5x \sin\frac{3}{2}x = \cos\frac{x}{2}, \ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

в) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0, \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

г) $2\cos^2 x - 7\cos x + 2 = 0, \ x \in (0, \pi)$.



10. Вертикальный столб высотой 7 м оставляет тень длиной 4 м. Найдите (в градусах) высоту солнца над линией горизонта.

11. Стороны четырехугольника, вписанного в окружность, равны $a=10$ см, $b=4$ см, $c=2$ см, $d=8$ см (в этой последовательности). Найдите величину угла, образованного сторонами a и b.

12. Отношение площади боковой поверхности к площади основания правильной треугольной пирамиды равно $\sqrt{2}$. Найдите величину угла, образованного боковым ребром и высотой пирамиды.

13. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с соответствующими сторонами основания углы α и β. Найдите величину угла, образованного диагональю параллелепипеда с соответствующей диагональю его основания.

14. Известно, что две стороны треугольника равны l и m, а биссектриса угла, образованного этими сторонами, равна b. Найдите величину этого угла.

15. Составьте и решите тригонометрическое уравнение:
а) однородное; б) вида $a\sin x+b\cos x=c,\ a,b\in\mathbb{R}^*$;
в) сводимое к алгебраическому уравнению.

16*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:
а) $a\sin^2 x+\sin x-1=0$; б) $(a+1)\sin^2 x-2\sin x+a-1=0$;
в) $(2a+1)\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}2x-a=0$; г) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=3a-1$.

§ 4 Тригонометрические неравенства

4.1. Понятие тригонометрического неравенства

Определение. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком тригонометрических функций, называются **тригонометрическими неравенствами**.

Тригонометрические неравенства можно решать, используя свойства тригонометрических функций (периодичность, монотонность, соответствующие тождества и др.) и/или применяя общие методы решения неравенств (в том числе, метод интервалов). Поскольку проверка решений тригонометрических неравенств в общем случае практически невозможна, проследим за тем, чтобы производимые в процессе решения преобразования приводили к равносильным неравенствам.

Решение тригонометрических неравенств обычно сводится к решению простейших тригонометрических неравенств или систем (совокупностей) простейших тригонометрических неравенств.

4.2. Простейшие тригонометрические неравенства

Определение. Неравенства вида $\sin x>a$, $\sin x<a$, $\sin x\ge a$, $\sin x\le a$, $\cos x>a$, $\cos x<a$, $\cos x\ge a$, $\cos x\le a$, $\operatorname{tg}x>a$, $\operatorname{tg}x<a$, $\operatorname{tg}x\ge a$, $\operatorname{tg}x\le a$, $\operatorname{ctg}x>a$, $\operatorname{ctg}x<a$, $\operatorname{ctg}x\ge a$, $\operatorname{ctg}x\le a$ $(a\in\mathbb{R})$ называются **простейшими тригонометрическими неравенствами**.

Простейшие тригонометрические неравенства (аналогично простейшим тригонометрическим уравнениям) можно решить:

1) пользуясь тригонометрической окружностью;
2) используя графики тригонометрических функций.

Считаем более удобным рассмотрение решений простейших тригонометрических неравенств на тригонометрической окружности.

Задание с решением

Решим на $\mathbb{R}$ неравенство $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

ОДЗ: $t \in \mathbb{R}$. Сначала решаем неравенство на отрезке $[0, 2\pi]$ длиной 2π. Построим тригонометрическую окружность и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 8.24). Все точки тригонометрической окружности, ординаты которых удовлетворяют первоначальному неравенству, составляют дугу P_1P_2, а соответствующие им углы t удовлетворяют двойному неравенству $t_1 < t < t_2$. Этой дуге соответствует центральный угол P_1OP_2.

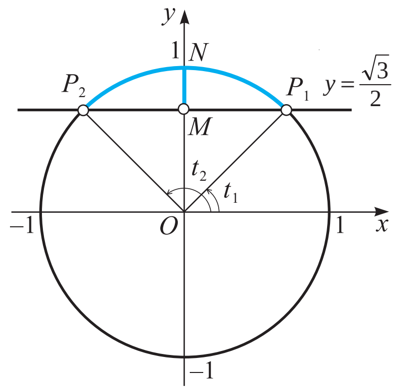


Рис. 8.24

Точке P_1 соответствует значение $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, а точке P_2 – значение $t_2 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Итак, все решения первоначального неравенства, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$ длины 2π, удовлетворяют двойному неравенству $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$.

Поскольку функция синус периодична и ее основной период равен 2π, все остальные решения заданного неравенства можно получить, прибавив к каждому из найденных решений на этом отрезке числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

a1 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\boldsymbol{\sin t > a}$ (1)

1) При $a \geq 1$ неравенство (1) не имеет решений.

2) При $a < -1$ решением неравенства (1) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

3) Пусть $-1 \leq a < 1$, $\alpha = \arcsin a$. Учитывая периодичность функции синус, получаем значения t, $\arcsin a + 2\pi k < t < \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которые являются решениями неравенства (1) (рис. 8.25).

Итак, множеством решений неравенства (1) является:

$$\boxed{S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi k,\ \pi - \arcsin a + 2\pi k).}$$

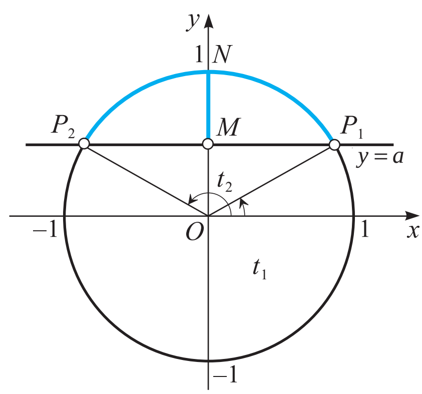


Рис. 8.25

a2 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\boldsymbol{\sin t < a}$ (2)

1) При $a > 1$ решением неравенства (2) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

2) При $a \leq -1$ неравенство (2) не имеет решений.

3) При $-1 < a \le 1$, заменой переменной $t = -z$, решение неравенства (2) сводится к решению неравенства вида $\sin t > a$. В этом случае решениями неравенства (2) являются значения t, $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < t < \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а множество решений неравенства (2) записывается так:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \arcsin a + 2\pi k).}$$

а3 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\mathbf{\sin} \boldsymbol{t \ge a}$ (3)

1) При $a \le -1$ решением неравенства (3) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

2) При $a > 1$ неравенство (3) не имеет решений.

3) При $-1 < a \le 1$ решениями неравенства (3) являются значения t,
$\arcsin a + 2\pi k \le t \le \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi k,\ \pi - \arcsin a + 2\pi k].}$$

а4 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\mathbf{\sin} \boldsymbol{t \le a}$ (4)

1) При $a \ge 1$ решением неравенства (4) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

2) При $a < -1$ неравенство (4) не имеет решений.

3) При $-1 \le a < 1$ (рис. 8.26) решениями неравенства (4) являются значения t,
$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le t \le \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi k, \arcsin a + 2\pi k].}$$

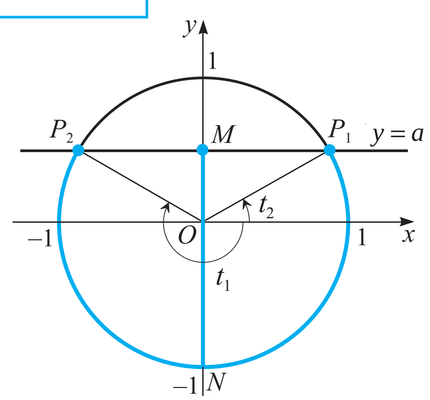


Рис. 8.26

Замечание. При решении простейших тригонометрических неравенств находят сначала их решения на промежутке длиной 2π (для синуса и косинуса) или длиной π (для тангенса и котангенса). Ответ записывается с учетом периодичности соответствующих тригонометрических функций.

б1 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\mathbf{\cos} \boldsymbol{t > a}$ (5)

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\cos t > \frac{1}{2}$.

Решение:

ОДЗ: $t \in \mathbb{R}$. Решаем это неравенство на отрезке $[-\pi, \pi]$ длиной 2π. Построим тригонометрическую окружность и прямую $x = \frac{1}{2}$ (рис. 8.27). Точки тригонометрической окружности имеют абсциссу больше $\frac{1}{2}$, если они принадлежат дуге P_1NP_2.

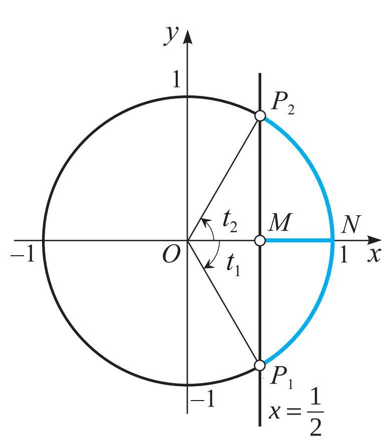


Рис. 8.27

Имеем $P_1\left(\frac{1}{2}, -\arccos\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}, \arccos\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, на отрезке $[-\pi, \pi]$ точка принадлежит дуге P_1NP_2, если $-\arccos\frac{1}{2} < t < \arccos\frac{1}{2}$, или $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$. Итак, значения t, $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$, принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi]$ длины 2π, являются решениями исходного неравенства.

Поскольку функция косинус периодична и ее основной период равен 2π, все остальные решения заданного неравенства получим, прибавив к каждому из найденных решений на этом отрезке числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, решениями исходного неравенства являются значения t, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

Вернемся к неравенству $\cos t > a$. Можно доказать, что:

1) при $a \geq 1$ неравенство (5) не имеет решений;

2) при $a < -1$ решением неравенства (5) является любое значение $t \in \mathbb{R}$;

3) при $-1 \leq a < 1$ (рис. 8.28) решениями неравенства (5) являются значения t,
$-\arccos a + 2\pi k < t < \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Следовательно, множеством решений неравенства (5) является:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arccos a + 2\pi k,\ \arccos a + 2\pi k).}$$

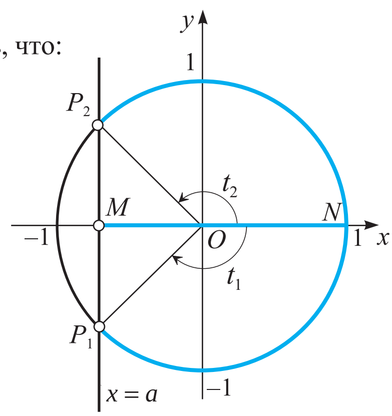


Рис. 8.28

62 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\boldsymbol{\cos t < a}$ (6)

1) При $a > 1$ решением неравенства (6) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

2) При $a \leq -1$ неравенство (6) не имеет решений.

3) При $-1 < a \leq 1$ решениями неравенства (6) являются значения t,
$\arccos a + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\arccos a + 2\pi k,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k).}$$

63 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\boldsymbol{\cos t \geq a}$ (7)

1) При $a \leq -1$ решением неравенства (7) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

2) При $a > 1$ неравенство (7) не имеет решений.

3) При $-1 < a \leq 1$ решениями неравенства (7) являются значения t,
$-\arccos a + 2\pi k \leq t \leq \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\arccos a + 2\pi k,\ \arccos a + 2\pi k].}$$

б4 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\cos t \le a$ (8)

1) При $a \ge 1$ решением неравенства (8) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.

2) При $a < -1$ неравенство (8) не имеет решений.

3) При $-1 \le a < 1$ (рис. 8.29) решениями неравенства (8) являются значения t,

$\arccos a + 2\pi k \le t \le 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi k,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k].}$$

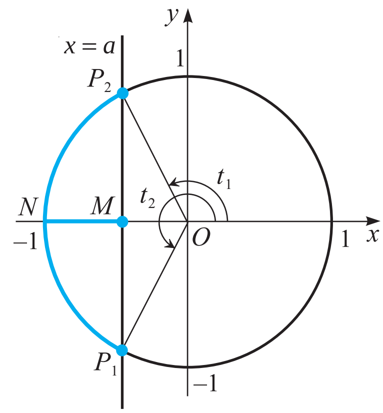


Рис. 8.29

в1 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\mathbf{tg}\,t > a,\ a \in \mathbb{R}$ (9)

Задание с решением

Решим на $\mathbb{R}$ неравенство $\operatorname{tg} t > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

ОДЗ: $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Основной период функции тангенс равен π. Поэтому, учитывая, что $\operatorname{arctg} a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, находим решения этого неравенства на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ длиной π.

Построим тригонометрическую окружность и ось тангенсов AT (рис. 8.30). Если значение t является решением данного неравенства, то ордината точки T, равная $\operatorname{tg} t$, должна быть больше $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Множество таких точек T образуют луч $(NT$. Все точки полуокружности, которые соответствуют лучу $(NT$, образуют дугу P_1P_2. Тогда $t_1 < t < t_2$ (точки P_1 и P_2 не принадлежат дуге).

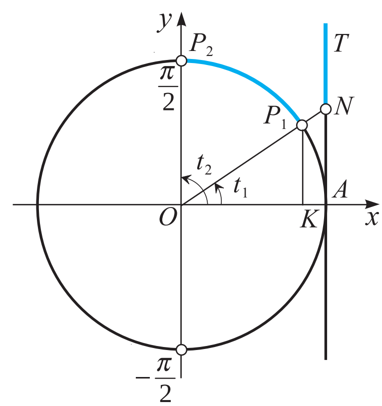


Рис. 8.30

Следовательно, $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} < t < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

Учитывая периодичность функции тангенс, получаем, что решениями заданного неравенства являются значения t, $\dfrac{\pi}{6} + \pi k < t < \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

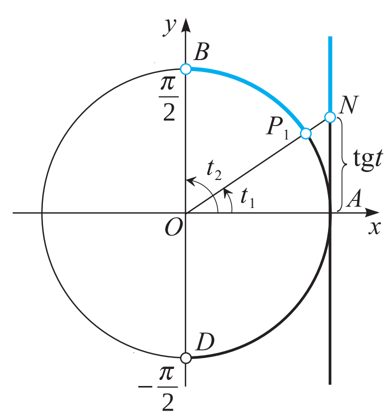


Рис. 8.31

Анализируя рисунок 8.31, замечаем, что точка P_1 делит дугу DAB на две части: дуги P_1B и DAP_1.

Для дуги P_1B (точки P_1 и B исключаются) справедливо неравенство $\operatorname{tg} t > a$. Тогда решениями неравенства (9) являются значения t, $\operatorname{arctg} a + \pi k < t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right).}$$

в2 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\boldsymbol{\operatorname{tg} t < a,\ a \in \mathbb{R}}$ (10)

Для дуги DAP_1 (рис. 8.31, точки D и P_1 исключаются) справедливо неравенство $\operatorname{tg} t < a$. Тогда решениями неравенства (10) являются значения t, $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t < \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k \right).} \qquad (11)$$

в3 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\boldsymbol{\operatorname{tg} t \geq a,\ a \in \mathbb{R}}$, являются значения t, $\operatorname{arctg} a + \pi k \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right).} \qquad (12)$$

в4 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\boldsymbol{\operatorname{tg} t \leq a,\ a \in \mathbb{R}}$, являются значения t, $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leq \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k \right].} \qquad (13)$$

Задание. Выведите формулы (11)–(13).

г2 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\boldsymbol{\operatorname{ctg} t > a,\ a \in \mathbb{R}}$ (рис. 8.32) являются значения t, $\pi k < t < \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k).} \qquad (14)$$

г2 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\boldsymbol{\operatorname{ctg} t < a,\ a \in \mathbb{R}}$, являются значения t, $\operatorname{arcctg} a + \pi k < t < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k).} \qquad (15)$$

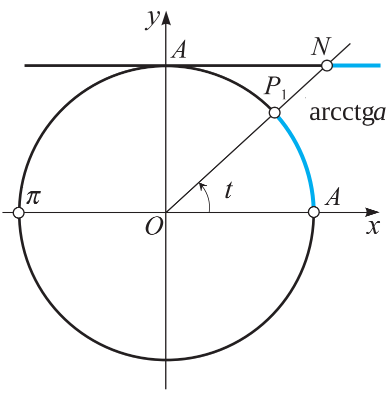


Рис. 8.32

г3 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\boldsymbol{\operatorname{ctg} t \geq a,\ a \in \mathbb{R}}$, являются значения t, $\pi k < t \leq \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k].} \qquad (16)$$

г4 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{t} \le \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, являются значения t, $\operatorname{arcctg} a + \pi k \le t < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k).} \tag{17}$$

Задание. Выведите формулы (14)–(17).

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \frac{1}{2}$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x + \frac{\pi}{4} = t$. Тогда $|\sin t| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 t \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos 2t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2t \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 2t \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \pi k \le t \le \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Возвращаясь к неизвестному x, получим: $-\frac{5\pi}{12} + \pi k \le x \le -\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12} + \pi k,\ -\frac{\pi}{12} + \pi k\right].$

Упражнения и задачи

Б

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x < -2$; д) $\cos x < \frac{1}{2}$;

е) $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\cos x \le 4$; и) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; к) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

л) $\operatorname{tg} x \ge -2$; м) $\operatorname{tg} x \le 1$; н) $\operatorname{ctg} x < 1$; о) $\operatorname{ctg} x \le -\sqrt{3}$; п) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

р) $\operatorname{ctg} x > -3$; с) $2\cos^2 x + \cos x \le 0$; т) $\sin^2 x - 5\sin x \ge 0$; у) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 > 0$.

2. а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos 3x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{ctg} 5x > -1$;

г) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < -\sqrt{3}$; д) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > -1$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \le 0$.

3. а) $\sin x - \cos x < \sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x \ge 1$; в) $\sin 5x + \cos 5x > -1$;

г) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д*) $\cos 2x + |\cos x| > 0$; е*) $\sin^2 x - \cos^2 x < 3\sin x - 2$.

4. Найдите решения уравнения $2\cos 2x - 4\cos x - 1 = 0$, для которых $|\sin x| \ge \frac{1}{2}$.

5. Найдите решения уравнения $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$, для которых $\cos x \ge -\frac{1}{2}$.

6. Составьте тригонометрическое неравенство, которое решается методом введения вспомогательного неизвестного.

Упражнения и задачи на повторение

A

1. Вычислите значение выражения:

а) $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos 180° + \cos^2 15°$; б) $\operatorname{ctg} 90° \cdot \sin\frac{\pi}{17} + \sin^2\frac{\pi}{6}$.

2. Вычислите $\cos 2\alpha$, если известно, что: а) $\cos\alpha = 0{,}6$; б) $\sin\alpha = -0{,}4$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3\cos(-57°)}{\sin(-33°)}$; б) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi - \alpha)$.

4. Лестница, приставленная к вертикальной стене, образует со стеной угол в 15°. Найдите длину лестницы, если расстояние от основания лестницы до стены равно 1,2 м.

5. Маятник длиной 20 см качается так, что угол между двумя его крайними положениями равен 60°. Найдите высоту, на которую поднимается конец маятника относительно его положения равновесия.

6. Запишите в порядке возрастания значения: $\sin\frac{4\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$.

7. Пусть:

а) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $0° < \alpha < 90°$. Найдите $\cos(90° + \alpha)$.

б) $\sin\alpha = 0{,}28$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\sin 2\alpha$.

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$.

г) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Найдите $\operatorname{tg}\beta$.

д) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3$. Найдите $\operatorname{ctg}\beta$.

8. Упростите выражение:

а) $(\operatorname{tg}\alpha \cos\alpha)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha)^2 - \cos^2\alpha$; б) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha$.

9. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{1}{(\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}50°)^{-\frac{1}{3}}}$; б) $\frac{1}{(\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}70°)^{-4}}$.

10. Турист подошел к реке. На противоположном берегу у воды растет дерево (вертикально).
а) Как турист может определить ширину реки при помощи транспортира?
б) Как турист может определить ширину реки без транспортира?

11. Зубчатое колесо содержит 72 зуба. Выразите в градусах величину угла, если колесо повернуть на: 1 зуб; 30 зубьев; 144 зуба; 300 зубьев.

Б

12. Даны ненулевые вектора $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$.
Скалярное произведение векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ определяется как $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, однако скалярное произведение векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ также может быть вычислено как:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$, где α – величина угла, образованного этими векторами.

а) Покажите, что $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

б*) Покажите, что:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
4) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

в) Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=120°$.

г) Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 5)$.

13. Пусть $ABCD$ – ромб со стороной, равной 6, и $m(\angle BAD)=60°$.
Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $(\vec{a}=\overrightarrow{DB},\ \vec{b}=\overrightarrow{DC})$.

14. Пусть $ABCD$ – квадрат со стороной, равной 5.
Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $(\vec{a}=\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=\overrightarrow{AB})$.

15. Даны векторы $\vec{a},\ \vec{b}$, $|\vec{a}|=2$ см, $|\vec{b}|=3$ см, а $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=105°$. Найдите такое действительное число k, чтобы вектор $\vec{a}+k\cdot\vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

16. Сравните с 1 значение выражения $\sqrt{a}$, если $a=\cos110°\sin\dfrac{5\pi}{3}\cos10°$.

17. Найдите, используя свойства тригонометрических функций, знак значения выражения:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg}10°+\operatorname{ctg}(-70°)}{\cos10°+\cos160°}$;
б) $\dfrac{\cos1-\cos\dfrac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{6}-\operatorname{ctg}2}$.

18. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$;
б) $f(x)=\sin3x-\operatorname{tg}x$.

19. Вычислите:

а) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;
б) $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
в) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

20. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$. Найдите: а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

21. Верно ли неравенство:

а) $\sin(287°-\alpha)\cos\alpha+\cos(287°-\alpha)\sin\alpha<0$;
б) $\cos(149°+\alpha)\cos\alpha+\sin(149°+\alpha)\sin\alpha>0$?

22. Не используя калькулятор, вычислите $\sin17°+\cos253°+\operatorname{ctg}315°$.

23. Вычислите:

а) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – величины внутренних углов треугольника;

б) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – величины внутренних углов треугольника.

24. Используя 6 различных способов, решите на можестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

25. Найдите решения уравнения $\log_{\frac{2}{3}} \sin x - 2\log_{\frac{2}{3}} \cos x = 1$, принадлежащие интервалу $[-350°, 2°]$.

26. Решите на можестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_{\cos x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2$.

27. Докажите, что $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$, где α – величина острого угла.

28. Докажите, что $3\sin^2\alpha \ge 2\sin 2\alpha - 1$.

29. Используя графики функций f и g, найдите решения уравнения $f(x) = g(x)$, если:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 1 - x$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x$.

30. Радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса круга, описанного около этого треугольника. Найдите величины углов треугольника.

31*. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α.

а) Найдите отношение m площади треугольника к сумме квадратов длин его сторон.

б) Докажите равенство $m = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + 3\operatorname{ctg}\alpha}$.

в) Найдите значение α, для которого $m = \frac{1}{8}$.

г) Найдите значения α, для которых m принимает наибольшее значение.

д) Найдите множество значений отношения m.

32. Постройте график функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$;

б) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

33. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, у которого $AB = BC$, $CD = 2AB$, $m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = 120°$.

а) Покажите, что треугольник ABD равнобедренный.

б) Вычислите значения тригонометрических функций угла ADB.

в) Покажите, что точки A, M, N коллинеарны, где M и N – середины сторон BD и CD соответственно.

г) Покажите, что прямая CD касается окружности, описанной около треугольника AMD.

д) Выразите площадь прямоугольника $ABCD$ через величину $AB = a$.

е) Вычислите синус угла, образованного прямыми AC и BD.

34*. Вычислите:

а) $\cos(\operatorname{arctg}(-3))$;

б) $\sin(\arccos 0{,}6)$.

35*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|\sin x - 3\cos x| = 3\sin x + \cos x - 3$;

б) $\log_3(2\sin x \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(5\cos x + 4\sin 2x) = 0$.

36*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{5}\sin 2x - \sqrt{1 + 8\sin x\cos x} = 0$;

б) $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0$.

Проверочная работа

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Укажите верный вариант. 1

Угол $\alpha = 272^\circ$ принадлежит

A I четверти. **B** II четверти. **C** III четверти. **D** IV четверти.

2. Вычислите значение выражения $\cos 60^\circ + 2\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ$. 1

3. Пусть $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Зная, что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{2}{3}$, вычислите: 3

$$\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \sin(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha-\beta),\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta),\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

4. Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$. 2

5. Вычислите значение выражения $\left(\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2$. 1

6. Длины сторон параллелограмма равны 5 см и 3 см, а высота, проведенная к большей стороне, равна 2 см. Вычислите величину острого угла, образованного диагоналями параллелограмма. 2

Продолжительность работы: 90 минут

Б

1. Найдите истинностное значение высказывания: 1
Если $\sin x + \cos x = a$, то $\sin^3 x + \cos^3 x = 1{,}5a^2 - 0{,}5a^3$.

2. Пусть $\sin\alpha = 0{,}6$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Вычислите $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{ctg} 2a$. 1

3. Докажите, что уравнение $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$ не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$. 3

4. Найдите решения уравнения $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3\sin x$, для которых $\cos 2x \geq 0$. 2

5. Дана функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-\operatorname{tg} 2x}$. Найдите значения x, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$, при которых функция f определена. 1

6. Докажите, что для любого треугольника ABC справедливо равенство 2

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R},$$

где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника, а r – радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Тригонометрическое древо

Основные тригонометрические тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Формулы приведения:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha;\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

и др.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\ominus$ $\oplus$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\alpha = \beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$; $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$; $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha = \beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\oplus$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \mathrm{tg}[\alpha + (-\beta)]$

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$

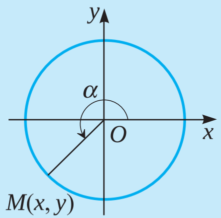
$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \mathrm{ctg}[\alpha + (-\beta)]$

$\alpha = \beta$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$; $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Тригонометрические функции и их свойства

Тригонометрические функции



sin, cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

tg: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$;

ctg: $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$;

$\cos\alpha = x;\ \ \sin\alpha = y;$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\ \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y};$

$\sec\alpha = \frac{1}{x};\ \ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y}.$

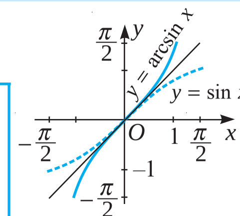
Обратные тригонометрические функции

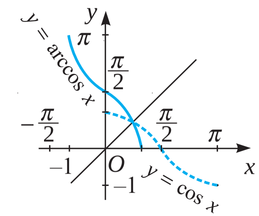
arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin a = t \Leftrightarrow \sin t = a$;

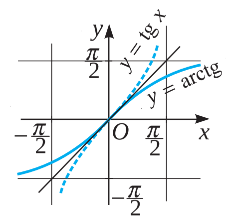
arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos a = t \Leftrightarrow \cos t = a$;

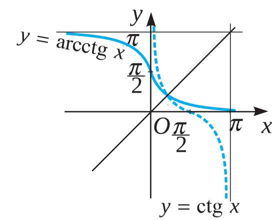
arctg: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = a$;

arcctg: $\mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{ctg} t = a$.









$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$;

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ a \in [-1, 1]$;

$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},\ a \in \mathbb{R}$.

Свойства

$f(x) = \sin x$

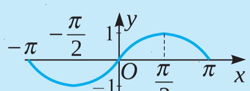
1° $\sin x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2° нечетная;

3° основной период: 2π;

4° возрастающая на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$;
убывающая на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$.

5° $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
$y_{max} = 1$;
$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
$y_{min} = -1$.



$f(x) = \cos x$

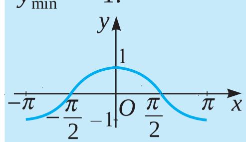
1° $\cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2° четная;

3° основной период равен 2π;

4° возрастающая на $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$;
убывающая на $[2\pi k, \pi + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$,

5° $x_{max} = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
$y_{max} = 1$;
$x_{min} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
$y_{min} = -1$.



$f(x) = \operatorname{tg} x$

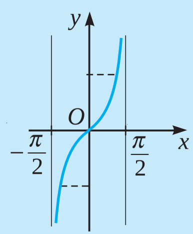
1° $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2° нечетная;

3° основной период равен π;

4° возрастающая на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right) k \in \mathbb{Z}$;

5° не имеет экстремумов.



$f(x) = \operatorname{ctg} x$

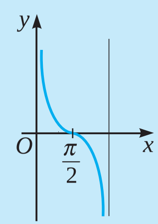
1° $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2° нечетная;

3° основной период равен π;

4° убывающая на $(\pi k, \pi + \pi k),\ k \in \mathbb{Z}$;

5° не имеет экстремумов.



Тригонометрические уравнения, неравенства

Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения:

$\sin x = a, \ (|a| \le 1), \ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = a, \ (|a| \le 1), \ x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = a, \ a \in \mathbb{R}, \ x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{ctg} x = a, \ a \in \mathbb{R}, \ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

Метод введения вспомогательного неизвестного:

$f(\sin x) = 0, \quad f(\cos x) = 0,$
$t = \sin x; \quad t = \cos x;$
$f(\operatorname{tg} x) = 0, \quad f(\operatorname{ctg} x) = 0,$
$t = \operatorname{tg} x; \quad t = \operatorname{ctg} x.$

*$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \beta = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$

*$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$

*$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ \alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ \beta \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$

Другие виды тригонометрических уравнений

однородные:

$a_n \cos^n x +$
$+ a_{n-1} \cos^{n-1} x \sin x +$
$+ \ldots + a_1 \cos x \sin^{n-1} x +$
$+ a_0 \sin^n x = 0 \, | : \cos^n x \ne 0$

$a \sin x + b \cos x = c$:

1) метод введения вспомогательного угла: $\sin(x + \alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a};$
2) метод сведения к однородному уравнению;
3) метод использования формул универсальных подстановок;
4) метод сведения к системе
$$\begin{cases} au + bv = c, \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases} \text{ где } \begin{cases} u = \sin x, \\ v = \cos x. \end{cases}$$

Тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические неравенства. Решения:

$\sin x > a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi n, \ \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \ \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (-\arccos a + 2\pi n, \ \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\arccos a + 2\pi n, \ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$\operatorname{tg} x > a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{arctg} a + \pi n, \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$\operatorname{tg} x < a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ \operatorname{arctg} a + \pi n\right)$
$\operatorname{ctg} x > a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\pi n, \ \operatorname{arcctg} a + \pi n)$
$\operatorname{ctg} x < a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi n, \ \pi + \pi n)$
$\sin x \ge a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi n, \ \pi - \arcsin a + 2\pi n]$
$\sin x \le a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \ \arcsin a + 2\pi n]$
$\cos x \ge a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [-\arccos a + 2\pi n, \ \arccos a + 2\pi n]$
$\cos x \le a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi n, \ 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$
$\operatorname{tg} x \ge a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left[\operatorname{arctg} a + \pi n, \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$\operatorname{tg} x \le a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ \operatorname{arctg} a + \pi n\right]$
$\operatorname{ctg} x \ge a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\pi n, \ \operatorname{arcctg} a + \pi n]$
$\operatorname{ctg} x \le a$	$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [\operatorname{arcctg} a + \pi n, \ \pi + \pi n)$

*Приводимые к алгебраическим неравенствам:

$f(\sin x) \ge 0,$
$f(\cos x) < 0,$
$f(\operatorname{tg} x) \ge 0,$
$f(\operatorname{ctg} x) \le 0$ и др.

Метод введения вспомогательного неизвестного:

$t = \sin x$
($t = \cos x$ и др.)

Другие виды тригонометрических неравенств

МОДУЛЬ 9 Геометрические фигуры на плоскости

Геометрия – это огромный сад, где каждый может выбрать букет по своему вкусу.

Давид Гильберт

Цели

- идентификация и использование аксиом, определений и теорем, свойственных геометрии на плоскости;
- применение элементов геометрии в различных контекстах.

§1 Элементы дедуктивной геометрии

В курсе геометрии V-IX классов вы научились различать и определять основные фигуры на плоскости и в пространстве, узнавать основные свойства этих фигур опытным путем, многократными построениями, внимательным наблюдением и их описанием. В результате этих экспериментальных наблюдений были выведены правила и сформулированы опредления в виде обобщений замеченных свойств. В этом заключается *интуитивный* (*индуктивный*) *метод* изучения геометрии.

В дальнейшем мы будем углублять и систематизировать эти навыки и умения, используя наряду с интуитивным методом и *рациональный* (*дедуктивный*) *метод* изучения геометрии.

Сущность дедуктивного метода изучения геометрии состоит в том, что свойства геометрических фигур выводятся точными рассуждениями, опирающимися лишь на общие свойства фигуры, отвлекаясь от всего частного изучаемой фигуры. Таким образом, суждение принимает универсальный характер, т. е. оно пригодно как в случае изучаемой фигуры, так и в случае всех фигур с теми же свойствами.

Следующие примеры показывают, что нельзя обосновывать свойства геометрических фигур, опираясь лишь на результаты опытов.

1. Пусть даны две параллельные прямые и тысяча различных секущих. Тот факт, что в результате измерений каждый раз получаем равенство величин внутренних накрест лежащих углов, не избавит нас от сомнений, что тот же результат получится и для следующей секущей.

2. Если мы построим сотню различных треугольников и убедимся, что для каждого из них сумма величин внутренних углов равна 180°, все равно останется чувство, что это свойство может не соблюдаться для следующего, отличного от них треугольника.

Тот факт, что для большого количества различных прямоугольных треугольников сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, не может служить основанием того, что это свойство верно для любого прямоугольного треугольника. Требуется строгое доказательство.

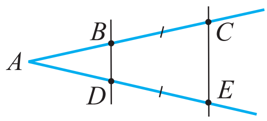
Итак, ряд удачных примеров, даже если их много, не являются подтверждением некоторого общего свойства.

Наоборот, достаточно одного примера, называемого *контрпримером*, чтобы опровергнуть некоторое общее утверждение!

Например, ученик отметил на одной стороне угла точки B и C, а на другой – точки D и E так, что $[BC] \equiv [DE]$ (рис. 9.1 а)). Исходя из рисунка, он сделал вывод, что прямые BD и CE обязательно параллельны.

Его одноклассник опроверг это предположение, построив такой же угол и сместив лишь точки B и C к вершине угла (рис. 9.1 б)).

а)



б)

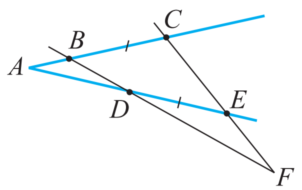


Рис. 9.1

Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур. Геометрические фигуры – это абстрактные образы объектов из окружающего мира. Так, поверхность воды озера, находящегося в состоянии покоя, хорошо отполированная поверхность доски, зеркала являются материальными моделями части геометрической фигуры, которая называется *плоскостью*. Также отверстие, образованное при прокалывании бумаги иголкой, след, оставленный на бумаге острием хорошо отточенного карандаша, являются изображениями простейшей геометрической фигуры – *точки*.

Язык теории множеств адаптирован для нужд геометрии. Так, наряду с выражением „точка A принадлежит прямой d“ широко употребляются и следующие выражения: „точка A лежит на прямой d“, „прямая d проходит через точку A“, „прямая d содержит точку A“. Также тот факт, что точки A и B определяют прямую AB или отрезок AB может быть выражен в виде „прямая AB проходит через точки A и B“, „прямая AB соединяет точки A и B“, „отрезок AB соединяет точки A и B“.

Основными (неопределяемыми) понятиями геометрии являются: *точка*, *прямая*, *плоскость* (как множество точек), *расстояние*, *величина угла*. Основными отношениями являются: *отношение инцидентности* (*принадлежности*), *отношения порядка*, *отношения конгруэнтности* и *параллельности*.

Сформулируем высказывания, которые выражают отношения между основными понятиями. Эти высказывания заведомо предполагаются верными и называются ***аксиомами***. В них выражаются известные свойства геометрических фигур, которые широко применялись в гимназии.

В данном учебнике использована видоизмененная система аксиом Д. Гильберта (1862–1943), классифицированная по следующим группам:

1) аксиомы инцидентности (принадлежности) (**И**);

2) аксиомы порядка (**П**);

3) аксиомы измерения (**М**) и отложения (**О**) отрезков и углов;

4) аксиома существования треугольника, конгруэнтного заданному треугольнику (аксиома перемещения треугольника) (**ПТ**);

5) аксиома параллельности (**ПП**).

1 Аксиомы инцидентности (принадлежности)

И$_1$ Через любые две различные точки проходит прямая, и только одна.

И$_2$ Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

Прямая обозначается строчными буквами латинского алфавита (рис. 9.2 а)). Если A и B – две различные точки на прямой, то прямая может быть обозначена AB (рис. 9.2 б)). На рисунке 9.2 в) изображены: прямая a, две различные точки A и B, принадлежащие ей $(A \in a,\ B \in a)$, и точки C и D, которые не лежат на прямой a $(C \notin a,\ D \notin a)$.

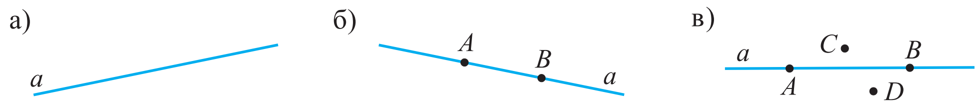


Рис. 9.2

2 Аксиомы порядка

Аксиомы порядка выявляют отношения между точками, лежащими на прямой. Эти отношения выражаются словами „лежит между“ или „находится между“ и др.

П$_1$ Из трех различных точек, лежащих на прямой, одна и только одна находится между двумя другими.

Рассмотрим точки A, B, C, лежащие на прямой a (рис. 9.3). Высказывания 1) – 4) эквивалентны.

1) Точка C находится между точками A и B.
2) Точка C лежит между точками A и B.
3) Точки A и B лежат по разные стороны относительно точки C.
4) Точки A и C лежат по одну сторону относительно точки B.

Рис. 9.3

П$_2$ Для любых двух различных точек A и B, лежащих на прямой, проходящей через них, существует хотя бы одна такая точка C, что B находится между A и C.

П$_3$ Любая прямая разбивает множество точек плоскости, не принадлежащих прямой, на два непустых непересекающихся подмножества точек, которые называются ***полуплоскостями***, так, что отрезок, соединяющий две точки из различных полуплоскостей ($[AC]$), пересекает прямую, а отрезок, соединяющий две различные точки из одной полуплоскости ($[AB]$), не пересекает прямую (рис. 9.4).

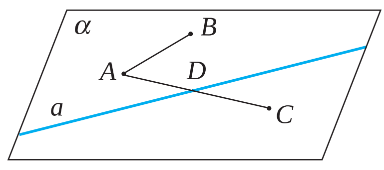


Рис. 9.4

3 Аксиомы измерения и откладывания отрезков и углов

M_1 Каждому отрезку ставится в соответствие одно и только одно неотрицательное число, называемое ***длиной отрезка***. Длина отрезка равна нулю тогда и только тогда, когда отрезок является нулевым. Длина отрезка равна сумме длин отрезков, на которые он разбивается любой его внутренней точкой.

Длина отрезка *AB* обозначается через *AB*.

Используя различные единицы измерения (сантиметр, метр, километр, ...), получим различные числовые значения, выражающие длину отрезка.

M_2 Каждому углу ставится в соответствие одна и только одна градусная мера (величина), заключенная между 0° и 180°. Развернутому углу соответствует 180°, а нулевому углу соответствует 0°. Величина угла равна сумме величин углов, на которые он разбивается любой полупрямой с началом в вершине угла, проходящей через его внутреннюю область.

O_1 Для любого неотрицательного действительного числа p на заданной полупрямой существует единственная точка, которая вместе с началом полупрямой задает отрезок длины p.

O_2 Для любого $\varphi,\ 0° < \varphi < 180°,$ в заданной полуплоскости, ограниченной несущей прямой любой заданной полупрямой, существует единственный угол величины φ, одной из сторон которого является заданная полупрямая.

4 Аксиома существования треугольника, конгруэнтного данному треугольнику

ПТ (аксиома конгруэнтного перемещения треугольника). Пусть ABC – треугольник и $[A_1M$ – полупрямая. Тогда в заданной полуплоскости, ограниченной прямой A_1M, существует такой треугольник, конгруэнтный треугольнику ABC, что одна из его вершин совпадает с точкой A_1, вторая вершина, B_1, принадлежит полупрямой $[A_1M$, а третья вершина, C_1, принадлежит заданной полуплоскости.

ПП (аксиома параллельности). Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной.

Новые понятия в геометрии обычно вводят с помощью *определений*.

Примеры

1. Прямая, которая проходит через середину отрезка и перпендикулярна к нему, называется *серединным перпендикуляром (медиатрисой) отрезка*.

2. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны треугольника, называется *медианой треугольника*.

3. Точки, принадлежащие одной и той же прямой, называются *коллинеарными точками*. В противном случае точки называются *неколлинеарными точками*.

Теорема – это утверждение, устанавливающее некоторое свойство и требующее доказательства.

Большинство теорем, втречающихся в курсе геометрии, формулируются (или могут быть сформулированы) следующим образом: „Если P, то Q“, где P и Q являются предложениями, которые называются соответственно ***условием*** и ***заключением*** теоремы (см. модуль 2).

Условие теоремы называется ***достаточным условием*** для заключения, а заключение теоремы называется ***необходимым условием*** для условия теоремы.

Доказательство теоремы – это цепь верных умозаключений, основанных на аксиомах, теоремах или уже доказанных утверждениях.

Пример

Рассмотрим схематичное доказательство теоремы:

„Если фигура ABC является треугольником, то сумма величин его внутренних углов равна 180°“.

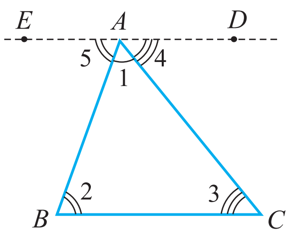


Рис. 9.5

Проведем $AD \parallel BC$ (рис. 9.5).

$S = m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3)$,

$\angle 2 \equiv \angle 5$ (внутренние накрест лежащие углы),

$\angle 3 \equiv \angle 4$ (внутренние накрест лежащие углы),

следовательно, $S = m(\angle 1) + m(\angle 4) + m(\angle 5)$.

$m(\angle 1) + m(\angle 4) + m(\angle 5) = 180°$, так как $\angle EAD$ – развернутый угол. Таким образом, $S = 180°$.

В процессе этого доказательства мы использовали теоремы о конгруэнтности внутренних накрест лежащих углов (теорема 2). Доказательство также опирается на аксиому параллельности (**ПП**) и аксиому $\mathbf{M_2}$.

Неявно использованы и определения: определение параллельных прямых, секущей, угла, треугольника, внутренних накрест лежащих углов.

Также неявно присутствуют неопределяемые понятия: точка, прямая, равенство.

Применяются и разные логические операции.

Рассмотрим высказывание: „Если P, то Q“ (1).

Поменяв местами в высказывании (1) условие и заключение, мы получим новое высказывание: „Если Q, то P“ (2).

Эти два высказывания могут быть:

1) оба верны,

2) одно из них верно, другое неверно,

3) оба неверны.

Если оба высказывания верны, то они являются теоремами и называются ***взаимно обратными теоремами***. Как правило, одна из этих теорем называется ***прямой теоремой***, а другая – ***обратной*** (см. модуль 2).

Примеры

1 Теорема „Если две хорды некоторой окружности равноудалены от ее центра, то они конгруэнтны“ является обратной к теореме „Если две хорды некоторой окружности конгруэнтны, то они равноудалены от центра окружности“.

② Обратное высказывание для теоремы „Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали конгруэнтны“ формулируется следующим образом: „Если диагонали некоторого четырехугольника конгруэнтны, то он является прямоугольником“. Это ложное высказывание.

На рисунке 9.6 изображен четырехугольник $ABCD$ с конгруэнтными диагоналями AC и BD, но $ABCD$ не является прямоугольником!

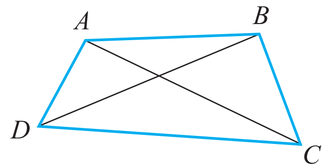


Рис. 9.6

③ Взаимно обратные высказывания „Если четырехугольник является прямоугольником, то его стороны конгруэнтны“ и „Если стороны четырехугольника конгруэнтны, то он является прямоугольником“ оба ложны.

В некоторых случаях утверждения двух взаимно обратных теорем формулируются в виде одной теоремы при помощи словосочетания „необходимое и достаточное условие“ или „если и только если“, или „тогда и только тогда“.

Например, две взаимно обратные теоремы из примера ① можно сформулировать так: „Для того, чтобы две хорды одной и той же окружности были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы они были равноудалены от ее центра“ или „Две хорды одной и той же окружности равноудалены от ее центра тогда и только тогда, когда они конгруэнтны“.

Высказывание „Диагонали ромба взаимно перпендикулярны“ является теоремой. Она может быть сформулирована в виде: „Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны“. Теперь легко сформулировать обратное высказывание: „Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то он является ромбом“. Оно также является теоремой.

Часто доказательство прямой теоремы вызывает трудности, поэтому вместо этой теоремы доказывают теорему, противоположную обратной. В этом состоит ***метод доказательства от противного*** (см. модуль 2).

Пример

Теорема. Если две различные прямые параллельны, то всякая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую.

Условие. $a \parallel b$, $c \nparallel a$, $c \cap a = \{P\}$ (рис. 9.7).

Заключение. $c \nparallel b$.

Доказательство. Применим метод от противного.

Если предположим, что $c \parallel b$, то через точку P пройдут две различные прямые a и c, параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме **ПП** параллельности. Следовательно, так как c и b не могут быть параллельными, они должны иметь общую точку.

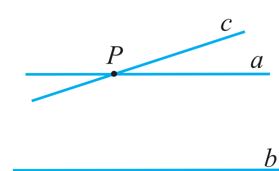


Рис. 9.7

Напомним названия пар углов, которые образуются при пересечении двух различных прямых третьей прямой, называемой ***секущей***.

Пары углов (рис. 9.8) называются:

(1, 5), (4, 8), (2, 6), (3, 7) – ***соответственными углами***;

(4, 6), (3, 5) – ***внутренними накрест лежащими углами***;

(1, 7), (2, 8) – ***внешними накрест лежащими углами***;

(4, 5), (3, 6) – ***внутренними односторонними углами***;

(1, 8), (2, 7) – ***внешними односторонними углами***.

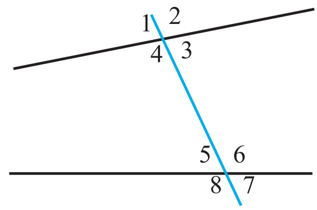


Рис. 9.8

Теорема 1. Если при пересечении двух прямых секущей образуются (рис. 9.9):
1) либо два конгруэнтных внутренних накрест лежащих угла;
2) либо два конгруэнтных внешних накрест лежащих угла;
3) либо два конгруэнтных соответственных угла;
4) либо два дополнительных до 180° внутренних односторонних угла;
5) либо два дополнительных до 180° внешних односторонних угла, то

конгруэнтны все внутренние накрест лежащие углы, все внешние накрест лежащие углы; также дополнительны до 180° все внутренние односторонние углы и все внешние односторонние углы.

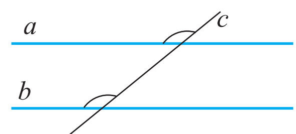


Рис. 9.9

Теорема 2. Две различные прямые параллельны, если и только если конгруэнтны внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих прямых секущей (рис. 9.10).

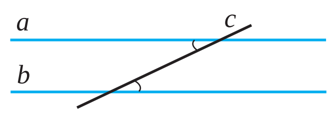


Рис. 9.10

Теорема 3. Две различные прямые параллельны тогда и только тогда, когда конгруэнтны внешние накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих прямых секущей (рис. 9.11).

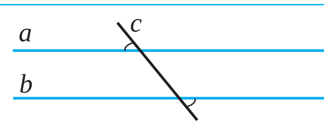


Рис. 9.11

Теорема 4. Две различные прямые параллельны тогда и только тогда, когда сумма величин внутренних односторонних углов, образованных при пересечении этих прямых секущей, равна 180° (рис. 9.12).

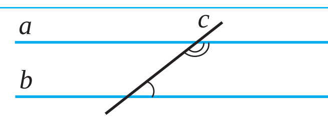


Рис. 9.12

Теорема 5. Соответственные углы, образованные при пересечении прямых a и b секущей c, равны тогда и только тогда, когда $a \parallel b$.

Теорема 6 (свойство углов с соответствующими параллельными сторонами). Два угла, стороны которых соответственно параллельны, конгруэнтны, если они оба острые либо тупые, и являются дополнительными до 180°, если один угол острый, а другой тупой.

Докажем, например, теорему 2.

Пусть при пересечении прямых AB и CD секущей EF образуются конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы CFE и FEB (рис. 9.13). Докажем, что прямые AB и CD параллельны.

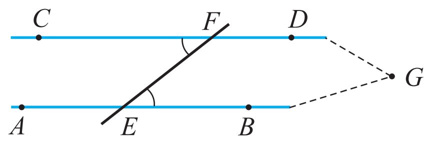


Рис. 9.13

Применим метод доказательства от противного. Предположим, что прямые AB и CD не параллельны. Тогда они должны пересекаться в некоторой точке G. Следовательно, точки E, F, G будут вершинами треугольника EFG, у которого внешний угол CFE конгруэнтен внутреннему углу BEF, не смежному с ним. Но это противоречит свойству о том, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним. Отсюда следует, что прямые AB и CD не могут пересекаться, значит, они параллельны.

Допустим теперь, что прямые AB и CD параллельны, и докажем, что внутренние накрест лежащие углы CFE и FEB, образованные при их пересечении секущей EF, конгруэнтны.

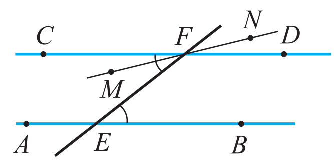


Рис. 9.14

Рассуждаем от противного. Предположим, что углы CFE и FEB не конгруэнтны, например, $m(\angle CFE) > m(\angle FEB)$ (рис. 9.14). Из этого предположения следует, что через точку F можно провести прямую MN, отличную от прямой CD, так, что $m(\angle MFE) = m(\angle FEB)$. Согласно доказанному выше, прямые MN и AB параллельны, так как при их пересечении секущей EF получаются конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы ($\angle MFE$ и $\angle BEF$). Отсюда следует, что через точку F проходят две различные прямые (CD и MN), параллельные прямой AB. Но это противоречит аксиоме параллельности **ПП**.

Полученное противоречие доказывает, что углы CFE и BEF конгруэнтны.

***Следствия*. 1.** Если две прямые параллельны, то любая прямая, перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и второй.

2. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

3. Прямые, перпендикулярные пересекающимся прямым, пересекаются.

Задание. Докажите теоремы 1, 3–6.

Задачи

А

1. Сформулируйте определение:

а) диагонали многоугольника;
б) хорды окружности;
в) биссектрисы угла треугольника;
г) ромба.

2. Даны предложения:

а) „Объединение отрезков $[A_1A_2], [A_2A_3], ..., [A_{n-1}A_n]$ называется ломаной“;
б) „Квадрат – это параллелограмм, стороны которого равны“.

Дополните эти предложения, чтобы они стали верными определениями.

3. Сформулируйте „условие“ и „заключение“ высказывания:

а) Два вертикальных угла конгруэнтны.

б) Диаметр окружности больше любой хорды, которая не проходит через центр этой окружности.

в) Два треугольника конгруэнтны, если их стороны конгруэнтны.

г) Две прямые, которые имеют две различные общие точки, совпадают.

4. Выясните, какие из следующих высказываний истинны. Какие из них имеют истинные обратные высказывания?

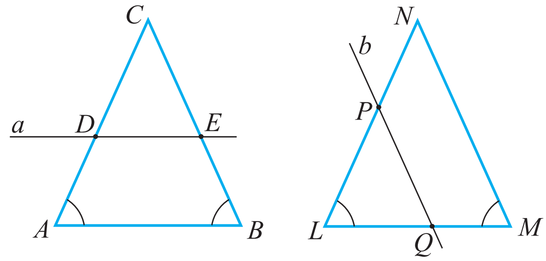
а) Величина тупого угла больше величины острого угла.

б) Треугольник, у которого две конгруэнтные стороны, имеет и два конгруэнтных угла.

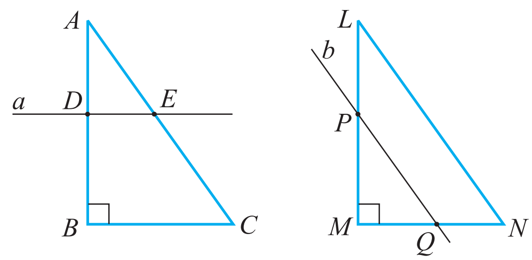
в) Сумма величин смежных углов равна 180°.

г) Если диагонали выпуклого четырехугольника конгруэнтны, то он является прямоугольником.

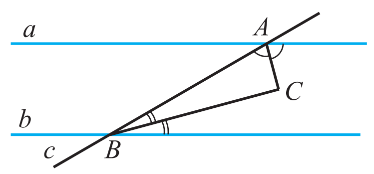
5. На рисунке треугольники ABC и LMN равнобедренные. Прямая $a \parallel AB$, прямая $b \parallel MN$. Докажите, что треугольники CDE и LQP равнобедренные.



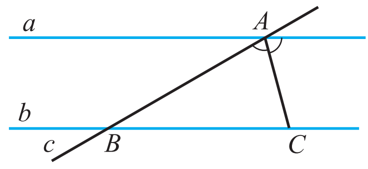
6. На рисунке изображены прямоугольные треугольники ABC и LMN. Прямая $a \parallel BC$, прямая $b \parallel LN$. Докажите, что треугольники ADE и PMQ прямоугольные.



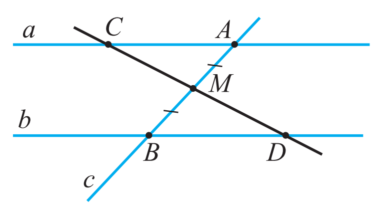
7. На рисунке прямые a и b параллельны, c – секущая, $[AC$ и $[BC$ – биссектрисы. Докажите, что $AC \perp BC$.



8. На рисунке прямые a и b параллельны, c – секущая, $[AC$ – биссектриса. Докажите, что $[AB] \equiv [BC]$.



9. На рисунке прямые a и b параллельны, точка M – середина отрезка AB, CD – секущая, проходящая через точку M. Покажите, что M – середина отрезка CD.



Б

10. Пусть P обозначает четырехугольник. Рассмотрим предложения:
1) P является прямоугольником;
2) P имеет конгруэнтные стороны;
3) P имеет конгруэнтные углы;
4) P имеет конгруэнтные диагонали.

а) Сформулируйте три высказывания, имеющие в качестве условия предложение 1) и в качестве заключения соответственно предложения 2), 3) и 4).
б) Выясните, какие из этих высказываний ложны, и для каких из них обратные высказывания истинны.

11. Пусть прямые a и b, лежащие в плоскости P, пересекаются в точке A. Опишите фигуру:
а) $a \cap b$, $a \cap P$, $b \cup P$;
б) $(a \cap b) \cup P$, $\{A\} \cap (a \cup b)$.

12. Пусть D_1 и D_2 – плоские прямоугольники. При каких условиях $D_1 \cup D_2$ является плоским прямоугольником? А $D_1 \cap D_2$?

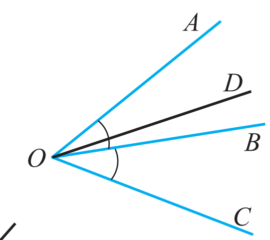
13. Пусть T_1 и T_2 – плоские конгруэнтные треугольники. Каким образом нужно расположить эти фигуры на плоскости, чтобы:
а) $T_1 \cap T_2$ – плоский шестиугольник;
б) $T_1 \cup T_2$ – плоский треугольник;
в) $T_1 \cup T_2$ – плоский параллелограм?

14. Докажите, что:

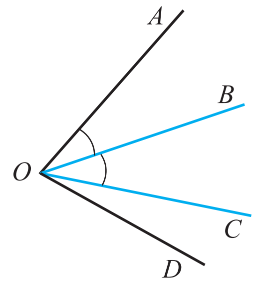
а) биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны;

б) два угла с общей вершиной, у которых соответствующие стороны перпендикулярны, конгруэнтны или дополнительны до 180°;

в) величина угла BOD, где $[OB$ – биссектриса угла AOC, а полупрямая $[OD$ проходит между сторонами угла AOB, равна полуразности величины углов DOC и DOA.



г) величина угла BOD, где $[OB$ – биссектриса угла AOC, а $[OD$ – полупрямая, проходящая вне угла AOC, равна полусумме величин углов DOA и DOC.



д) величина внешнего угла треугольника равна сумме величин двух внутренних углов, не смежных с ним.

§2 Треугольники. Конгруэнтность треугольников. Классификации

Определения. • Два замкнутых отрезка называются **конгруэнтными**, если их длины равны.

• Два угла называются **конгруэнтными**, если их величины равны.

Конгруэнтность углов AOB и $A_1O_1B_1$ обозначается $\angle AOB \equiv \angle A_1O_1B_1$, а конгруэнтность отрезков AB и A_1B_1 обозначается $[AB] \equiv [A_1B_1]$.

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются **конгруэнтными**, если справедливы соотношения: $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[CA] \equiv [C_1A_1]$, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, $\angle ACB \equiv \angle A_1C_1B_1$, $\angle CBA \equiv \angle C_1B_1A_1$.

Обозначается: $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Отметим, что из того, что $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ не следует, что $\Delta ABC \equiv \Delta A_1C_1B_1$, то есть при конгруэнтности треугольников порядок записи вершин имеет значение.

Можно доказать, что два треугольника, конгруэнтные третьему, конгруэнтны.

Напомним ***признаки конгруэнтности*** двух треугольников.

I признак (***СУС***). Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$ и $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, то $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 9.15 а)).

II признак (***УСУ***). Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 9.15 б)).

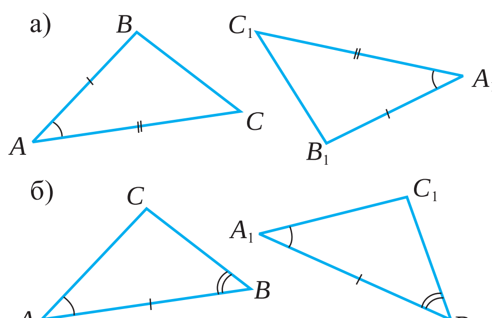


Рис. 9.15

Определение. **Равнобедренным треугольником** называется треугольник, у которого две стороны конгруэнтны.

Теорема 7. В равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны.

Определение. Треугольник, у которого все стороны конгруэнтны, называется **равносторонним**.

III признак (***ССС***). Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[CA] \equiv [C_1A_1]$, то $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Пусть ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ удовлетворяют условию теоремы (рис. 9.16). Тогда по аксиоме **ПТ** существует $\Delta A_1B_1C_2$ такой, что $\Delta A_1B_1C_2 \equiv \Delta ABC$ (1).

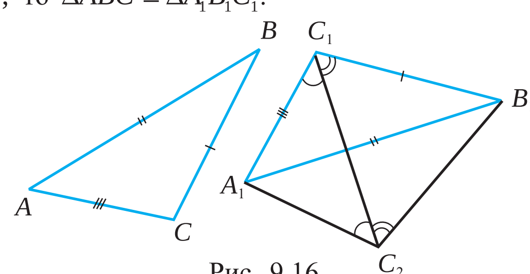


Рис. 9.16

Из (1) получаем $\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta ABC$. Следовательно, $[C_1A_1] \equiv [CA] \equiv [C_2A_1]$, $[C_1B_1] \equiv [CB] \equiv [C_2B_1]$.

Соединив точки C_1 и C_2, получим равнобедренные треугольники $C_2A_1C_1$ и $C_2B_1C_1$, для которых справедливы соотношения $\angle A_1C_1C_2 \equiv \angle A_1C_2C_1$ и $\angle C_2C_1B_1 \equiv \angle C_1C_2B_1$.

Отсюда следует, что $\angle A_1C_1B_1 \equiv \angle A_1C_2B_1$ и по I признаку (СУС) получаем, что $\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta A_1B_1C_2$. Так как $\Delta A_1B_1C_2 \equiv \Delta ABC$, то $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$. ▶

Задание. Докажите I и II признаки конгруэнтности треугольников.

Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется ***внешним углом*** треугольника.

Теорема 8 (свойство внешнего угла треугольника)
Величина внешнего угла треугольника больше величины любого внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство:

Докажем, что величина внешнего угла FCB треугольника ABC больше величины внутреннего угла ABC (рис. 9.17). Для этого на стороне BC отметим точку D так, что $[BD] \equiv [DC]$, а на полупрямой $[AD$ возьмем точку E так, чтобы точка D лежала бы между точками A и E и $[AD] \equiv [DE]$. Поскольку точки A и E лежат в разных полуплоскостях, заданных прямой BC, а точка A лежит на луче, дополнительному лучу $[DE$, получаем, что точка E принадлежит внутренней области угла FCB.

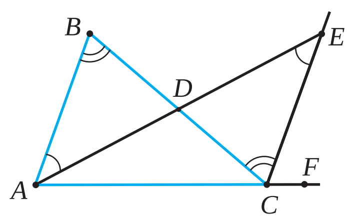


Рис. 9.17

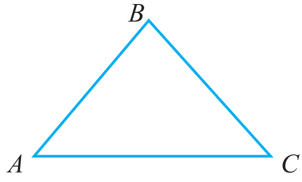
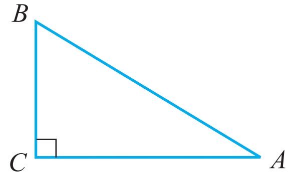
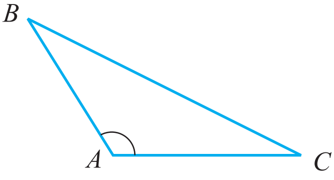
Применяя аксиому $\mathbf{M_2}$, выводим, что $m(\angle FCB) > m(\angle ECD)$.

Согласно I признаку (СУС) конгруэнтности треугольников заключаем, что $\Delta ABD \equiv \Delta ECD$ и, следовательно, $m(\angle ABC) = m(\angle ECD) < m(\angle FCB)$.

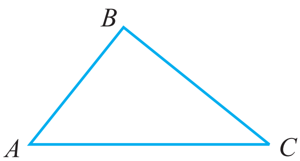
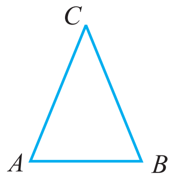
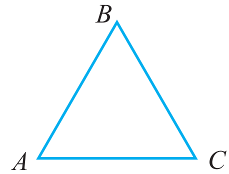
Аналогично доказывается, что $m(\angle FCB) > m(\angle BAC)$. ▶

Напомним, что треугольники классифицируются по:

✓ ***Углам***

Остроугольный треугольник	Прямоугольный треугольник	Тупоугольный треугольник
		
Все углы острые: $m(\angle A) < 90°$, $m(\angle B) < 90°$, $m(\angle C) < 90°$.	Один угол прямой: $m(\angle C) = 90°$.	Один угол тупой: $m(\angle A) > 90°$.

✓ ***Сторонам***

Произвольный треугольник	Равнобедренный треугольник	Равносторонний треугольник
		
Все стороны имеют неравные длины: $AB \neq AC$, $AB \neq BC$, $AC \neq BC$.	Две стороны конгруэнтны: $AC = BC$, $AC \neq AB$.	Все стороны конгруэнтны: $AB = AC = BC$.

Задачи с решением

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника в два раза длиннее основания. Найдем длины сторон треугольника, если его полупериметр равен 40 см.

Решение:

Периметр треугольника ABC равен 80 см, значит, $AB + AC + BC = 80$ см.
Поскольку $AC = AB = 2BC$, получим: $5BC = 80$ см $\Leftrightarrow BC = 16$ см.
Тогда $AC = AB = 2BC = 32$ см.

Ответ: 16 см, 32 см, 32 см.

2. Докажем, что если две высоты треугольника конгруэнтны, то треугольник равнобедренный (рис. 9.18).

Решение:

Пусть ABC – треугольник, у которого высоты BB_1 и CC_1 конгруэнтны. Так как треугольники BCC_1 и BCB_1 прямоугольные с общей гипотенузой BC и с конгруэнтными катетами BB_1 и CC_1, то они конгруэнтны. Тогда $\Delta BCC_1 \equiv \Delta CBB_1 \Rightarrow \angle C_1BC \equiv \angle B_1CB$, то есть $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Значит, ΔABC – равнобедренный, ч. т. д.

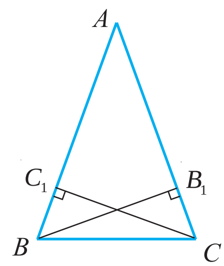


Рис. 9.18

3. Докажем, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает на сторонах этого угла конгруэнтные отрезки.

Решение:

Пусть прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекает стороны этого угла в точках B, C, а биссектрису – в точке D (рис. 9.19).

Прямоугольные треугольники ABD и ACD конгруэнтны, так как у них общий катет AD и конгруэнтные острые углы. Отсюда следует, что $[AC] \equiv [AB]$, ч. т. д.

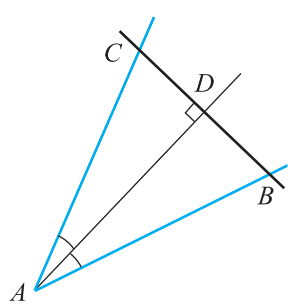


Рис. 9.19

4. Построим треугольник ABC, если даны его элементы a, b, m_a (две стороны и медиана одной из этих сторон) (рис. 9.20).

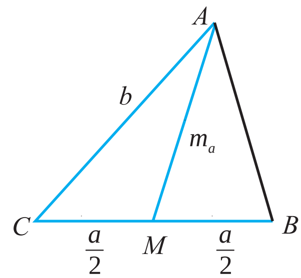


Рис. 9.20

Решение:

В задачах на построение требуется по каким-либо заданным элементам геометрической фигуры построить эту фигуру (среди данных могут быть и сумма или разность каких-то элементов искомой фигуры) при помощи указанных чертежных инструментов. В дальнейшем предполагается, что все построения должны быть выполнены при помощи *циркуля* и *линейки*.

Обычно схема решения задачи на построение состоит из четырех этапов:

1) *анализ* условий, при которых можно построить геометрическую фигуру;
2) *построение* геометрической фигуры;
3) *доказательство* того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи;
4) *исследование* (имеет ли задача решение и, в случае положительного ответа, сколько различных решений имеет она).

Анализ. Предположим, что треугольник ABC построен и $[AM]$ – его медиана. Из условия задачи следует, что треугольник AMC можно построить, поскольку известны его стороны: $AC = b$, $CM = \frac{a}{2}$ и $AM = m_a$. Вершина B лежит на полупрямой $[CM$ так, что $CM = MB = \frac{a}{2}$.

Построение. Строим ΔACM, у которого $AC = b$, $CM = \frac{a}{2}$, $AM = m_a$. На луче $[CM$ строим точку B так, что M является серединой отрезка CB. Очевидно, что $CB = a$.

Доказательство. Из построения треугольника ABC следует, что $[AM]$ – его медиана длины m_a, стороны AC и BC имеют длины b и a соответственно, значит, треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.

Исследование. Треугольник ABC может быть построен при условии, что может быть построен треугольник ACM. Следовательно, задача имеет решение тогда и только тогда, когда наибольшее из чисел b, $\frac{a}{2}$, m_a меньше суммы двух остальных чисел.

Задачи

A

1. Отрезки AB и CD делятся в точке пересечения пополам. Найдите длину отрезка AC, если $BD = 12$ см.

2. Прямая проходит через середину отрезка AB. Найдите расстояние от точки B до этой прямой, если расстояние от точки A до заданной прямой равно 8 см.

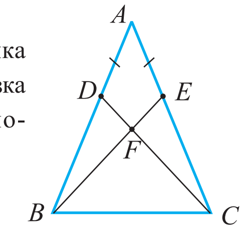
3. Периметр равнобедренного треугольника равен 100 см, а длина его основания равна 40 см. Найдите длину боковой стороны.

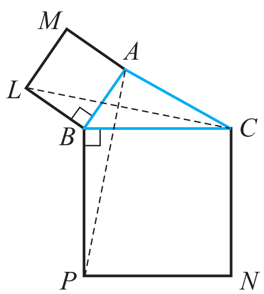
4. Вычислите периметр равнобедренного треугольника с основанием 20 см и боковой стороной 40 см.

5. Периметр равнобедренного треугольника равен 44 см. Найдите стороны треугольника, если его основание на 4 см меньше боковой стороны.

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 56 см. Найдите стороны треугольника, если длина его боковой стороны на 2 см меньше его основания.

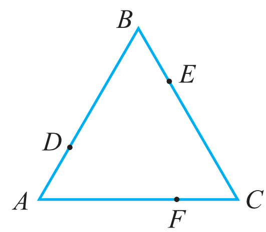
7. На конгруэнтных сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC построены конгруэнтные отрезки AD и AE. Найдите длину отрезка BF, если $CF = 3$ см. (*Указание*. $\Delta CDA \equiv \Delta BEA \Rightarrow \Delta CFB$ – равнобедренный).





8. На сторонах AB и BC произвольного треугольника ABC, вне треугольника построены квадраты $ABLM$ и $BCNP$. Докажите, что $\Delta LBC \equiv \Delta ABP$.

9. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены конгруэнтные отрезки AD, BE и CF, как на рисунке. Найдите стороны треугольника ΔDEF, если $DE = 3$ см.



Б

10. Докажите, что высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, конгруэнтны.

11. Докажите, что биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.

12. Докажите, что медианы боковых сторон равнобедренного треугольника конгруэнтны.

13. Докажите, что точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла.

14. Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

15. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC соответственно взяты точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 = AC_1$. Докажите, что:
а) $\Delta AB_1C \equiv \Delta AC_1B$; б) $\Delta CB_1B \equiv \Delta BC_1C$.

16. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Докажите, что:
а) медианы AM и A_1M_1 конгруэнтны; б) биссектрисы AL и A_1L_1 конгруэнтны.

17. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и их медианы AM и A_1M_1 соответственно. Докажите, что эти треугольники конгруэнтны, если $[AM] \equiv [A_1M_1]$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$ и $[BC] \equiv [B_1C_1]$.

18. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны, если $[AC]\equiv[A_1C_1]$, $[AB]\equiv[A_1B_1]$ и $[AM]\equiv[A_1M_1]$, где $[AM]$ и $[A_1M_1]$ – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

19. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны, если $[BC]\equiv[B_1C_1]$, $[AM]\equiv[A_1M_1]$ и $\angle CMA\equiv\angle C_1M_1A_1$, где $[AM]$ и $[A_1M_1]$ – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

20. Докажите, что длина медианы треугольника меньше полусуммы длин сторон, исходящих из той же вершины треугольника, что и медиана.

21. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше полупериметра треугольника и меньше его периметра.

22. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и их медианы AM и A_1M_1. Известно, что $[AM]\equiv[A_1M_1]$, $\angle MAC\equiv\angle M_1A_1C_1$ и $\angle MAB\equiv\angle M_1A_1B_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны.

23. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и их биссектрисы AL и A_1L_1. Известно, что $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[AL]\equiv[A_1L_1]$ и $\angle BAC\equiv\angle B_1A_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны.

24. Отрезок AM является медианой основания равнобедренного треугольника ABC $(AB=AC)$. Найдите длину медианы AM, если периметр треугольника ABC равен $\mathscr{P}$, а периметр треугольника ABM равен $\mathscr{P}_1$.

25. Длины сторон треугольника относятся как $3:4:5$. Найдите длины сторон этого треугольника, если его периметр равен 60 см.

26. Постройте треугольник ABC, если даны его элементы:
а) $a,\ b,\ \angle C$; б) $a,\ \angle B,\ \angle C$; в) $\angle A,\ a,\ b\ (a>b)$.

27. Постройте прямоугольный треугольник ABC (a, b – катеты, c – гипотенуза), если даны его элементы:
а) $a,\ c$; б) $a,\ \angle B$; в) $c,\ \angle A$.

28. Постройте равнобедренный треугольник, если даны его элементы:
а) основание и боковая сторона; б) боковая сторона и угол при основании;
в) основание и угол при основании; г) боковые стороны и угол между ними;
д) боковая сторона и высота, проведенная к основанию;
е) угол между боковыми сторонами и высота, проведенная к основанию;
ж) основание и угол между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне.

29. Постройте треугольник ABC, если даны медиана m_a и углы, образованные медианой и сторонами треугольника, которые исходят из той же вершины, что и медиана.

30. Постройте треугольник ABC, если даны его элементы или элементы и сумма/разность некоторых элементов:
а) $a,\ b,\ h_b$; б) $a,\ h_a,\ m_a$; в) $a,\ b,\ m_c$; г) $a,\ b+c,\ \angle B$;
д) $a,\ b-c,\ \angle C$; е) $a,\ b+c,\ \angle A$; ж) $a+b+c,\ \angle A,\ \angle B$; з) $a,\ b-c,\ \angle B-\angle C$.

§3 Параллелограмм и его свойства. Трапеция

Замечание. В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые четырехугольники (многоугольники), т. е. четырехугольники (многоугольники), лежащие в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Определение. Четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом**.

Теорема 9. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда противолежащие стороны попарно конгруэнтны.

Теорема 10. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две противолежащие стороны параллельны и конгруэнтны.

Теорема 11. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда противоположные углы попарно конгруэнтны.

Теорема 12. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Задание. Докажите теоремы 9–12.

Теорема 13 (теорема о равноудаленных параллельных прямых)
Пусть прямые a и d не параллельны. Если на прямой a отложить конгруэнтные отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ и через их концы провести прямые, параллельные прямой d, то эти прямые отсекут на любой другой прямой b ($b \nparallel d$) конгруэнтные отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ (рис. 9.21).

Доказательство:

Проведем через точки B_{i+1} полупрямые, параллельные прямой a, и обозначим через C_i их точки пересечения с прямыми A_iB_i. Заметим, что четырехугольники $A_iA_{i+1}B_{i+1}C_i$ являются параллелограммами, откуда следуют соотношения $[C_iB_{i+1}] \equiv [A_iA_{i+1}]$. Применяя II признак (УСУ), можно доказать, что

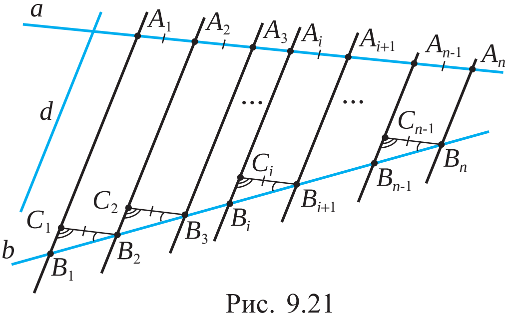


Рис. 9.21

$$\Delta B_1C_1B_2 \equiv \Delta B_2C_2B_3 \equiv \ldots \equiv \Delta B_iC_iB_{i+1} \equiv \ldots \equiv \Delta B_{n-1}C_{n-1}B_n,$$

откуда следует, что $[B_1B_2] \equiv [B_2B_3] \equiv \ldots \equiv [B_iB_{i+1}] \equiv \ldots \equiv [B_{n-1}B_n]$. ▶

Частные виды параллелограмма

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого один угол прямой. Из теорем о параллелограммах следует, что у прямоугольника все углы прямые.

Теорема 14. Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали конгруэнтны.

Ромб – это параллелограмм, у которого смежные стороны конгруэнтны. Следовательно, у ромба все стороны конгруэнтны.

> **Теорема 15.** Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны или являются биссектрисами его углов.

Задание. Докажите теоремы 14, 15.

Квадрат – это ромб с одним прямым углом или прямоугольник с конгруэнтными смежными сторонами.

Трапеция – это четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие непараллельны. Параллельные стороны называются ***основаниями*** трапеции, а две другие – ***боковыми сторонами***.

Трапеция с конгруэнтными боковыми сторонами называется ***равнобочной*** (или ***равнобокой***, ***равнобедренной***) ***трапецией***.

Средней линией трапеции называется отрезок, который соединяет середины боковых сторон. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и ее длина равна полусумме длин оснований трапеции.

Задачи с решением

1. Меньшее основание равнобокой трапеции конгруэнтно боковой стороне, а диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдем величины внутренних углов трапеции (рис. 9.22).

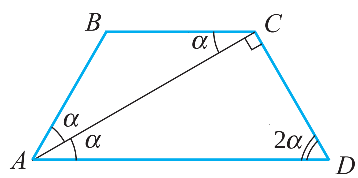


Рис. 9.22

Решение:

Пусть $ABCD$ – равнобокая трапеция, у которой $[AB]\equiv[BC]\equiv[CD]$ и $AC\perp CD$.

Поскольку $BC\parallel AD$ и AC – секущая, то $m(\angle BCA)=m(\angle CAD)=\alpha$. Так как ΔABC – равнобедренный, $[AB]\equiv[BC]$, то $m(\angle BAC)=\alpha$. В силу того, что углы при основании равнобокой трапеции равны, имеем $m(\angle CDA)=m(\angle BAD)=2\alpha$. Из прямоугольного треугольника ACD получаем $3\alpha=90°\Leftrightarrow\alpha=30°$. Тогда

$$m(\angle CDA)=m(\angle BAD)=2\cdot 30°=60°,\qquad m(\angle ABC)=m(\angle BCD)=\alpha+90°=120°.$$

Ответ: 120°, 120°, 60°, 60°.

2. Докажем, что высота и медиана прямоугольного треугольника, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол, величина которого равна разности величин острых углов.

Решение:

Пусть $[CD]$ – высота и $[CM]$ – медиана прямоугольного треугольника ABC ($m(\angle C)=90°$, $M\neq D$) (рис. 9.23).

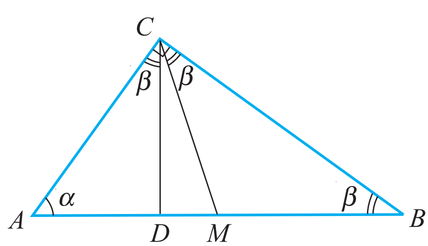


Рис. 9.23

Треугольники CMB и AMC равнобедренные, так как $CM=MA=MB$. Поскольку прямоугольные треугольники ACD и ACB имеют общий острый угол A, то углы ACD и CBA конгруэнтны. Следовательно, $m(\angle DCM)=m(\angle ACM)-m(\angle ACD)=\alpha-\beta$, ч. т. д.

Если $M\equiv D$, то утверждение задачи очевидно.

3. Построим трапецию, если даны основание, угол при этом основании и боковые стороны.

Решение:

Анализ. Пусть $ABCD$ – искомая трапеция, у которой основание $AD=a$, BAD – угол при основании, $m(\angle BAD)=\alpha$, и $AB=l_1$, $CD=l_2$ – боковые стороны (рис. 9.24).

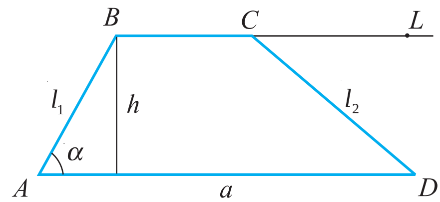


Рис. 9.24

Замечаем, что ΔBAD может быть построен по двум сторонам и углу между ними. Вершина C трапеции принадлежит полупрямой $[BL$, параллельной прямой AD, и окружности $\mathscr{C}(D, l_2)$ с центром в точке D и радиусом $CD=l_2$. Таким образом, C есть точка пересечения полупрямой $[BL$ и окружности $\mathscr{C}(D, l_2)$.

Построение. Строим последовательно ΔBAD, полупрямую $[BL \parallel AD$ (точки L и D лежат в одной и той же полуплоскости, ограниченной прямой AB) и окружность $\mathscr{C}(D, l_2)$. Точка пересечения окружности $\mathscr{C}(D, l_2)$ с полупрямой $[BL$ служит четвертой вершиной трапеции.

Доказательство очевидно.

Исследование. Очевидно, что задача имеет решение, если $C \in [BL$, $C \neq B$ и $CD \geq h$, где h – высота трапеции.

Если $BD > CD > h$, то задача имеет два решения (если $CD=h$, то задача имеет одно решение: трапеция прямоугольная). Так как $BD=\sqrt{l_1^2+a^2-2l_1a\cos\alpha}$, $h=l_1\sin\alpha$, то условие существования решения может быть переписано в виде

$$\sqrt{l_1^2+a^2-2l_1a\cos\alpha} > l_2 \geq l_1\sin\alpha.$$

Задачи

А

1. Длины диагоналей четырехугольника равны 16 см и 28 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.
2. Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке E. Найдите длину отрезка AE, если $AB=18$ см и $AD=30$ см.
3. Один из углов параллелограмма равен 50°. Найдите остальные углы параллелограмма.
4. Диагональ параллелограмма делит его острый угол на два угла: в 30° и 40°. Найдите углы параллелограмма.
5. Один из углов, образованных гипотенузой и медианой, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, равен 80°. Найдите острые углы прямоугольного треугольника.
6. Величина угла, образованного одним из катетов прямоугольного треугольника и медианой, проведенной к гипотенузе, равна 20°. Найдите острые углы треугольника.
7. Разность между величинами противолежащих углов равнобокой трапеции равна 30°. Найдите величины углов трапеции.

8. В равнобокой трапеции основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 8 см и 32 см. Найдите длины оснований трапеции.

9. Длины оснований трапеции относятся как $3:2$, а длина ее средней линии равна 70 см. Найдите длины оснований трапеции.

10. По одну сторону от прямой d даны две точки M и N, отстоящие от нее на расстоянии 12 см и 28 см соответственно. Найдите расстояние от середины отрезка MN до прямой d.

Б

11. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке E. Докажите, что треугольник ABE равнобедренный.

12. Докажите, что длина медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы.

13. Докажите, что если длина медианы треугольника равна половине длины стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

14. В параллелограмме биссектрисы всех внутренних углов пересекаются в четырех различных точках. Докажите, что эти точки являются вершинами прямоугольника.

15. Основания равнобокой трапеции равны a и b $(a>b)$. Докажите, что основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, делит большее основание трапеции на отрезки длиной $\frac{1}{2}(a+b)$ и $\frac{1}{2}(a-b)$.

16. Диагонали четырехугольника равны d_1 и d_2. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.

17. Основание высоты, проведенной из вершины тупого угла равнобокой трапеции, делит большее основание трапеции на два отрезка. Найдите отношение длин этих отрезков, если длины оснований трапеции равны 40 см и 56 см.

18. Постройте ромб по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла.

19. Постройте ромб по сумме длин его диагоналей и величине угла, образованного диагональю и одной из сторон ромба.

20. Постройте параллелограмм по двум сторонам, исходящим из одной вершины, и одной из диагоналей.

21. Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям.

22. Постройте ромб по стороне и диагонали.

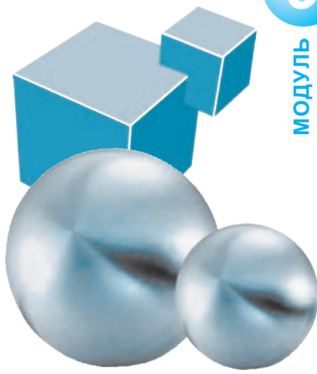
23. Постройте ромб по его диагоналям.

24. Постройте трапецию $ABCD$, если даны его острые углы A и D, а также основания $AD=a,\ BC=b\ (a>b)$.

25. Постройте параллелограмм по диагоналям и высоте.

26. Постройте трапецию по одному основанию, высоте и диагоналям.

§4 Подобие фигур. Подобие треугольников. Теорема Фалеса



Определение. Пусть k – положительное действительное число. **Преобразованием подобия с коэффициентом k** (или **подобием с коэффициентом k**) **плоскости** называется отображение плоскости на себя, при котором для любых двух точек A, B и соответственно их образов A', B' выполнено условие $A'B' = kAB$.

Из равенства $A'B' = k \cdot AB$ следует, что если $A \neq B$, то $A' \neq B'$.

Теорема 16. **1.** Композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом k_1k_2.

2. Преобразование, обратное подобию с коэффициентом k, является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Доказательство:

1. Пусть различные точки A и B отображаются при подобии с коэффициентом k_1 в точки A' и B' соответственно, а эти точки, в свою очередь, отображаются при подобии с коэффициентом k_2 в точки A'' и B'' соответственно. Тогда $A'B' = k_1AB$ и $A''B'' = k_2A'B'$. Отсюда следует, что $A''B'' = k_1k_2AB$, то есть преобразование, отображающее точки A и B в точки A'' и B'' соответственно, является подобием с коэффициентом k_1k_2.

2. При подобии с коэффициентом k для различных точек A и B плоскости и соответственно их образов A' и B' имеет место равенство $A'B' = kAB$. Отсюда следует, что $AB = \frac{1}{k}A'B'$, то есть преобразование, отображающее точки A' и B' в точки A и B соответственно, является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$. ▶

Две фигуры называются ***подобными***, если существует преобразование подобия плоскости, отображающее одну фигуру на другую.

Конгруэнтность фигур – это частный случай подобия $(k = 1)$.

Определение. Треугольники ABC и $A'B'C'$ называются **подобными**, если $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ и $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \angle C'$.

Обозначаем: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Напомним некоторые теоремы, свойства и признаки подобия треугольников.

Теорема 17 (теорема Фалеса). Прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, параллельная одной из его сторон, отсекает на прямых, определяемых остальными двумя его сторонами, пропорциональные отрезки (рис. 9.25).

Теорема 18 (основная лемма подобия).
Пусть ABC – треугольник и B_1 – точка, лежащая на прямой BC, отличная от точки C. Если прямая, параллельная стороне AB, проходит через точку B_1 и пересекает прямую AC в точке A_1, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ (рис. 9.25).

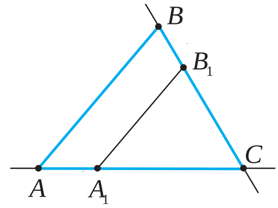


Рис. 9.25

Чтобы доказать, что два треугольника подобны, часто применяют следующие ***признаки подобия треугольников***:

I признак. Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

II признак. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, конгруэнтны, то треугольники подобны.

III признак. Если все стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Теорема 19 (свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника)
Пусть ABC – треугольник и A' – внутренняя точка стороны BC. Полупрямая $[AA'$ является биссектрисой внутреннего угла BAC этого треугольника тогда и только тогда, когда $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{AB}{AC}$ (рис. 9.26).

Теорема 20. Если стороны угла XOY пересечены n, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, параллельными прямыми A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n, то соответствующие отрезки, отсекаемые этими прямыми на его сторонах, пропорциональны:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} \text{ (рис. 9.27).}$$

Теорема 21. Если две параллельные прямые a и b пересечены n, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$, прямыми, проходящими через одну и ту же точку O, $O \notin a$, $O \notin b$, то отсекаемые отрезки на этих прямых пропорциональны:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} \text{ (рис. 9.28).}$$

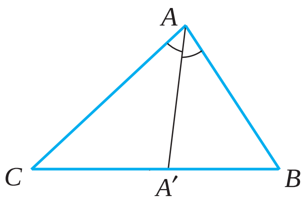


Рис. 9.26

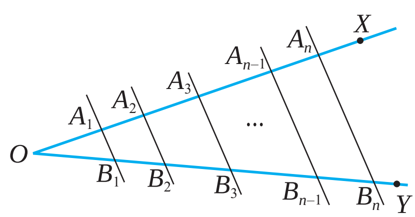


Рис. 9.27

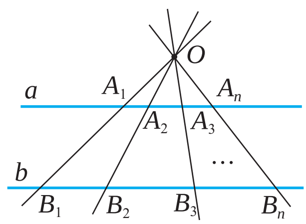


Рис. 9.28

Задание. Докажите теоремы 19–21.

Задача с решением

В треугольник ABC вписан ромб так, что угол A у них общий, а другая вершина принадлежит стороне BC треугольника. Найдем длину стороны ромба, если $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$ (рис. 9.29).

Решение:

Пусть $AMLN$ – ромб, удовлетворяющий условиям задачи. Тогда диагональ AL этого ромба является биссектрисой угла A треугольника ABC.

Так как треугольники MBL и ABC подобны, то

$AC : ML = BC : BL = (BL + LC) : BL = 1 + LC : BL$ (1).

Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $LC : BL = AC : AB = b : c$ (2).

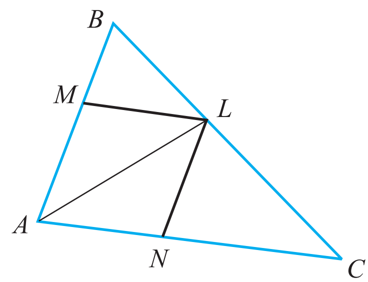


Рис. 9.29

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$\frac{b}{ML} = 1 + \frac{b}{c} \Rightarrow ML = \frac{bc}{b+c}.$$

Ответ: Длина стороны ромба равна $\dfrac{bc}{b+c}$.

Задачи

A

1. Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны 18 см и 6 см, а длина боковой стороны другого равнобедренного треугольника равна 6 см. Найдите длину основания второго треугольника, если известно, что угол при основании первого треугольника конгруэнтен углу при основании второго треугольника.

2. Найдите периметры подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB = 12$ см, $A_1B_1 = 3$ см, $AC = 16$ см, $B_1C_1 = 2$ см.

3. Основание высоты CD прямоугольного треугольника ABC $(m(\angle C) = 90°)$ делит его гипотенузу на отрезки $AD = 18$ см и $BD = 32$ см. Найдите длины сторон треугольника ABC.

4. В треугольник ABC, у которого высота $AD = 10$ см и сторона $BC = 15$ см, вписан квадрат так, что две его вершины принадлежат стороне BC, а две другие – сторонам AB и BC. Найдите длину стороны квадрата.

5. Несущие прямые боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите длины сторон треугольника AED, если $AB = 10$ см, $BC = 20$ см, $CD = 12$ см, $AD = 30$ см.

6. Длины теней двух деревьев равны 10,8 м и 1,8 м. Высота второго дерева равна 1,2 м. Найдите высоту первого дерева.

Б

7. Углы A и A_1 равнобедренных треугольников ABC $([AB]\equiv[AC])$ и $A_1B_1C_1$ $([A_1B_1]\equiv[A_1C_1])$ конгруэнтны. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

8. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $m(\angle C)=90^\circ$ и $[CD]$ – высота. Докажите, что:
а) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$; б) $\Delta ABC \sim \Delta CBD$; в) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

9. Пусть $[AM]$ и $[A_1M_1]$ – медианы подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что $A_1M_1 : AM = A_1B_1 : AB$.

10. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а $[AL]$ и $[A_1L_1]$ – соответствующие биссектрисы. Докажите, что $A_1L_1 : AL = A_1B_1 : AB$.

11. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Докажите, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

12. Докажите, что если H – точка пересечения несущих прямых высот AA_1, BB_1, CC_1 произвольного треугольника ABC, то $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

13. Докажите, что в любой трапеции коллинеарны: точка пересечения диагоналей, середины оснований и точка пересечения несущих прямых боковых сторон.

14. Дан треугольник ABC $(AB < BC)$, у которого $[BL]$ и $[BM]$ – соответственно биссектриса и медиана, проведенные из вершины B. Докажите, что $BL < BM$.

15. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M так, что $AM \cdot CM = BM \cdot MD$. Докажите, что $\angle ADB \equiv \angle ACB$.

16. Длины сторон треугольника относятся как $2:4:5$. Найдите длины сторон треугольника, подобного заданному, если его периметр равен 66 см.

17. Даны подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB=32$ см, $BC=40$ см, $A_1B_1=24$ см, $AC-A_1C_1=12$ см. Найдите длины остальных сторон треугольников.

18. Даны треугольник ABC, точки $M\in AB$, $N\in BC$ и $MN\parallel AC$. Найдите длину отрезка AM, если $AB=32$ см, $AC=40$ см и $MN=30$ см.

19. Несущие прямые боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите высоту треугольника AOD, проведенную из вершины O, если $BC=14$ см, $AD=42$ см и высота трапеции равна 6 см.

20. Постройте треугольник ABC, если даны $\angle A$, b, а $b:c=m:n$.

21. Постройте треугольник ABC, если даны $\angle A$, $\angle C$ и сумма $b+h_b$.

22. Впишите в треугольник ABC квадрат так, чтобы две его вершины лежали на стороне AB, а две другие – на сторонах AC и BC.

23. Постройте равнобедренный треугольник, если даны угол, образованный боковыми сторонами, и сумма длины основания и высоты, проведенной к основанию.

§5 Замечательные линии и точки треугольника

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется ***средней линией*** треугольника.

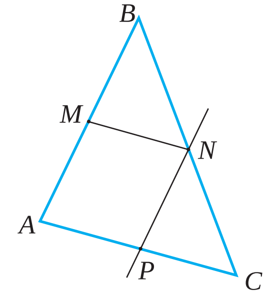


Рис. 9.30

Теорема 22. Если $[MN]$ – средняя линия треугольника ABC (M – середина стороны AB, N – середина стороны BC), то $[MN] \parallel [AC]$ и $2MN = AC$ (рис. 9.30).

Доказательство:

Пусть точка M – середина стороны AB (рис. 9.30). Через нее проводим прямую, параллельную AC. По теореме 13 эта прямая делит сторону BC пополам, то есть она проходит через точку N. В результате получаем $[MN] \parallel [AC]$. Если через точку N проведем прямую, параллельную стороне AB, то она пересечет сторону AC в точке P, которая является ее серединой. Значит, $AC = AP + PC = 2AP$. Четырехугольник $AMNP$ является параллелограммом, следовательно, $MN = AP$ как противолежащие стороны параллелограмма.

Из последних двух равенств следует, что $2MN = AC$. ▶

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ему стороны, называется ***медианой треугольника***.

Теорема 23. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из медиан в отношении $1:2$, считая от стороны к вершине.

Задание. Докажите теорему 23.

Точка пересечения медиан треугольника называется ***центром тяжести треугольника***.

Медиатрисой или ***серединным перпендикуляром*** отрезка называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная ему.

Используя свойство медиатрисы (точки медиатрисы отрезка равноудалены от его концов), можно доказать, что медиатрисы сторон треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от его вершин. Эта точка является ***центром окружности, описанной*** около треугольника. Следовательно, около каждого треугольника можно описать окружность.

Отрезок, определяемый вершиной треугольника и ее проекцией на несущую прямую противолежащей стороны, называется ***высотой треугольника***.

Теорема 24. Несущие прямые высот треугольника пересекаются в одной точке.

Задание. Докажите теорему 24.

Точка пересечения несущих прямых высот треугольника называется ***ортоцентром треугольника***.

Треугольник называется ***вписанным в окружность***, если все его вершины принадлежат окружности. Говорят также, что окружность ***описана около треугольника***. Треугольник называется ***описанным около окружности***, если все его стороны касаются окружности. Говорят также, что окружность ***вписана в треугольник***.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой пересечения биссектрисы и противолежащей стороны, называется ***биссектрисой треугольника***.

Теорема 25. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник.

Медиатрисы, медианы, биссектрисы и высоты треугольника называются ***замечательными линиями треугольника***.

Центр окружности, вписанной в треугольник, центр окружности, описанной около треугольника, центр тяжести треугольника и ортоцентр треугольника называются ***замечательными точками треугольника***.

Задачи с решением

1. Длина основания AC равнобедренного треугольника ABC равна 10 см, а длины конгруэнтных сторон – 13 см. Найдем расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис этого треугольника.

Решение:

Так как высота BD треугольника ABC является медианой и биссектрисой, то точка G пересечения медиан и точка O пересечения биссектрис лежат на BD (рис. 9.31). Находим $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Согласно свойству медиан имеем $GD = \frac{1}{3}BD = 4$ см.

Поскольку $[AO]$ – биссектриса треугольника ABD, имеем $\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{13}$.

Так как $OB = BD - OD = 12 - OD$, то $OD = \frac{10}{3}$ см.

Таким образом, $OG = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$ (см).

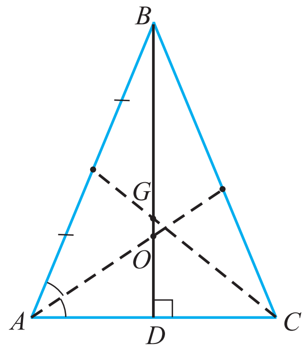


Рис. 9.31

2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 (рис. 9.32). Найдем величины углов треугольника A_1B_1C, если $m(\angle A) = \alpha$, $m(\angle B) = \beta$, $\alpha + \beta \neq 90°$.

Решение:

Прямоугольные треугольники BB_1C и AA_1C имеют конгруэнтные острые углы при вершине C, следовательно, они подобны, откуда $\frac{BC}{B_1C} = \frac{AC}{A_1C}$.

Так как треугольники ABC и A_1B_1C имеют конгруэнтные углы при общей вершине C и соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, то по второму признаку подобия эти треугольники подобны.

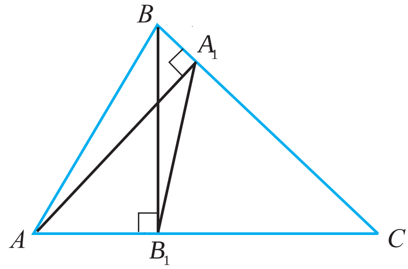


Рис. 9.32

Следовательно, $m(\angle CA_1B_1) = m(\angle CAB) = \alpha$, $m(\angle CB_1A_1) = m(\angle CBA) = \beta$.

Из этой задачи следует, что: *если основания двух высот треугольника не совпадают, то они определяют с третьей вершиной треугольник, подобный данному*.

3. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$, рис. 9.33). Найдем длины сторон треугольника, если высота $AA_1 = 6$ см, а высота $CC_1 = 9{,}6$ см.

Решение:

Пусть $A_1C = A_1B = x$, $AB = AC = y$. Из подобия прямоугольных треугольников CC_1B и AA_1B следует:

$\dfrac{CC_1}{AA_1} = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow \dfrac{2x}{y} = \dfrac{9{,}6}{6}$. Откуда $y = \dfrac{5}{4}x$.

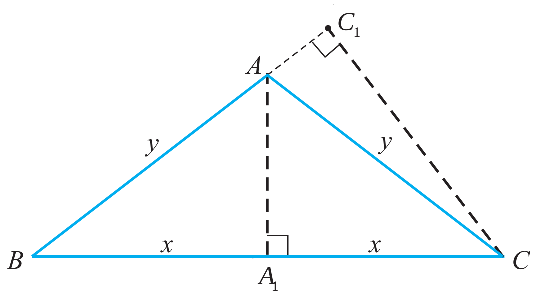


Рис. 9.33

Треугольник AA_1C прямоугольный и по теореме Пифагора $x^2 + 36 = y^2$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{5}{4}x, \\ x^2 + 36 = y^2, \end{cases}$ получаем $x = 8$, $y = 10$.

Таким образом, $AB = AC = 10$ см, $BC = 16$ см.

Задачи

А

1. Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 8 см, а медианы этих сторон перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны треугольника.
2. Стороны треугольника равны 12 см, 6 см и 8 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
3. В равнобедренном треугольнике длина основания равна $4\sqrt{2}$ см, а боковые стороны образуют угол в 120°. Найдите высоты треугольника.
4. Длины двух сторон треугольника равны 10 см и 6 см, а угол, образованный ими, равен 120°. Найдите высоты, проведенные к данным сторонам треугольника.
5. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки, длиной 30 см и 40 см. Найдите длины катетов.
6. Две медианы треугольника перпендикулярны. Найдите длины сторон треугольника, если длины этих медиан равны 4,5 см и 6 см.
7. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, конгруэнтна одному из катетов и равна 5 см. Найдите длины сторон треугольника.
8. Найдите длины биссектрис острых углов прямоугольного треугольника, если его катеты равны 3 см и 4 см.
9. Длина одной из сторон треугольника равна 36 см. Через точку пересечения медиан треугольника проведена прямая, параллельная данной стороне. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого сторонами треугольника.

Б

10. Медианы катетов прямоугольного треугольника равны $\sqrt{52}$ см и $\sqrt{73}$ см. Найдите длину гипотенузы.

11. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрис и медиан этого треугольника.

12. Медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят этот угол на три конгруэнтных угла. Найдите величины углов треугольника.

13. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найдите длины сторон треугольника и радиус вписанной окружности.

14. Длины сторон треугольника равны 5 см, 6 см и 7 см. Центр окружности, вписанной в этот треугольник, делит биссектрису большего угла на два отрезка. Найдите отношение длин полученных отрезков.

15. Найдите длины биссектрис острых углов прямоугольного треугольника, если его катеты равны 18 см и 24 см.

16. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длины основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника, проведенную к его основанию.

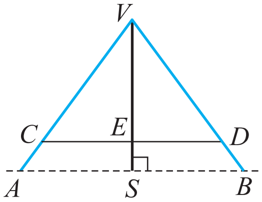
17. Пусть $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – высоты треугольника ABC. Найдите длину стороны BC, если $AC = 6$ см, $B_1C = 4$ см, $A_1C = 3$ см.

Проверочная работа I

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Фотоизображение пшеничного поля, отснятое из самолета, имеет форму прямоугольника с размерами 4×3 см. Зная, что коэффициент подобия между изображением и реальным полем равен 1:10 000, найдите действительные размеры поля. 2

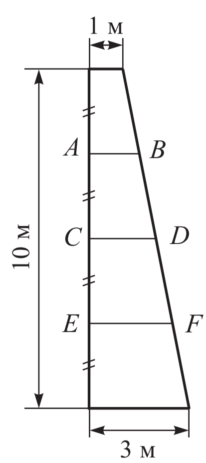


2. Двойная лестница имеет длину одного плеча [VA] 5 м. Для ее крепления используется шнур $[CD]$, на расстоянии 1 м от земли ([AC]) на плече. Найдите длину шнура, если высота ([VS]) лестницы равна 4 м. 2

3. Водосточная труба радиуса 125 мм имеет три ответвления одинакового диаметра. Найдите диаметр этих ответвлений, при котором их суммарная пропускная способность та же, что и у данной трубы. 2

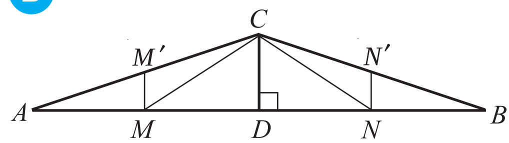
4. В треугольнике ABC $m(\angle A) = 90°$, а $[BD]$ – биссектриса угла $B\,(D \in AC)$. Зная, что $CD = 5$ см, $AD = 4$ см, найдите длины сторон треугольника. 2

5. Металлический столб имеет форму и размеры, указанные на рисунке. Найдите длины горизонтальных балок AB, CD, EF. 2

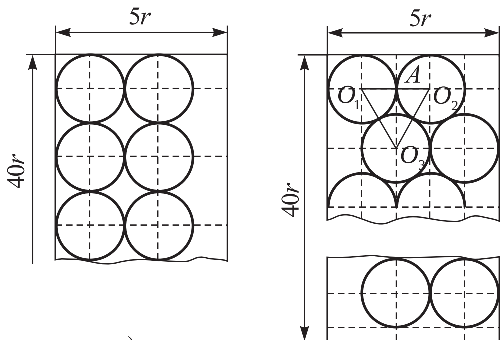


Б

1. Найдите длину балки CN треугольной крыши, форма которой дана на рисунке. Известно, что $AB = d$, $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{3}$, $DN = NB$. 2



2. От квадратного листа со стороной a отрезаны углы так, что оставшаяся часть является правильным восьмиугольником. Найдите длину стороны восьмиугольника. 2
3. Определите, сколько кругов радиуса r можно изготовить из металлической полосы шириной $5r$ и длиной $40r$ нерациональным и рациональным вырезанием (на рисунке показаны нерациональное (а) и рациональное (б) вырезание). 3
4. В мастерской по резке жести образуются остатки в виде равностороннего треугольника со стороной 240 мм. Для нового изделия нужно изготовить детали в виде квадрата со стороной 80 мм и в виде прямоугольника размерами 190×220 мм. 3
Какие из этих деталей можно изготовить из остатков?



а) б)

§6 Метрические соотношения в треугольнике и окружности

6.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом в вершине C, высотой CD и общепринятыми обозначениями (рис. 9.34).

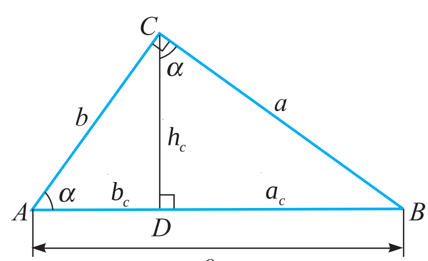


Рис. 9.34

Из треугольников ACB, CDB, ADC находим:

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$ (1), $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ (2);

$\frac{a_c}{a} = \sin\alpha$ (3), $\frac{a_c}{h_c} = \operatorname{tg}\alpha$ (4);

$\frac{b_c}{b} = \cos\alpha$ (5), $\frac{h_c}{b_c} = \operatorname{tg}\alpha$ (6).

Сравнивая равенства (1) и (3), (2) и (5), (4) и (6), получаем:

$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}$, то есть $a^2 = c \cdot a_c$ (7);

$\frac{b}{c} = \frac{b_c}{b}$, то есть $b^2 = c \cdot b_c$ (8);

$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$, то есть $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

Складывая почленно равенства (7) и (8), получаем: $a^2+b^2=c(a_c+b_c)$. Так как $a_c+b_c=c$, то $a^2+b^2=c^2$.

Таким образом, мы доказали следующие три теоремы:

Теорема 26 (теорема катета). В прямоугольном треугольнике квадрат длины катета равен произведению длины гипотенузы на длину проекции этого катета на гипотенузу.

На рисунке 9.35 $AC^2=BC\cdot CD,\ AB^2=BC\cdot BD.$

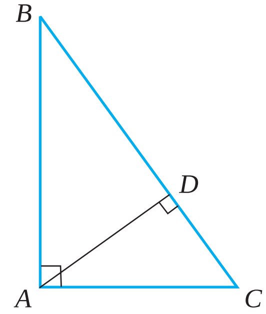


Рис. 9.35

Теорема 27 (теорема высоты). В прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равен произведению длин проекций катетов на гипотенузу.

На рисунке 9.35 $AD^2=CD\cdot BD.$

Теорема 28 (теорема Пифагора). В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин его катетов.

На рисунке 9.35 $BC^2=AC^2+AB^2$.

Задачи с решением

1. Внутри угла O в 60° расположена точка M, отстоящая на расстояниях 2 см и 11 см от сторон угла. Вычислим расстояние от точки M до вершины угла (рис. 9.36).

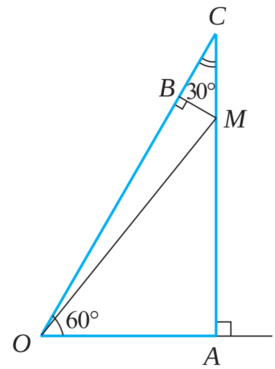


Рис. 9.36

Решение:

Имеем $MA=11$ см, $MB=2$ см. Пусть прямая AM пересекает сторону OB угла AOB в точке C. Так как в прямоугольном треугольнике MBC $m(\angle C)=30°$, то $CM=4$ см.

Из прямоугольного треугольника OAC получаем:

$$OA=AC\cdot \operatorname{tg}30°=\frac{15}{\sqrt{3}}\ (\text{см}).$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAM имеем:

$$OM=\sqrt{OA^2+AM^2}=\sqrt{75+121}=14\ (\text{см}).$$

Ответ: $OM=14$ см.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $[AD]$ – высота, проведенная к гипотенузе, а точки E и F являются проекциями точки D на катеты AB и AC соответственно. Докажем, что $BD\cdot CD=CF\cdot AF+BE\cdot AE$ (рис. 9.37).

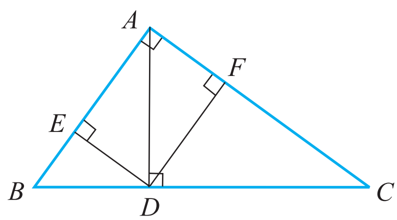


Рис. 9.37

Решение:

Четырехугольник $AEDF$ – прямоугольник. Значит, $AD^2 = ED^2 + FD^2$ (9).

Применив теорему о высоте к треугольникам ABC, ADB, ADC, получим:

$$AD^2 = BD \cdot CD, \quad ED^2 = AE \cdot BE, \quad DF^2 = CF \cdot AF. \qquad (10)$$

Подставляем (10) в (9) и получаем ч. т. д.

3. Выразим радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, через катеты a, b и гипотенузу c (рис. 9.38).

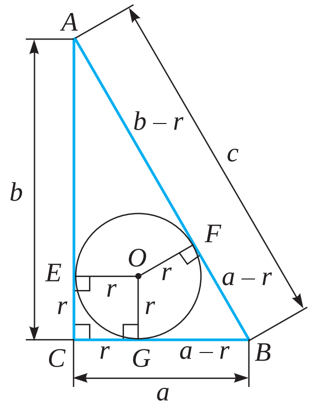


Рис. 9.38

Решение:

Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и E, F, G – точки касания. Так как четырехугольник $EOGC$ – квадрат со стороной r, то $GB = a - r = FB$, $AE = b - r = AF$ – отрезки, соединяющие точку (вне окружности) с точками касания соответствующих несущих прямых, конгруэнтны. Но $AF + FB = AB = c$.

Отсюда $c = a - r + b - r \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{a+b-c}{2}}$.

4. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b проведена биссектриса одного из острых углов. Найдем длину перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на эту биссектрису. Рассмотрим оба возможных случая (рис. 9.39).

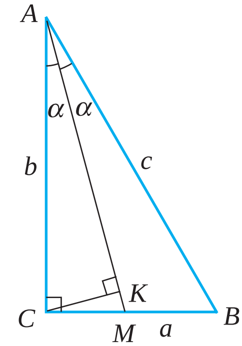


Рис. 9.39

Решение:

Пусть $[AM]$ – биссектриса угла A, $CK \perp AM$.

По теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Из треугольника ABC имеем $\dfrac{b}{c} = \cos 2\alpha$. Так как

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} = \dfrac{1-\dfrac{b}{c}}{2}$, то $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{b}{c}}$.

Из треугольника CKA следует, что $CK = b\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

Длина перпендикуляра в случае, когда биссектриса проведена из вершины угла B, определяется аналогично и равна: $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

Ответ: $\dfrac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ или $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

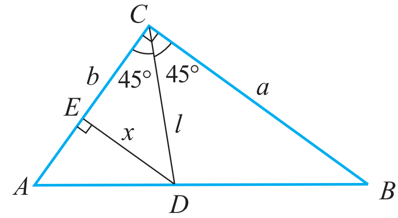


Рис. 9.40

5. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдем длину биссектрисы прямого угла (рис. 9.40).

Решение:

Пусть l – длина биссектрисы CD.

Строим $DE \perp AC$ и обозначим $DE = x$.

Из равнобедренного прямоугольного треугольника DEC следует, что $l = x\sqrt{2}$.

Учитывая, что $\Delta AED \sim \Delta ACB,$ получим: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{ED}{BC} \Rightarrow \dfrac{b-x}{b} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = \dfrac{ab}{a+b}.$

Таким образом, $l = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$

Задачи

A

1. Внутри угла в 60° расположена точка $M,$ отстоящая на расстояниях $\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см от сторон угла. Найдите расстояние от точки M до вершины угла.
2. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найдите радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около него.
3. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, конгруэнтна одному из катетов. Найдите величины острых углов треугольника.
4. Основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите длины катетов.
5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 8 см и 12 см. Найдите длину биссектрисы прямого угла.
6. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите длины катетов треугольника.
7. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из катетов на отрезки длиной 3 см и 9 см. Найдите длины гипотенузы и другого катета.

B

8. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до центра окружности, описанной около него.
9. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в него, равен 6 см. Найдите длины сторон треугольника.
10. Даны прямоугольный треугольник ABC и $[CD]$ – биссектриса его прямого угла. Известно, что $AD = m$ и $BD = n.$ Найдите высоту, проведенную из вершины $C.$

11. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной к гипотенузе, на два треугольника, ADC и BDC. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

12. Докажите, что если величина одного из острых углов прямоугольного треугольника равна 15°, то высота, проведенная к гипотенузе, в 4 раза меньше длины гипотенузы.
(*Указание.* Постройте медиану, проведенную к гипотенузе.)

13. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противолежащий катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найдите длины сторон треугольника.

14. Диаметр полуокружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника, расположен на гипотенузе, а ее центр делит гипотенузу на отрезки длиной 3 см и 4 см. Найдите длины сторон треугольника и радиус полуокружности.

15. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $m(\angle A) = 90°$ и $AC = 1$ м. Зная, что E и F – середины отрезков BC и AB соответственно, а прямые AE и CF перпендикулярны, найдите длины сторон треугольника.

16. Основание D высоты CD, проведенной из вершины прямого угла треугольника ABC, удалено от катетов AC и BC на расстояния m и n соответственно. Найдите длины катетов треугольника.

6.2. Метрические соотношения в произвольном треугольнике

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC с общепринятыми обозначениями, у которого $CD = h$ – высота, проведенная из вершины C (рис. 9.41)

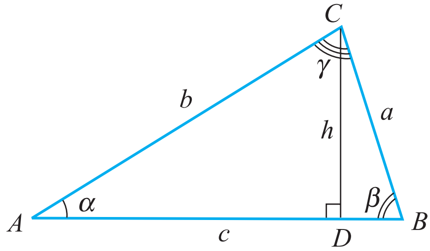


Рис. 9.41

Из треугольников ADC и BDC имеем $\dfrac{h}{b} = \sin\alpha$ и $\dfrac{h}{a} = \sin\beta$ соответственно.

Отсюда $h = b\sin\alpha$ и $h = a\sin\beta$. Значит,

$b\sin\alpha = a\sin\beta$, то есть $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Аналогично, построив высоты из вершин A и B, получим, что $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ и $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$. Сопоставив эти результаты, получим: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

В случае тупоугольного треугольника ABC, аналогично рассуждая, можно получить тот же результат.

Задание. Проведите эти рассуждения.

Таким образом, доказана

Теорема 29 (теорема синусов). Длины сторон произвольного треугольника ABC пропорциональны синусам противолежащих углов:
$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ (рис. 9.42).

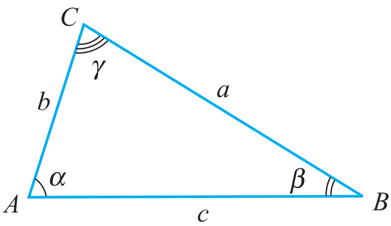


Рис. 9.42

Пусть ABC – произвольный треугольник с общепринятыми обозначениями, у которого $CD=h$ – высота, проведенная из вершины C (рис. 9.43).

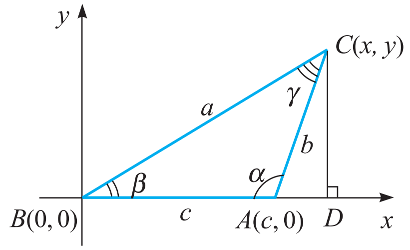


Рис. 9.43

Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке B, причем положительная полуось Ox совпадает с полуосью $[BA$. Пусть вершины C, B и A имеют координаты (x, y), $(0, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно. Из треугольника ACD получаем:

$$AD=b\cos(180°-\alpha)=-b\cos\alpha,$$
$$CD=b\sin(180°-\alpha)=b\sin\alpha.$$

Следовательно, $x=BA+AD=c-b\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$a^2=BC^2=(c-b\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2=c^2-2bc\cos\alpha+b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=$$
$$=c^2+b^2-2cb\cos\alpha.$$

Из треугольника CDB получаем: $x=BD=a\cos\beta$, $y=CD=a\sin\beta$ и

$$b^2=AC^2=(a\cos\beta-c)^2+(a\sin\beta)^2=a^2\cos^2\beta-2ac\cos\beta+c^2+a^2\sin^2\beta=$$
$$=a^2+c^2-2ac\cos\beta.$$

Аналогично, рассматривая систему координат с началом в точке C, получим равенство $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Таким образом, доказана

Теорема 30 (теорема косинусов). В произвольном треугольнике ABC квадрат длины любой стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих двух сторон на косинус угла между ними:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\angle A)$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\angle B)$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\angle C)$ (рис. 9.44).

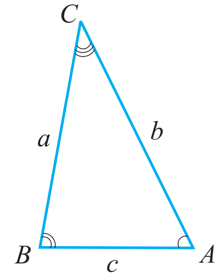


Рис. 9.44

Из этой теоремы следует, что:

а) если $a^2>b^2+c^2$, то угол, противолежащий стороне a, тупой;

б) если $a^2<b^2+c^2$, то угол, противолежащий стороне a, острый;

в) если $a^2=b^2+c^2$, то угол, противолежащий стороне a, прямой.

Замечаем, что при $\alpha > 90°$ (рис. 9.43) проекцией стороны AC на несущую прямую стороны AB является $AD = -b\cos\alpha,$ и тогда $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$ (11).

При $\beta < 90°$ проекцией стороны BC на несущую прямую стороны AB является $BD = a\cos\beta,$ и тогда $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot BD$ (12).
В формулах (11), (12) выражена

Теорема 31 (обобщенная теорема Пифагора). Квадрат длины стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон плюс/минус удвоенное произведение длины одной из этих двух сторон на длину проекции другой стороны на несущую прямую первой стороны.

Задачи с решением

1. Докажем, что в условии теоремы синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R,$ где R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 9.45).

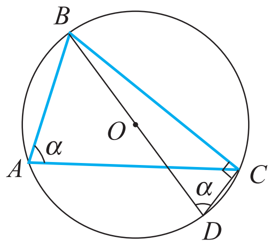


Рис. 9.45

Решение:

Достаточно доказать, что одно из этих трех отношений равно $2R$.

Пусть, например, угол A – острый. Проведем диаметр BD окружности, описанной около треугольника ABC.
В этом случае углы BDC и BAC имеют одинаковую величину α. Из прямоугольного треугольника BCD следует, что $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = BD,$ то есть $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R,$ ч. т. д.

2. В окружность радиуса $R = \sqrt{6} - \sqrt{3}$ вписан треугольник с углами в 15° и 60° (рис. 9.46). Вычислим периметр треугольника.

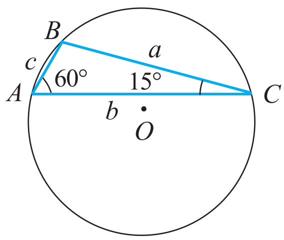


Рис. 9.46

Решение:

Применяя общепринятые обозначения и теорему синусов, получаем:

$$a = 2R\sin 60°,$$
$$b = 2R\sin(180° - 75°) = 2R\sin 75°,$$
$$c = 2R\sin 15°.$$

Тогда, $\mathscr{P}_{ABC} = 2R(\sin 60° + \sin 75° + \sin 15°) = 2R(\sin 60° + 2\sin 45°\cos 30°) =$

$$= 2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = R(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = (\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3}) = 3.$$

Ответ: $\mathscr{P}_{ABC} = 3.$

3. Докажем, что сумма квадратов длин диагоналей любого параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

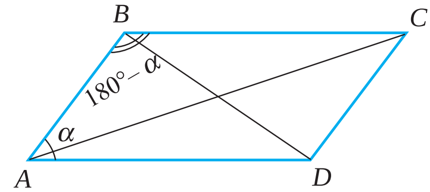


Рис. 9.47

Решение:

Пусть $ABCD$ – параллелограмм, у которого $m(\angle A)=\alpha$ (рис. 9.47).

Тогда $m(\angle B)=180°-\alpha$.

Применим теорему косинусов к треугольникам ABD и ABC:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cos\alpha$, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos(180°-\alpha)$.

Складывая почленно эти равенства (учитывая, что $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$), получим $BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AB^2 + BC^2$, то есть $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, ч. т. д.

Задачи

Б

1. Стороны параллелограмма равны $\sqrt{3}$ см и $\sqrt{7}$ см, а одна из его диагоналей равна 2 см. Найдите другую диагональ.
2. В окружность радиуса 10 см вписан треугольник, один угол которого равен 60°, а другой – 15°. Найдите площадь треугольника.
3. Две стороны треугольника равны 2 м и 3 м, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите длину третьей стороны.
4. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найдите длину гипотенузы треугольника.
5. Длины сторон треугольника равны 4 м, 5 м и 6 м. Найдите длины проекций меньших сторон на бóльшую сторону.
6. Одна из сторон треугольника равна 3 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен 120°, а сторона, противолежащая этому углу, равна 7 см. Найдите длину третьей стороны.
7. Дан треугольник ABC, у которого $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Найдите длину медианы, проведенной к стороне, противолежащей вершине C.
8. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три конгруэнтных угла. Найдите длины сторон треугольника, если длина медианы 5 см.
9. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Вычислите длины этих сторон, если бóльшая из них имеет длину 7 см и один из углов треугольника равен 120°.
10. Окружность проходит через вершину квадрата со стороной a, середину одной из сторон, не проходящих через эту вершину, и через центр квадрата. Найдите радиус окружности.
11. Дан треугольник ABC, у которого площадь равна 14 см^2, $AC=7$ см, $BC=5$ см и угол C тупой. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

6.3. Окружность и круг

Окружностью с центром O радиуса R, $R > 0$, называется множество точек плоскости, расположенных на расстоянии R от точки O.
Обозначается $\mathscr{C}(O, R)$ (рис. 9.48 а)).

Круг с центром O радиуса R, $R > 0$, образован множеством таких точек плоскости, что расстояние от каждой из них до точки O не больше R.
Обозначается $\mathscr{D}(O, R)$ (рис. 9.48 б)).

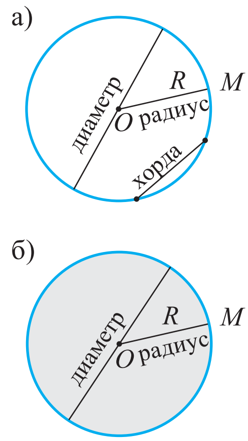
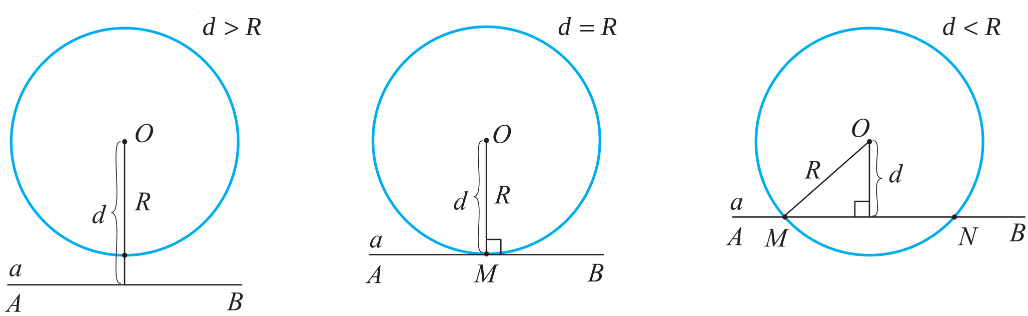


Рис. 9.48

Множество точек плоскости, отстоящих от центра O окружности на расстояниях меньших/бóльших радиуса R окружности, называется ***внутренней***/***внешней областью окружности*** $\mathscr{C}(O, R)$.

Взаимное расположение прямой a и окружности $\mathscr{C}(O, R)$ изображено на рисунке 9.49. Прямая a является:



а) ***внешней к окружности***

б) ***касательной к окружности*** в точке M

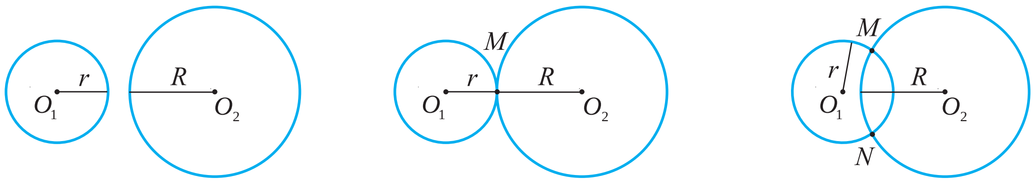
в) ***секущей к окружности*** в точках M и N

Рис. 9.49

Тот факт, что прямая a касается окружности $\mathscr{C}(O, R)$ в точке M, означает, что (рис. 9.49 б)):

1) точка M – единственная общая точка окружности и прямой;
2) прямая a перпендикулярна радиусу OM в точке M;
3) расстояние от центра O до прямой a равно R ($d = R$).

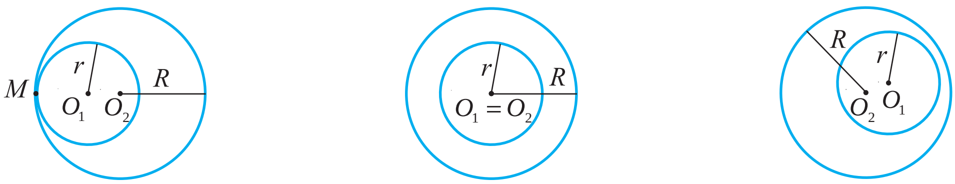
Взаимное расположение двух окружностей изображено на рисунке 9.50. Окружности $\mathscr{C}(O_1, r)$ и $\mathscr{C}(O_2, R)$:



а) ***являются внешними относительно друг друга***

б) ***касаются внешне*** в точке M

в) ***пересекаются*** в точках M и N



г) ***касаются внутренне*** в точке M

д) ***концентрические***

е) ***I – внутренняя относительно второй, II – внешняя относительно первой***

Рис. 9.50

> **Теорема 32.** Отрезки касательных, проведенных из внешней точки к окружности, конгруэнтны ($[AT_1] \equiv [AT_2]$). Биссектриса угла, образованного этими касательными, проходит через центр окружности (рис. 9.51).

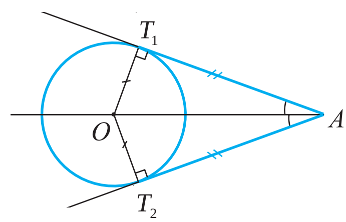


Рис. 9.51

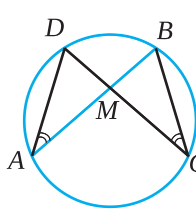
Задание. Докажите теорему 32.

> **Теорема 33 (степень точки).** Если прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках A и B, то произведение $AM \cdot MB$ не зависит от выбора прямой (рис. 9.52).

Доказательство:

1) Рассмотрим случай, когда точка M не принадлежит окружности, то есть она лежит либо внутри окружности (рис. 9.52 а)), либо вне окружности (рис. 9.52 б)).

а)



б)

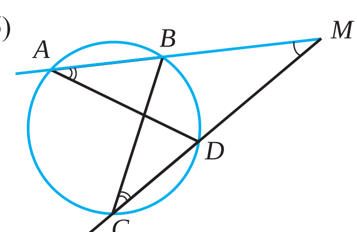


Рис. 9.52

Проведем через точку M две прямые: первая пересекает окружность в точках A и B, а вторая – в точках C и D. Строим отрезки BC и AD и получаем, что $\Delta ADM \sim \Delta CBM$. Поскольку стороны этих треугольников пропорциональны, то $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB} \Rightarrow AM \cdot MB = MC \cdot DM$.

2) Если точка M лежит на окружности (рис. 9.53), то эта точка является концом хорды, то есть точка M делит хорду на два отрезка, из которых один нулевой. В этом случае $AM \cdot MB = MM \cdot AB = 0 \cdot AB = 0$. ▶

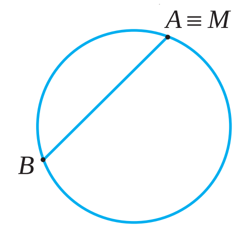


Рис. 9.53

Произведение $AM \cdot MB$ называется ***степенью*** точки относительно данной окружности.

Задачи с решением

1. Пусть точка I – центр окружности, вписанной в ΔABC, L – точка пересечения биссектрисы угла A с окружностью, описанной около треугольника ABC. Докажем, что $BL = IL = LC$ (рис. 9.54).

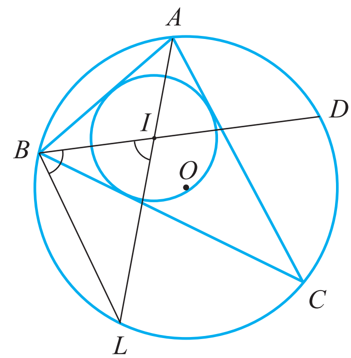


Рис. 9.54

Решение:

Так как AL – биссектриса, то $\smile BL \equiv \smile LC$ (13) и $BL = LC$ (13′). Докажем, что $\angle LBI \equiv \angle BIL$.

Действительно, $\angle LBI \equiv \angle LBD$ и, так как $\angle LBD$ – вписанный в окружность, то

$$m(\angle LBD) = \frac{m(\smile LCD)}{2} = \frac{m(\smile LC) + m(\smile CD)}{2}. \quad (14)$$

Вершина I угла BIL расположена во внутренней области окружности, описанной около треугольника ABC, значит, $m(\angle BIL) = \dfrac{m(\smile BL) + m(\smile AD)}{2}$ (15).

Так как BD – биссектриса угла ABC, то $\smile AD \equiv \smile DC$ (16).

Из равенств (13)–(16) следует, что $m(\angle LBI) = m(\angle BIL)$. Значит, треугольник BIL – равнобедренный и $BL = LI$.

Из последнего равенства и из (13′) следует что $BL = IL = LC$, ч. т. д.

2. Построим треугольник ABC, если даны высота h_a, биссектриса l_a и медиана m_a, проведенные из одной вершины (рис. 9.55).

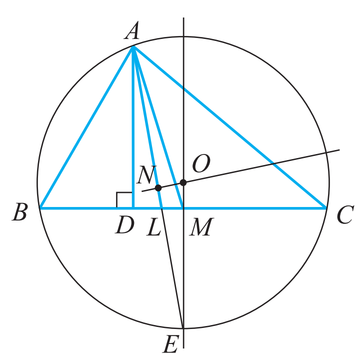


Рис. 9.55

Анализ. Предположим, что треугольник ABC построен и $[AD]$, $[AL]$ и $[AM]$ – соответственно высота, биссектриса и медиана, построенные из вершины A.

По условию, прямоугольные треугольники ADL и ADM могут быть построены по катету и гипотенузе. Серединный перпендикуляр стороны BC пересекает несущую прямую биссектрисы AL в некоторой точке E окружности, описанной около треугольника ABC. Центром этой окружности является точка O, в которой пересекаются серединные перпендикуляры отрезков AE и BC. Вершинами B и C искомого треугольника являются точки пересечения окружности $\mathscr{C}(O, OA)$ с несущей прямой отрезка DM.

Построение. Строим прямоугольные треугольники ADL и ADM так, что $AD = h_a$, $AL = l_a$, $AM = m_a$. Через точку M проводим прямую, перпендикулярную прямой DM, и находим точку E пересечения этой прямой с прямой AL. Точка O, в которой пересекаются прямая ME и серединный перпендикуляр отрезка AE, есть центр окружности, описанной около треугольника ABC. Значит, точками пересечения B и C окружности $\mathscr{C}(O, OA)$ и несущей прямой отрезка DM являются две другие вершины искомого треугольника.

Доказательство. Очевидно, что построенный треугольник – искомый, так как у него $AD = h_a$, $AL = l_a$, $AM = m_a$.

Исследование. Из проведенного анализа следует, что точки A и E расположены по разные стороны от прямой BC. Так как $AD \parallel ME$, то несущая прямая биссектрисы AE пересекает отрезок DM. Значит, биссектриса угла треугольника расположена во внутренней области угла, образованного высотой и медианой, проведенными из этой же вершины.

Задачи

А

1. Две окружности радиусов 15 см и 25 см касаются внешне. Найдите расстояние между их центрами.

2. Две окружности радиусов 18 см и 30 см касаются внутренним образом. Найдите расстояние между их центрами.

3. Точки A, B, C принадлежат окружности радиуса 18 см. Найдите длину хорды AC, если величина угла ABC равна 30°.

4. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Найдите величину угла ACD, если известно, что $\text{m}(\angle ABD) = 50°$.

5. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке E. Известно, что $AC = 20$ см, $BE = 6$ см и $AE : EC = 2 : 3$. Найдите длину отрезка ED.

6. Дана окружность, у которой хорды AD и BC пересекаются. Зная, что $\text{m}(\angle ABC) = 40°$, $\text{m}(\angle ACD) = 100°$, найдите величину угла CAD.

Б

7. Докажите, что медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два равнобедренных треугольника.

8. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, которая пересекает эти окружности в точках C и D. Докажите, что величина угла CBD не зависит от прямой, проведенной через точку A.

9. Докажите, что прямая, проходящая через точку касания двух внешне касающихся окружностей, делит эти окружности так, что дуги, расположенные в разных полуплоскостях, ограниченных этой прямой, имеют одинаковые величины.

10. Через точку касания A двух внешне касающихся окружностей проведены две прямые, которые пересекают одну из окружностей в точках C и B, а другую – в точках D и E. Докажите, что треугольники с вершинами A, B, C и A, D, E подобны и что $DE \parallel BC$.

11. Из точки A, внешней к некоторой окружности, проведены две касательные к окружности в точках B и C. К дуге BC, лежащей во внутренней области треугольника ABC, проведена касательная, которая пересекает отрезки AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что периметр треугольника AB_1C_1 равен $2AB$, и он не зависит от расположения точки касания на дуге BC.

12. Пусть ABC – треугольник, $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – его высоты и точка O – центр окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что:

а) около четырехугольника AB_1A_1B можно описать окружность;

б) прямая OC перпендикулярна прямой A_1B_1.

13. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная касается этих окружностей в точках B и C. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

14. Пусть $[AA_1]$ – высота остроугольного треугольника ABC и точка O – центр окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что $\angle BAA_1 \equiv \angle OAC$.

15. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки C, расположенной на прямой AB, внешней к отрезку AB, проведены к этим окружностям две касательные в точках D и E. Докажите, что отрезки CE и CD конгруэнтны.

16. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Найдите величину угла, образованного их общими внешними касательными.

17. Длины оснований трапеции равны a и b $(b > a)$, а сумма величин углов при одном из оснований равна 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

18. Две окружности радиусов R и r касаются внешне. Найдите длину отрезка, заданного точками касания их общей внешней касательной.

19. Даны точки A и B и угол φ. Постройте множество точек M плоскости, при которых $m(\angle AMB) = \varphi$. (Говорят также, что *отрезок AB виден из точки M под углом φ*.)

20. Постройте треугольник ABC по его заданным элементам $a, h_a, \angle A$.

21. Постройте треугольник ABC по заданным элементам a, h_a, R, где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

22. Постройте треугольник ABC, если известно, что неколлинеарные точки P, L и M являются точками пересечения несущих прямых соответственно высоты, биссектрисы и медианы треугольника, проведенных из одной и той же вершины, с окружностью, описанной около треугольника ABC.

23. Постройте треугольник ABC по заданным элементам $a, \angle A$ и r, где r – радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

24. Постройте треугольник ABC по заданным элементам a, b, R, где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§7 Многоугольники. Правильные многоугольники

Определение. Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ называется объединение отрезков $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$, где точки A_i, A_{i+1}, A_{i+2} не являются коллинеарными для всех $i \in \{1, 2, 3, ..., n-2\}$ (рис. 9.56).

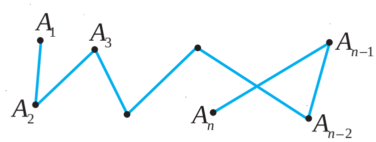


Рис. 9.56

Точки $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***вершинами*** ломаной, а отрезки $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ – ***звеньями*** ломаной. Звенья ломаной называются ***смежными***, если они имеют общую вершину, и ***несмежными*** – в противном случае.

Ломаная называется ***простой***, если любые ее две несмежные звенья не пересекаются (рис. 9.57).

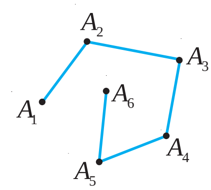


Рис. 9.57

Если вершины A_1, A_{n-1} и A_n, а также вершины A_1, A_2 и A_n ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ неколлинеарны, то объединение этой ломаной с отрезком $[A_1A_n]$ называется ***замкнутой ломаной***, и обозначается также через $A_1A_2A_3...A_n$. Например, на рисунке 9.58 изображена замкнутая ломаная $A_1A_2...A_6A_7$.

Простая замкнутая ломаная разбивает множество точек плоскости на три непересекающиеся множества: ломаная, ***внутренняя область*** ломаной и ***внешняя область*** ломаной. Любой отрезок ($[E_1E_2]$), соединяющий точку, принадлежащую внутренней области ломаной, с точкой, принадлежащей внешней области этой ломаной, пересекает ломаную (рис. 9.58).

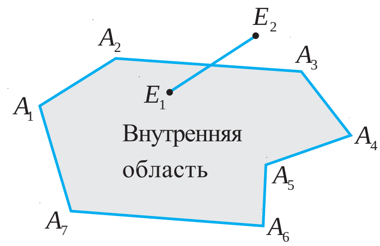
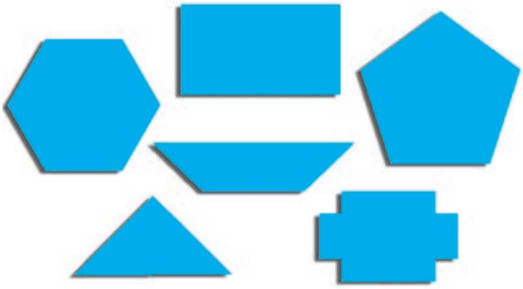


Рис. 9.58



Простая замкнутая ломаная называется ***многоугольником***. Вершины ломаной называются ***вершинами*** многоугольника, а ее звенья – ***сторонами*** многоугольника.

Многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит в одной замкнутой полуплоскости, заданной несущей прямой, любой из его сторон (рис. 9.59 а), б)). В противном случае многоугольник называется ***невыпуклым*** (рис. 9.59 в), г)).

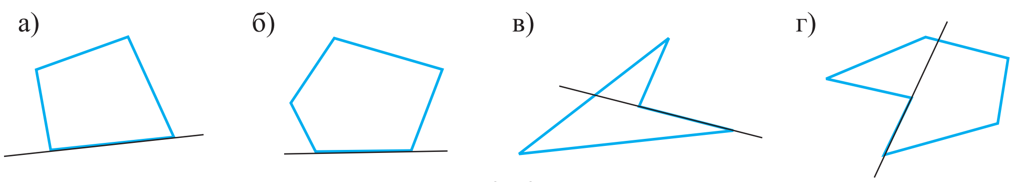


Рис. 9.59

Объединение многоугольника и его внутренней области называется ***плоским многоугольником***.

Внутренним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный несущими полупрямыми его двух смежных сторон. ***Внешним углом*** выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются ***диагоналями*** многоугольника.

Число сторон многоугольника равно числу углов, поэтому многоугольники называют по числу углов.

Многоугольниками являются: ***треугольник***, ***четырехугольник***, ***пятиугольник*** и др.

Определение. Выпуклый многоугольник называется **правильным многоугольником**, если у него все стороны и все углы конгруэнтны.

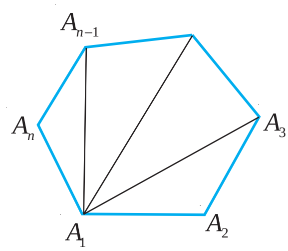


Рис. 9.60

Простейшими правильными многоугольниками являются равносторонний треугольник и квадрат.

Из каждой вершины выпуклого n-угольника можно провести $n-3$ диагонали, которые разбивают n-угольник на $n-2$ треугольников (рис. 9.60). Так как сумма величин внутренних углов каждого треугольника равна $180°$, то сумма S_n величин внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$, то есть $S_n = 180°(n-2)$.

Следовательно, величина β_n внутреннего угла правильного n-угольника вычисляется по формуле $\boxed{\beta_n = \frac{180°(n-2)}{n}}$.

Определения. • Выпуклый многоугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности. При этом окружность называется **описанной около многоугольника**.

• Выпуклый многоугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности. При этом окружность называется **вписанной в многоугольник**.

Теорема 34. Если $A_1A_2A_3...A_n$ – правильный n-угольник, то он одновременно является вписанным в окружность (рис. 9.61 а)) и описанным около окружности (рис. 9.61 б)).

Доказательство:

1) Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2A_3$. Докажем, что вершина A_4 лежит на этой окружности. В самом деле, из конгруэнтности равнобедренных

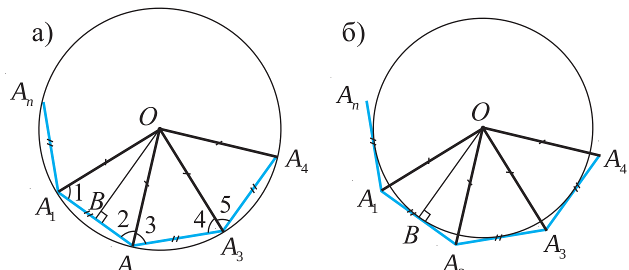


Рис. 9.61

треугольников OA_1A_2 и OA_2A_3 (по трем сторонам) следует, что

$$m(\angle 1) = m(\angle 2) = m(\angle 3) = m(\angle 4) = m(\angle 5) = \frac{\beta_n}{2}.$$

Следовательно, $\Delta OA_3A_4 \equiv \Delta OA_2A_3$ (по двум сторонам и углу между ними), то есть $OA_4 = OA_3 = OA_2 = OA_1$. Это означает, что вершина A_4 лежит на той же окружности, что и точки A_1, A_2, A_3. Аналогично можно доказать, что окружность $\mathscr{C}(O, OA_1)$ проходит через остальные вершины n-угольника $A_1A_2A_3...A_n$.

2) В пункте 1) мы доказали, что стороны правильного n-угольника $A_1A_2A_3...A_n$ являются конгруэнтными хордами окружности $\mathscr{C}(O, OA_1)$. Значит, они равноудалены от центра окружности, то есть стороны n-угольника касаются окружности с центром O и радиусом OB, где $OB \perp A_1A_2$ (рис. 9.61 б)).

Это означает, что n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$ описан около окружности $\mathscr{C}(O, OB)$. ▶

Следствие. Центр окружности, вписанной в правильный n-угольник, совпадает с центром окружности, описанной около этого n-угольника (рис. 9.62).

Общий центр этих окружностей называется ***центром*** (***центром вращения, центром симметрии***) ***правильного многоугольника***.

Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, называется ***радиусом правильного многоугольника***, а радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, называется ***апофемой правильного многоугольника***. Угол AOB, вершина которого лежит в центре правильного n-угольника, где A и B – соседние вершины n-угольника, называется **центральным углом правильного n-угольника** (рис. 9.62). Величину этого угла находят по формуле $\alpha_n = \frac{360°}{n}$, где n – число сторон правильного n-угольника.

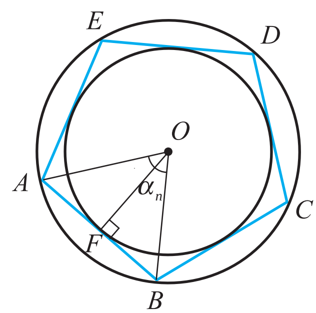


Рис. 9.62

Вписанные и описанные четырехугольники

Напомним, что угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность, называется ***углом, вписанным в окружность*** (рис. 9.63).

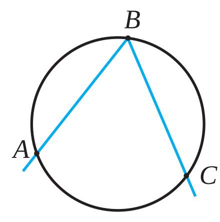


Рис. 9.63

Теорема 35. Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины дуги, заключенной между его сторонами. $m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\smile AC)$ (рис. 9.63).

Теорема 36. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма величин противолежащих углов равна 180° (рис. 9.64 а)).

Теорема 37. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда угол, образованный одной стороной и диагональю, конгруэнтен углу, образованному противолежащей стороной и другой диагональю (рис. 9.64 б)).

Теорема 38. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда один внутренний угол конгруэнтен внешнему углу при противолежащей вершине (рис. 9.64 в)).

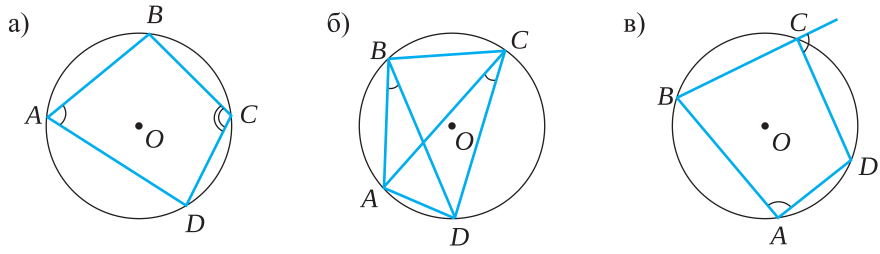


Рис. 9.64

Теорема 39. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противолежащих сторон равны: $AB+CD=AD+BC$ (рис. 9.65).

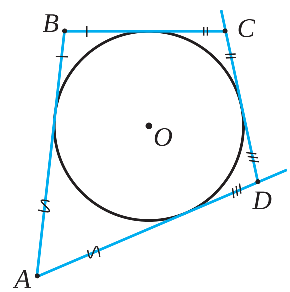


Рис. 9.65

Задание. Докажите теоремы 35–39.

Задачи с решением

1. Выразим длину a_n стороны правильного n-угольника через радиус R окружности, описанной около него.

Решение:

В ΔAOB имеем $m(\angle AOD)=\frac{\alpha_n}{2}=\frac{180^\circ}{n}$ (рис. 9.66).

$a_n=AB=2AD=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$. В частности,

$a_3=2R\sin 60^\circ=R\sqrt{3}$, $a_4=2R\sin 45^\circ=R\sqrt{2}$, $a_6=2R\sin 30^\circ=R$.

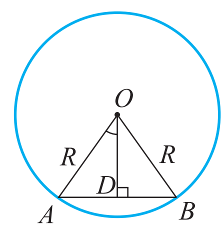


Рис. 9.66

Ответ: $a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

2. Выразим длину a_n стороны правильного n-угольника через радиус r окружности, вписанной в этот многоугольник.

Решение:

В ΔOCE имеем $m(EOC)=\frac{\alpha_n}{2}=\frac{180^\circ}{n}$ (рис. 9.67).

$a_n=CF=2CE=2r\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}$. В частности,

$a_3=2r\,\text{tg}60^\circ=2r\sqrt{3}$, $a_4=2r\,\text{tg}45^\circ=2r$, $a_6=2r\,\text{tg}30^\circ=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

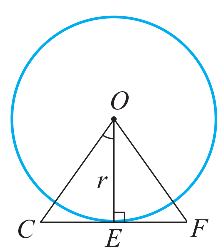


Рис. 9.67

Ответ: $a_n=2r\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

3. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен: а) 9°; б) 40°?

Решение:

Так как величина внутреннего угла правильного n-угольника равна $\beta_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$, то $\beta_n = 180° - \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 180° - \beta_n = \dfrac{360°}{n}$.

Но $180° - \beta_n$ – это величина внешнего угла правильного n-угольника.

Следовательно: а) $\dfrac{360°}{n} = 9° \Rightarrow n = 40$; б) $\dfrac{360°}{n} = 40° \Rightarrow n = 9$.

Ответ: а) $n = 40$; б) $n = 9$.

Задачи

А

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: а) 150°; б) 160°?
2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен: а) 36°; б) 24°?
3. Выразите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, через радиус описанной около него окружности.
4. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

Б

5. Сторона правильного n-угольника равна a_n. Выразите радиус R и апофему r этого многоугольника через a_n и n.
6. В окружности радиуса 1 м вписан правильный n-угольник. Найдите периметр $\mathscr{P}_n$ этого многоугольника при $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.
7. Квадрат и равносторонний треугольник вписаны в окружность радиуса 1 м так, что одна сторона треугольника параллельна стороне квадрата. Вычислите площадь общей части квадрата и треугольника.
8. В окружность, радиус которой равен 4 м, вписан равносторонний треугольник, а на его стороне построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.
9. Опишите около окружности равносторонний треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.

§8 Площади плоских фигур

Определение. Каждой плоской фигуре ставится в соответствие действительное неотрицательное число, которое называется **площадью** данной фигуры.

Площадь удовлетворяет следующим условиям:

1° конгруэнтные фигуры имеют равные площади;

2° если фигура является объединением двух непересекающихся фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих двух фигур;

3° квадрат, длина стороны которого равна единице, имеет площадь, равную единице.

Следуя этому определению, можно доказать, что площадь прямоугольника (рис. 9.68) равна произведению длин двух смежных сторон: $\mathscr{A} = a \cdot b$.

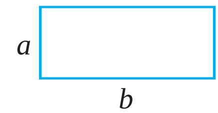
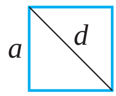
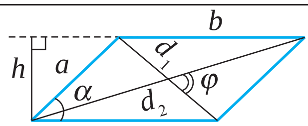
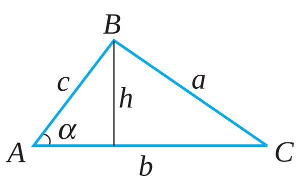
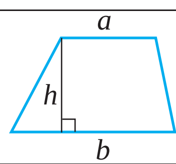
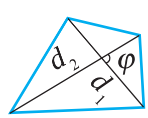
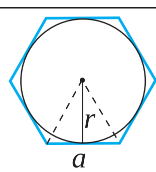
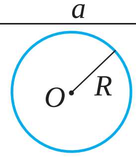
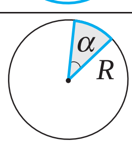


Рис. 9.68

Формулы вычисления площадей некоторых плоских фигур приведены в таблице 1.

Таблица 1

№	Фигура	Геометрическое изображение	Формула
1	Квадрат		$\mathscr{A} = a^2 = \frac{1}{2}d^2$
2	Параллелограмм		$\mathscr{A} = bh = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
3	Треугольник		$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = pr = \frac{abc}{4R} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, r – радиус окружности, вписанной в ΔABC, R – радиус окружности, описанной около ΔABC.
4	Трапеция		$\mathscr{A} = \frac{a+b}{2}h$
5	Выпуклый четырехугольник		$\mathscr{A} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
6	Правильные многоугольники		$\mathscr{A} = \frac{ar}{2}n = pr$, где $p = \frac{an}{2}$, p – полупериметр, n – число сторон правильного n-угольника, r – радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник.
7	Круг		$\mathscr{A} = \pi R^2$
8	Сектор круга		$\mathscr{A} = \frac{1}{2}R^2\alpha$ (α в радианах) $\mathscr{A} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360°}$ (α в градусах)

Задачи с решением

1. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n. Найдем площадь треугольника (рис. 9.69).

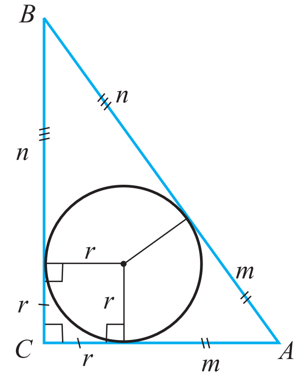


Рис. 9.69

Решение:

По теореме Пифагора

$(r+m)^2+(r+n)^2=(m+n)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2+2r(m+n)+m^2+n^2=m^2+n^2+2mn \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2+r(m+n)=mn.$

Тогда $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}(r+m)(r+n)=$

$=\dfrac{1}{2}(r^2+r(m+n)+mn)=\dfrac{1}{2}(mn+mn)=mn$ (кв.ед.).

2. Докажем, что медианы любого треугольника делят его на шесть равновеликих (с равными площадями) треугольников.

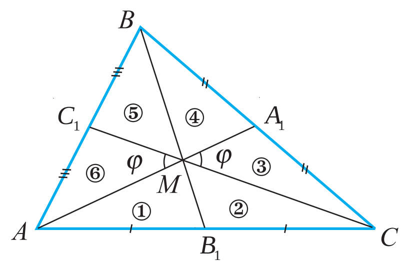


Рис. 9.70

Решение:

Обозначим эти треугольники цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 9.70).

Треугольники 1 и 2 имеют равные площади, так как $AB_1=B_1C$, и у них общая высота, проведенная из точки M (точка пересечения медиан). Аналогично можно доказать, что треугольники 3 и 4, а также 5 и 6 равновелики.

Докажем, например, что треугольники 3 и 6 равновелики. Согласно свойству медиан треугольника имеем: $\dfrac{AM}{MA_1}=\dfrac{CM}{MC_1}=\dfrac{2}{1} \Rightarrow AM\cdot MC_1=CM\cdot MA_1$.

Пусть величина вертикальных углов AMC_1 и CMA_1 равна φ.

Тогда $\mathcal{A}_{AMC_1}=\dfrac{1}{2}AM\cdot MC_1\cdot\sin\varphi=\dfrac{1}{2}CM\cdot MA_1\cdot\sin\varphi=\mathcal{A}_{CMA_1}$.

Аналогично можно доказать, что треугольники 1 и 4 равновелики и, тем самым, требуемое утверждение.

3. Дан ΔABC, у которого $AC=20$ см. Зная, что длины медиан, проведенных к двум остальным сторонам, равны 24 см и 18 см, найдем площадь треугольника ABC (рис. 9.71).

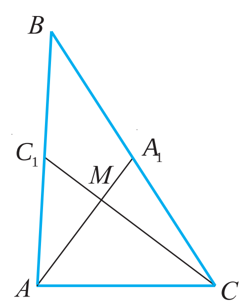


Рис. 9.71

Решение:

Пусть $AA_1=18$ см, $CC_1=24$ см, M – точка пересечения медиан. Согласно свойству медиан треугольника имеем:

$AM=\dfrac{2}{3}AA_1=12$ (см), $CM=\dfrac{2}{3}CC_1=16$ (см).

Поскольку ΔAMC – прямоугольный, то

$\mathcal{A}_{AMC}=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 16=96$ (см^2). Тогда $\mathcal{A}_{ABC}=3\mathcal{A}_{AMC}=3\cdot 96=288$ (см^2) (см. задачу 2).

4. Трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ разбита диагоналями на четыре треугольника с общей вершиной O. Найдем площадь трапеции, если известно, что площади треугольников AOD и BOC равны $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ соответственно (рис. 9.72).

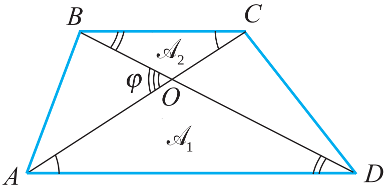


Рис. 9.72

Решение:

Так как $\Delta AOD \sim \Delta COB,$ то

$$\frac{BC}{AD}=\frac{CO}{AO}=\frac{OB}{OD}=\sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}} \quad \text{(подобие с коэффициентом } \sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}}\text{)}.$$

Пусть $m(\angle AOB)=\varphi.$

Тогда $CO\cdot OD = AO\cdot OB \;\Rightarrow \mathscr{A}_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\varphi=\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\varphi=\mathscr{A}_{COD}.$

Из $OB=\sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}}\cdot OD$ получаем $\mathscr{A}_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\varphi=\frac{1}{2}AO\cdot\sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}}\cdot OD\sin\varphi=$

$$=\sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}}\cdot\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin(180^\circ-\varphi)=\sqrt{\frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_1}}\cdot\mathscr{A}_1=\sqrt{\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2}.$$

Следовательно, $\mathscr{A}_{ABCD}=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+2\sqrt{\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2}=(\sqrt{\mathscr{A}_1}+\sqrt{\mathscr{A}_2})^2.$

Задачи

А

1. Длины катетов прямоугольного треугольника относятся как $3:4$, а длина гипотенузы равна 50 см. Найдите площадь треугольника.
2. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.
3. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной $4\cdot\sqrt[4]{3}$ см.
4. Диагонали ромба равны 8 см и 15 см. Найдите его площадь.
5. Периметр параллелограмма равен 72 см. Длины его сторон относятся как $5:7$, а величина острого угла равна 30°. Найдите площадь параллелограмма.
6. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а длина средней линии равна 12 см. Найдите площадь трапеции.
7. Из точки A окружности проведены хорды AB и AC так, что $AB=AC=2\sqrt{3}$ см и $m(\angle BAC)=60^\circ$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Б

8. Найдите площадь ромба, если длина его стороны равна a, а сумма длин диагоналей равна d.
9. Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой тупого угла. Найдите площадь трапеции, если его периметр равен 22 см, а длина большего основания равна 6 см.

10. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $AB = 5$ м, $AC = 3$ м, $BC = 4$ м и $[AD]$ – биссектриса. Найдите площади треугольников ACD и ADB.

11. Средняя линия равнобедренной трапеции, длиной 10 м, делит трапецию на две фигуры, площади которых относятся как $2:3$. Найдите площадь трапеции, если в нее можно вписать окружность.

12. Основание высоты параллелограмма $ABCD$, проведенной из вершины B, делит сторону AD пополам. Периметр параллелограмма равен 24 см, а периметр треугольника ABD равен 18 см. Найдите площадь параллелограмма.

13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и равны a и b. Найдите площадь четырехугольника $EFGH$, где E, F, G и H – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно.

14. Точка M является серединой стороны BC параллелограмма $ABCD$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке E. Найдите площади треугольников ABE и AED, если площадь треугольника BEM равна 1.

15. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции равна d и делит трапецию на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите площадь трапеции.

16. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 дм и 2 дм. Найдите площадь трапеции.

Задачи на повторение

A

1. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 112 см, а гипотенузы – 113 см. Найдите площадь треугольника.

2. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3. Определите длину гипотенузы.

3. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника делит противолежащий катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найдите длины сторон треугольника.

4. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 4 см, а длина медианы, проведенной к этой стороне, равна 3 см. Найдите длину основания треугольника.

5. Найдите отношение между длиной радиуса вписанной в прямоугольный равнобедренный треугольник окружности и высотой, опущенной на гипотенузу.

6. Две вершины квадрата лежат на окружности радиуса 17 см, а остальные две расположены на касательной к этой окружности. Найдите длину диагонали квадрата.

7. Высота, опущенная из вершины тупого угла ромба, делит его сторону пополам. Найдите величины углов ромба.

8. Общая хорда двух окружностей с конгруэнтными радиусами равна 12 см и является диагональю вписанного ромба в пересечении этих окружностей. Длина второй диагонали ромба равна 6 см. Найдите длины радиусов окружностей.

9. В ромб, один из углов которого равен $30°$, вписана окружность, а в нее вписан квадрат. Найдите отношение между площадью ромба и площадью квадрата.

10. Соответствующие стороны параллелограмма и прямоугольника конгруэнтны. Площадь параллелограмма в два раза меньше площади прямоугольника. Найдите величину тупого угла параллелограмма.

11. Длины оснований равнобокой трапеции равны 5 см и 12 см, а длина боковой стороны – 12,5 см. Найдите высоту трапеции.

12. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = 2$ см, $BE = 4$ см, $EC = 6$ см. Найдите CD.

13. Сумма величин углов при большем основании трапеции равна 90°. Длина большего основания равна 20 см, а меньшего – 4 см. Найдите расстояние между серединами оснований.

14. Проекция диагонали равнобокой трапеции на большее основание равна 7 см, а ее высота – 4 см. Найдите площадь трапеции.

15. Расстояние от центра окружности радиуса 13 см до одной хорды равно 5 см. Найдите длину хорды.

16. Две окружности, радиусы которых равны 7 см, касаются внешне. Прямая пересекает окружности в точках A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Найдите AB.

17. Из точки A, расположенной вне окружности радиуса 8 см, проведена секущая длиной 10 см, которая разделена окружностью на два конгруэнтных отрезка. Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

Б

18. Длины гипотенузы и одного из катетов прямоугольного треугольника ABC соответственно равны 9 см и 6 см. Из вершины C прямого угла проведены медиана CM и высота CD. Найдите MD.

19. В прямоугольном треугольнике ABC, $BC = 8$ см, $AB = 10$ см. На продолжении катета AC взята точка D так, что точка C лежит между A и D. Найдите длину DB, если $DB = DA$.

20. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна 20 см, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 24 см. Найдите длины сторон треугольника.

21. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что гипотенуза содержит диаметр соответствующей окружности, а ее центр делит гипотенузу на отрезки длиной в 3 см и 4 см. Найдите длины радиуса полуокружности и сторон треугольника.

22. Длина радиуса вписанной в прямоугольный треугольник окружности равна r, а длина радиуса окружности, описанной около этого треугольника, равна R. Найдите площадь треугольника.

23. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной из вершины прямого угла на два треугольника: BCD и ACD. Радиусы вписанных окружностей в эти треугольники равны 4 см и 3 см соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

24. Треугольник ABC прямоугольный. Окружность, центр которой лежит на катете AC, касается гепотенузы AB и пересекает катет BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 3$. Известно, что $AC : BC = 12 : 5$. Найдите отношение между длиной радиуса окружности и длиной катета BC.

25. Длина радиуса вписанной в равнобедренный треугольник окружности равна 1,5 см, а длина радиуса описанной около этого треугольника окружности – $\frac{25}{8}$ см. Найдите длины сторон, если они выражаются целыми числами.

26. Длина стороны равностороннего треугольника ABC равна a. К окружности, диаметром которой является высота CD, через точки A и C проводятся касательные, которые пересекаются в точке E. Вычислите периметр треугольника ACE.

27. Медианы AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC ($CA = CB$) пересекаются в точке M. Отношение между радиусом окружности, вписанной в треугольник AMB, и радиуса окружности, вписанной в четырехугольник MB_1CA_1, равно $\frac{3}{4}$. Найдите отношение $CB : AB$.

28. Высота, проведенная из вершины угла при основании равнобедренного треугольника, в два раза меньше боковой стороны. Найдите величины углов этого треугольника (рассмотрите оба случая).

29. Основания трапеции равны a и b $(a > b)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

30. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две трапеции с равными площадями. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами.

31. Две окружности радиусами r и R касаются внешне. Прямая пересекает эти окружности так, что образовались три конгруэнтных отрезка. Найдите длины этих отрезков.

32. Определите величины острых углов прямоугольного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

33*. Точки пересечения вписанной окружности в треугольнике ABC и медианы BB_1 $(B_1 \in AC)$ делят медиану на три конгруэнтных отрезка. Найдите отношение длин сторон треугольника ABC.

34*. Рассматривается множество прямоугольных треугольников одинаковой площади $\mathscr{A}$. Найдите из этого множества те треугольники, у которых описанные окружности имеют минимальные площади.

35*. Из множества всех треугольников, у которых одна сторона общая и противолежащие этой стороне углы равны α, найдите треугольник наибольшего периметра.

36. Найдите длину траектории конца часовой стрелки длиной 18 мм за:
а) 1 час; б) 24 часа. ($\pi \approx 3{,}14$.)

37. Найдите длину траектории конца минутной стрелки часов длиной 30 см за:
а) 1 час; б) 12 часов; в) 24 часа. ($\pi \approx 3{,}14$.)

38. Велосипедист тренируется на треке круговой формы радиуса 240 м. Скорость велосипедиста 300 м в минуту. За какое время велосипедист проходит один круг? ($\pi \approx 3{,}14$.)

39. Ширина автомобиля равна 1,2 м. Он проходит трассу круговой формы, внутренний радиус которой составляет 100 м, сохраняя постоянно расстояние в 50 см от внутреннего края трассы. Найдите разность путей внешних и внутренних колес автомобиля при прохождении одного круга. ($\pi \approx 3{,}14$.)

Проверочная работа II

Продолжительность работы: 45 минут

А

1. Два круга одинакового радиуса 5 см пересекаются. Площадь объединения этих кругов равна 44π см^2. Найдите площадь пересечения этих кругов. **1**

2. Точки $A(2,\ 1)$, $B(5,\ 3)$, $C(2,\ 4)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты точек, которые могут быть четвертой вершиной этого параллелограмма. **2**

3. Дан треугольник ABC, у которого $BC = (\sqrt{6}+\sqrt{2})$ см, $m(\angle ABC) = 45°$, $m(\angle ACB) = 30°$. Найдите периметр треугольника ABC. **2**

4. В окружности проведены пересекающиеся хорды AB и CD. Найдите величину угла DAC, если величины углов ABC и ACD равны 50° и 40° соответственно. **1**

5. Найдите длины боковых сторон и диагоналей трапеции, вписанной в окружность радиуса 37,5 см, если длина меньшего основания трапеции равна 51 см, а большее основание является диаметром окружности. **2**

6. В ромб с острым углом в 30° вписана окружность радиуса 6 см. Найдите площадь ромба. **2**

Б

1. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AD = 3$ см, $AB = 4$ см, $m(\angle DAB) = 60°$. На сторонах AB и CB вне параллелограмма построены равносторонние треугольники ABE и CBF. Найдите площадь треугольника DEF. **1**

2. Окружность длиной 12π см разделена точками A, B, C на три дуги, длины которых относятся как $1:2:3$. Найдите площадь треугольника ABC. **2**

3. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1. Косинус наибольшего угла треугольника равен $\frac{5}{13}$. Найдите площадь треугольника. **2**

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне равностроннего треугольника, до двух других сторон – постоянная величина. **1**

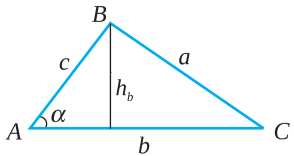
5. Основания трапеции равны 4 см и 6 см. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют. **2**

6. В круге радиуса R построены две параллельные хорды так, что центр лежит между этими хордами. Одна из хорд стягивает дугу величиной 90°, а другая – дугу величиной 60°. Найдите площадь части круга, заключенной между хордами. **2**

Плоские фигуры

Многоугольники

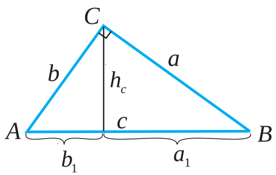
Треугольники



$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$2p = a+b+c$

Прямоугольный треугольник

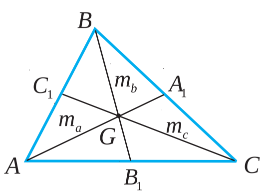


$a^2+b^2=c^2$

$a^2=ca_1$

$b^2=cb_1$

$h_c^2=a_1b_1$



AA_1, BB_1, CC_1 – медианы

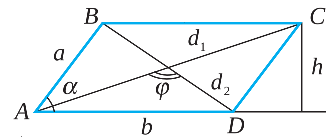
$A_1G = \frac{1}{3}m_a$

$GA = \frac{2}{3}m_a$

$4m_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2$

Четырехугольники

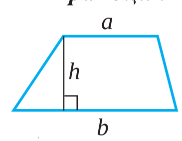
Параллелограмм



$\mathscr{A} = bh = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

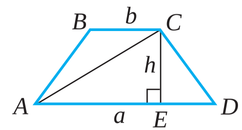
$d_1^2+d_2^2 = 2(a^2+b^2)$

Трапеция

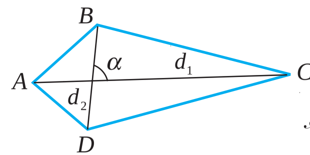


$\mathscr{A} = \frac{a+b}{2}\cdot h$

Равнобедренная трапеция

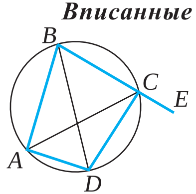


$AE = \frac{a+b}{2}$, $ED = \frac{a-b}{2}$



$\mathscr{A} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$

Вписанные четырехугольники



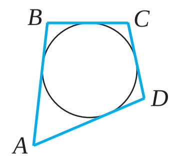
$m(\angle ABC)+m(\angle CDA) = 180° =$

$= m(\angle BAD)+m(\angle BCD)$

$\angle ABD \equiv \angle ACD$

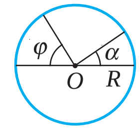
$\angle DCE \equiv \angle DAB$

Описанные четырехугольники



$BC+AD=CD+AB$

Окружность

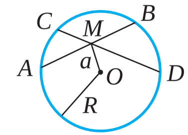


$\mathscr{A}_{\text{круга}} = \pi R^2$

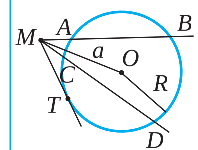
$\mathscr{A}_{\text{сект.}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$; $\mathscr{A}_{\text{сект.}} = \pi R^2\frac{\varphi}{360°}$

α – радианная мера

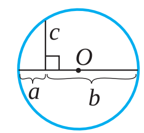
φ – градусная мера



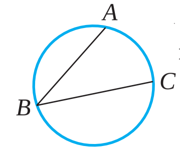
$AM\cdot MB = CM\cdot MD =$
$= R^2-a^2$



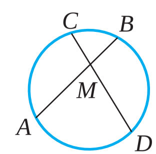
$AM\cdot MB = CM\cdot MD =$
$= a^2-R^2 = MT^2$



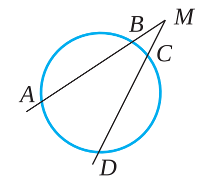
$c^2 = ab$



$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\smile AC)$



$m(\angle AMD) =$
$= \frac{m(\smile AD)+m(\smile CB)}{2}$



$m(\angle AMD) =$
$= \frac{m(\smile AD)-m(\smile BC)}{2}$

Ответы и указания

Модуль 1. Действительные числа. Повторение и дополнения

А. 1. а) 0,75; б) 0,2(6); в) 0,6; г) 0,125; д) 0,08; е) 0,008; ж) 0,1(6); з) 0,(1). **2.** а) $\frac{13}{99}$; б) $\frac{23}{9}$; в) $\frac{11}{9}$; г) $\frac{23}{99}$; д) $\frac{23}{18}$; е) $\frac{271}{990}$. **3.** а) Иррационально; б), в), г) рационально. **4.** а) Да; б) возможно; в) нет. **5.** а) 1,73 и 1,74; б) 2,64 и 2,65; в) 0,31 и 0,32; г) 2,73 и 2,74; д) 1,64 и 1,65. **6.** а) $3{,}257129 < 3{,}258129$; б) $-7{,}123465 > -8{,}123466$. **7.** 0,627115. **8.** а) $0{,}428571 < \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3} < \sqrt{5}$; в) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\sqrt{3}+1 > \sqrt{10}-1$. **9.** а) Л; б), в) И. **10.** а) $S = \{-3, 1\}$; б) $S = \varnothing$. **11.** а) $S = (-6, +\infty)$; б) $\left(-\infty, \frac{5}{9}\right)$. **12.** а) 8°С; б) $\frac{109}{11} \approx 10°$ С. **13.** а) $\sqrt{3a}$ см; б) 58,09 см^3.

Б. 14. а) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} > \sqrt{6+5\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{19+8\sqrt{3}} > \sqrt{14+6\sqrt{5}}$. **15.** а) 5; б) $2\sqrt[8]{2}$. **16.** $4\sqrt{3}$. **17.** а) Да; б) возможно; в) нет. **18.** $\sqrt{2{,}4} \approx 1{,}55$ (А). **19.** $9-1{,}8\sqrt{10}$. **20.** а) Иррационально; б), в) рационально; г) иррационально. **22.** б). **23.** 40 мест. **25*.** $\sqrt{0{,}393273223223}$. *Указание.* Используйте квадраты этих чисел. **26*.** $ab < 0$.

Проверочная работа

А. 1. С. **2.** С. **3.** 3,162 и 3,163. **4.** $5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}+1}$.

Б. 1. С. **2.** В. **3.** В. **4.** 0,267 и 0,268. **5.** $\left[1{,}9;\ \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ – пересечение; $\left[\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{2}\right]$ – объединение. **6.** $\frac{a+b}{b-a}$, $ab \neq 0$, $a \neq b$. **7.** Рационально.

Модуль 2. Элементы математической логики и теории множеств

§1. А. 1. а) Да; б) нет. **2.** а) $\mathbb{N}$; б) A; в) $\varnothing$; г) $\{6, 7, 8, \ldots\}$. **3.** $\operatorname{card}\mathcal{B}(A) = 32$. **4.** а) Например, –3, –2, –1; б) например, 0, ± 1. **5.** а) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
6. а) $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$; б) $\{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\}$. Да. **7.** а) $A \neq B$, $A \cup B = (-\infty, 1]$, $A \cap B = \{-3\}$; б) $A \neq B$, $A \cup B = (1, \infty)$, $A \cap B = \varnothing$.

§1. Б. 8. Да. **9.** а) $(-6, -1) \cup (3, 6)$; б) $(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$. **10.** $\operatorname{card} A = 5$, $\operatorname{card}\mathcal{B}(A) = 32$. **11.** а) Множество иррациональных чисел; б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **12.** а) $\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. **14*.** а) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; б) $\mathbb{R}_-$. **15*.** а) Л; б) Л.

§2. А. 1. а) Л; б) не является высказыванием; в) И. **2.** а), б) И, в), г) Л. **4.** „Если диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, то этот четырехугольник – ромб“ – Л.

§2. Б. 5. а) И; б) Л. **6.** а), б), в) Л; г) И. **7.** а) „ABC – треугольник“ – разъяснительная часть, „ABC – прямоугольный треугольник“ – гипотеза, „квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов“ – заключение; б) „угол α – внутренний угол треугольника ABC“ – разъяснительная часть, „треугольник ABC равносторонний“ – гипотеза, „величина угла α равна 60°“ – заключение. **10.** „Если сумма $a+b$ является рациональным числом, то числа a, b рациональны“ – Л. **11*.** а), б) Л.

Упражнения и задачи на повторение

А. 1. а), б), в), ж) И; г), д), е), з) Л. **3.** а) „число a кратно 14“ – достаточное условие, „число a кратно 7“ – необходимое условие; „Если целое число a кратно 7, то оно кратно 14“ – Л;

б) „заданный треугольник – прямоугольный“ – достаточное условие, „у заданного треугольника два острых угла“ – необходимое условие; „Если у треугольника два острых угла, то он прямоугольный“ – Л. **4.** а) И; б) Л. **5.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \setminus B = \{2, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 9\}$, $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 9), (2, 1), (2, 3), ..., (4, 5), (4, 9)\}$. **6.** 4 ученика.

Б. **7.** $A \cup B = (-3, +\infty)$; $A \cap B = \{5\}$. **8.** а) $S_1 \cup S_2 = \{-1, 6\}$; б) $S_1 \cap S_2 = \{6\}$; в) $S_1 \setminus S_2 = \{-1\}$; г) $S_2 \setminus S_1 = \varnothing$; д) $S_1 \times S_2 = \{(-1, 6), (6, 6)\}$. **9.** 32 подмножества: $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{-2, -1\}$, ..., $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **10*.** а), в) Л; б) И.

Проверочная работа

А. **1.** Л. **2.** б) „p и q“ – Л, „p или q“ – И, „non p“ – И, „non q“ – Л. **3.** а) „четырехугольник является ромбом“ – достаточное условие, „в ромб можно вписать окружность“ – необходимое условие; б) „Если в четырехугольник можно вписать окружность, то этот четырехугольник является ромбом“ – Л. **4.** а) M_3; б) M_1. **5.** а) И; б) Л.

Б. **1.** Не является высказыванием. **2.** б) „p и q“ – Л; „p или q“ – И; „non p“ – И; „non q“ – Л. **3.** а) „четырехугольник является прямоугольником“ – достаточное условие, „четырехугольнику можно описать окружность“ – необходимое условие; б) „Если четырехугольнику можно описать окружность, то он является прямоугольником“ – Л. **4.** а) $S_1 \cup S_2 = \{1, \pm 3\}$; б) $S_1 \cap S_2 = \{1\}$; в) $S_2 \setminus S_1 = \{3\}$; г) $S_1 \setminus S_2 = \{-3\}$.

Модуль 3. Корни. Степени. Логарифмы

§1. А. **1.** а) 0,05; б) 288; в) $\frac{90}{161}$; г) $2-\sqrt{3}$, $0{,}26 \le 2-\sqrt{3} \le 0{,}27$; д) $\sqrt{3}-2$, $-0{,}27 \le \sqrt{3}-2 \le -0{,}26$. **2.** а) $2|a|\cdot\sqrt[4]{2b^3}$; б) $-5ab\sqrt{b}$; в) $|x+3|$; г) xy^2; д) $-13yx\sqrt{x}$; е) $-ab\cdot\sqrt[4]{8ab^2}$. **3.** а) $\sqrt{3b^2}$; б) $-\sqrt{-2x}$; в) $\sqrt{7c^2a}$, если $c \le 0$; $-\sqrt{7c^2a}$, если $c > 0$; г) $\sqrt[3]{2x^3y}$; д) $\sqrt[4]{2a^5}$; е) $\sqrt{3a^2}$; ж) $\sqrt{3y^2}$, если $y > 0$; $-\sqrt{3y^2}$, если $y < 0$; з) $\sqrt{2x}$; и) $\sqrt[3]{2x^4y}$; к) $-\sqrt[4]{-x^5}$. **4.** а) 34; б) $8\sqrt{3}$; в) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; г) $\sqrt{6x}$; д) $8(9+4\sqrt{5})$. **5.** а) $\frac{\sqrt[3]{x}}{xy}$; б) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{13}$; в) $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$; г) $-\sqrt{13}-\sqrt{18}$; д) $-\frac{1}{4}(4+3\sqrt{2}-2\sqrt{7}-\sqrt{14})$.

§1. Б. **6.** а) -1; б) $\frac{13}{12}$; в) 3; г) 5; д) $\sqrt{6}-\sqrt{5}+1$, $1{,}213 \le \sqrt{6}-\sqrt{5}+1 \le 1{,}214$. **7.** а) $\frac{9}{2}\sqrt{13}$; б) $\frac{25}{108}$; в) $4p-\sqrt{4p^2-1}$; г) $\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ если } x > 2,\\ -\sqrt{x}, \text{ если } 0 < x < 2;\end{cases}$ д) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; е) $2\sqrt{\frac{a}{x}}$, если $\sqrt{a} \ge x > 0$; $2\sqrt{x}$, если $\sqrt{a} < x$; ж) $\sqrt[4]{3}+\sqrt{5}-1$. *Указание.* $2\sqrt{5}-6 = -(\sqrt{5}-1)^2$; з) $1+2\sqrt{3}$. **9.** 5 граней. **10*.** 7.

§2. А. **1.** а) $\frac{7}{3}$; б) 10^5; в) $\frac{125}{2}$; г) 0; д) $\left(\frac{5}{2}\right)^4$; е) 9. **2.** а) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; б) $\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$; в) $\sqrt[4]{a}-2$; г) $\frac{b+a}{b-a}$; д) $16a^2$; е) $3^{-6-4\sqrt{3}}$; ж) $3^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. **3.** а) Меньше 1; б), в) больше 1. **4.** 12%. **5.** $\frac{10^{20}}{16\sqrt{2}}$ кубиков. **6.** $15^{\frac{2}{7}}$ см.

§2. Б. **7.** а) 5; б) $\frac{3}{2}$; в) 7 200; г) $\frac{1}{4}\cdot 5^{15}$. **8.** а) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{x+3y}{x-y}$; г) -1; д) $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$, если $\begin{cases} m > 1,\\ m \ne \sqrt[3]{2};\end{cases}$ $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, если $m \le 1, m \ne 0$; е) 7^{-5}; ж) $3^{\sqrt{3}}\cdot 5^{20\sqrt{3}}$. **9.** а), б) Больше 1; в), г) меньше 1.

§3. А. **1.** а) 9; б) 2; в) 1; г) 2; д) 144. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $3a+ab$. **4.** 16. **6.** $1<\log_2 3<\log_2 5$.

§3. Б. **8.** а) $\log_2|a|$; б) $4\log_a|b|$; в) $\log_a b$; г) 3; д) $3-2\log_a b$, если $3-\log_a b\geq 0$; -3, если $3-\log_a b<0$; е) $a+1$; ж) $\log_n^2 p$; з*) 0. **9.** $x=\sqrt[4]{5}$. **11.** а) $3(1-a-b)$; б) $\frac{1+ab}{a(8-5b)}$. *Указание.* Разложите числа на простые множители. **13*.** 5. **14*.** 0.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** а) 4; б) 2; в) –2,35; г) 7200. **2.** а), д), е) И; б), в), г), ж) Л. **3.** а) –2; б) $2^{\frac{5}{4}}$. **4.** а) $-2x$; б) 1. **5.** а) $\sqrt[6]{35}>\sqrt[7]{35}$; б) $\sqrt{5^{16}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$. **6.** а) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; б) $\frac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$; в) $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})$; г) $-\frac{1}{6}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$. **7.** 2 м.

Б. **10.** а) Л; б) И. **11.** а) $\frac{7}{4}$; б) 6; в) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$; г) $\log_6(a^3-2)^2$. **12.** а) Первое меньше; б) первое больше; в) равные; г) первое больше. **13.** $a\in\mathbb{R}_-^*$. **14*.** $\frac{3(1-a)}{a}$. **15*.** $n=3$.

Проверочная работа

А. **1.** **В**. **2.** $3\sqrt{7}<7\sqrt{3}$. **3.** 8. **4.** $x-1$. **5.** а) Л; б) И. **6.** $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}>\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}>\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$. **7.** $7\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$. **8.** **В**. **9.** 36. **10.** $a, b\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $ab(a-b)^2$.

Б. **1.** **А**. **2.** $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}>(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$. **3.** 1. **4.** $-\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}$. **5.** а), б) Л. **6.** $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}<\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,2}$. **7.** $(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{13}+\sqrt{9})$. **8.** **В**. **9.** -10^{-1}. **10.** $a\in\mathbb{R}_+^*$, a^2+a+1.

Модуль 4. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

§1. А. **3.** а) $S=\{4\}$; б) $S=\{25\}$; в) $S=\{6\}$. **4.** а) $S=\{3, 4, 5, 6\}$; б) $S=\{2, 3, 4\}$; в) $S=\{4, 5, 6, 7\}$. **5.** а) Выражение A_3^6 не имеет смысла. **6.** а) 5; б) 25 200; в) $\frac{7}{144}$; г) 336; д) 576; е) 12; ж) не имеет смысла. **7.** а) $S=\{2\}$; б) $S=\{4\}$; в) $S=\{6, 11\}$. **9.** 4368. **10.** 306 партий. **11.** 20. **12.** 40320. **13.** 210. **14.** а) 720 „терминов“. **15.** 5040. **16.** 56. **17.** 8008. **18.** а) $\approx 0{,}16$; б) $\approx 0{,}31$.

§1. Б. **21.** а) $S=\{5\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{2\}$. **22.** а) $n\in[6,+\infty)$, $n\in\mathbb{N}$; б) $n\in[0, 9]$, $n\in\mathbb{N}$; в) $n\in[1, 4]$, $n\in\mathbb{N}$. **24.** а) $x=6$, $y\in[0, 10]$, $y\in\mathbb{N}$; б) $x=12$, $y\in[0, 12]$, $y\in\mathbb{N}$. **27.** а) $6!-5!=600$; б) $5!=120$; в) $5!=120$; г) $5!-4!=96$; д) $4!=24$. **28.** $C_8^6\cdot A_9^6=1\,693\,440$ (способов). **29.** $C_2^1\cdot C_{23}^{10}=2\,288\,132$ (способов). **30.** $C_7^3\cdot C_9^3=2940$ (способов). **31.** *Указание.* Примените алгоритм, используемый при решении задачи 7 из раздела 1.5.2. **32.** $C_{10}^3\cdot C_6^2$ способов. **33.** $(C_3^1\cdot C_{10}^4+C_3^2\cdot C_{10}^3)$ способов. **34.** а) $S=\{x\,|\,x\in(4,+\infty),\ x\in\mathbb{N}\}$; б) $S=\{3, 4, 5\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{x\,|\,x\in[4, 13],\ x\in\mathbb{N}\}$; д) $S=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; е) $S=\{7, 8, 9, \ldots\}$. **38.** а) *Указание.* Приведите второе уравнение к виду $(x+2)!=6!$. б) $S=\{(4, 8)\}$.

§2. Б. **1.** б) $6561a^8+17496a^7b+20412a^6b^2+13608a^5b^3+5670a^4b^4+1512a^3b^5+$ $+252a^2b^6+24ab^7+b^8$; в) $a^3+6a^2\sqrt{ab}+15a^2b+20ab\sqrt{ab}+15ab^2+6b^2\sqrt{ab}+b^3$.
2. б) $a\cdot\sqrt[3]{a^2}-5ab\cdot\sqrt[3]{a}+10ab^2-10b^3\cdot\sqrt[3]{a^2}+5b^4\cdot\sqrt[3]{a}-b^5$; в) $\frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x}}-\frac{7}{x^3\cdot\sqrt{y}}+\frac{21}{x^2y\cdot\sqrt{x}}-$ $-\frac{35}{x^2y\cdot\sqrt{y}}+\frac{35}{xy^2\cdot\sqrt{x}}-\frac{21}{xy^2\cdot\sqrt{y}}+\frac{7}{y^3\cdot\sqrt{x}}-\frac{1}{y^3\cdot\sqrt{y}}$. **4.** *Указание.* Примените метод математической индукции и бином Ньютона. **5.** а) $T_5=39191040x^6$; б) $T_7=5376xy^3\cdot\sqrt{x}$; в) $T_{10}=-4330260a^2b^9$. **6.** а) 2^{25}; б) 2^{108}; в) 2^{215}; г) 2^{71}. **7.** а) 2^{14}; б) 2^{24}; в) 2^{27}; г) 2^{31}.

8. а) $T_5=29\,120x^{10}$; б) $T_9=329\,472\,x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot a^4$; в) $T_7=593775$. **9.** а) $T_9=3294720x^{16}y^{32}$; в) $T_8=-3432x^{21}y^{14}$. **10.** а) $T_{13}=5200300x^{13}y^{36}$, $T_{14}=-5200300x^{12}y^{39}$; б) $T_7=1716a^3b^3\cdot\sqrt{a}$, $T_8=1716a^3b^3\cdot\sqrt{b}$. **11.** а) *Указание*. В формуле бинома Ньютона замените x^2 и y^2 на 1; б) *Указание*. В формуле бинома Ньютона замените x и y^3 на 1. **12.** а) $T_{15}=3876000$. **13.** $T_6=56x^{-\frac{1}{4}}$. **14.** $n=8$. **15.** $T_7=924x^9$. **16.** 3360.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** 552 фотографии. **2.** 91 партия. **3.** 27 907 200. **4.** 479 001 600. **5.** а) 1 680; б) $4\cdot A_7^3=840$ (способов). **6.** 20 160. **7.** 40 320. **8.** а) $C_{12}^5\cdot C_3^1=2\,376$ (способов); б) 2 376; в) 792; г) 5 544. **9.** $\approx 0{,}01$ или $\approx 1\%$. **10.** 0,2. **11.** а) $S=\{8\}$; б) $S=\{7\}$; в) $S=\{8\}$; г) $S=\{2\}$. **12.** а) $n=8$; б) $n=9$; в) $n=12$; г) $n=7$. **13.** $T_7=54\,264$. **14.** $x=27$. **15.** $P(A)=\dfrac{2}{15}$; $P(B)=\dfrac{1}{3}$; $P(C)=\dfrac{7}{15}$.

Б. **16.** 7 элементов. **17.** а) 5 040; б) $(n-1)!$. **18.** *Указание.* $C_{10}^4\cdot C_5^2+C_{10}^3\cdot C_5^3+C_{10}^2\cdot C_5^4+C_{10}^1\cdot C_5^5$. **19.** 261 число. **20.** а) $S=\{6, 7, 8, ...\}$; б) $S=\{0, 1, 2, 3, ..., 16\}$; в) $S=\{8, 9, 10\}$. **21.** а) Одно рациональное слагаемое; б) 17 рациональных слагаемых. **23.** *Указание*. Примените метод математической индукции. **25*.** $S=\{(2; 1)\}$. **26*.** *Указание*. Примените метод математической индукции.

Проверочная работа

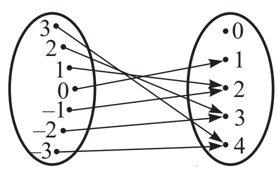
А. **2.** а) И; б) 32. **3.** $S=\{2\}$. **4.** 12 650.

Б. **2.** Л. **3.** $S=\{4, 5, 6, 7, ..., 49\}$. **4.** $9\cdot 9!$ чисел. **6.** 3 118 752.

Модуль 5. Числовые функции. Основные свойства

§1. А. **1.** а) $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$; б) $\mathbb{R}$; в) $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.
2. а) $[-2, +\infty)$; б) $(-\infty; 0{,}25]$; в) $\mathbb{R}^*$.
3. а), б) Нет; в) да.

4.



§1. Б. **5.** а) $(-\infty, -1]\cup(1, +\infty)$; б) $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$; в) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{R}\setminus[0, 1)$. **6.** а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{R}^*$; в) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.
7. а) $(f+g)(x)=|x|+x-1$, $(f\cdot g)(x)=|x|(x-1)$, $(f\circ g)(x)=|x-1|$;
б) $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x+1}+x^3+1$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x+1}(x^3+1)$, $(f\circ g)(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$;
в) $(f+g)(x)=x^3-1+\sqrt[3]{x-1}$, $(f\cdot g)(x)=(x^3-1)\cdot\sqrt[3]{x-1}$, $(f\circ g)(x)=x-2$.
8. а) $(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n\text{ раз}})(x)=x^{2^n}$; б) $(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n\text{ раз}})(x)=x-n$.
9. а) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=x^{17}$, $g(x)=x^{10}+1$; б) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $g(x)=x^2-1$.
10*. Да. Например, $A=B=C=\mathbb{R}$, $M=\{0\}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$.

§2. А. **1.** а) $(-\infty, +\infty)\nearrow$; б) $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)\nearrow$; в) $(-\infty, 0)\searrow$, $(0, +\infty)\nearrow$.
2. а) $y_{\min}=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$; б) $y_{\max}=f(0)=0$. **3.** 1 а) $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; 1 б) $\varnothing$; 1 в) $\{0\}$; 2 а) $\{-1, 0\}$; 2 б) $\{0\}$.
4. а) $[-2, 0)\cup(0, +\infty)$; б) $(1, 2]$; в) $\{2\}$. **5.** $f(x)=|x|$.

§2. Б. **6.** а) $(-\infty, 0)\nearrow$; $(0, +\infty)\searrow$; б) возрастает на каждом промежутке $[n, n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$. **7.** $f+g$, $f+f$, f^3, $g\circ f$ – возрастающие, $-f$ – убывающая. **9.** а) $y_{\max}=f(0)=1$; б) $y_{\min}=f(0)=f(1)=0$, $y_{\max}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$. **10.** f_2, период 1; f_3, период 2; f_4, период $\dfrac{1}{5}$. **11.** а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная. **13*.** а) $f=h_1+h_2$, $h_1(x)=2x^2+3$,

$h_2(x)=-x$; б) $f(x)=h_1+h_2$, $h_1(x)=-2$, $h_2(x)=x$. **14.** а) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=x^3+1$; б) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x)=x^4$; в) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$; г*) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$.

15*. а) Функция f не является биективной; б) функция f_1 биективна.

Упражнения и задачи на повторение

А. 1. а) $D(f)=\mathbb{R}$, $E(f)=\mathbb{R}$; б) $D(f)=\mathbb{R}^*$, $E(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; в) $D(f)=\mathbb{R}$, $E(f)=\left[-\frac{9}{4},\ +\infty\right)$.

2. а) Возрастающая на $\mathbb{R}$; б) убывающая на $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$; в) убывающая на $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$, возрастающая на $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$. **3.** б). **4.** а) На $\left(-3,\ -\frac{7}{4}\right)$ – отрицательные значения, на $(-\infty,\ -3)\cup\left(-\frac{7}{4},\ +\infty\right)$ – положительные значения; б) на $(2,\ 4)$ – отрицательные значения, на $(-\infty,\ 2)\cup(4,\ +\infty)$ – положительные значения; в) на $\left(-\frac{26}{5},\ -4\right)$ – отрицательные значения, на $\left(-\infty,\ -\frac{26}{5}\right)\cup(4,\ +\infty)$ – положительные значения. **5.** а) $y_{\max}=f(1)=1$; б) $y_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$; в) $y_{\min}=f(-3)=-9$.

Б. 6. $(f+g)(x)=5$, $(f-g)(x)=2x-1$, $(f\cdot g)(x)=-x^2+x+6$, $(f\circ g)(x)=5-x$, $(g\circ f)(x)=1-x$.
7. а), в) Нечетная; б) ни четная, ни нечетная. **8.** а) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $g(x)=x^7+2$; б) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^4+3x^2+1$.

Проверочная работа

А. 1. **C**. **2.** $(1,+\infty)$. **3.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $y_{\max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$. **4.** $\{3,\ 4\}$. **5.** **A**. **6.** На $(4,\ 5)$ – положительные значения, на $(-\infty,\ 4)$, $(5,\ +\infty)$ – отрицательные значения.

Б. 1. **C**. **2.** $h=f_2\circ f_1$. **3.** $(0,+\infty)$. **4.** а) 0; б) $y_{\max}=f(0)=1$. **5.** **D**. **6.** **B**. **7.** На $(-1,\ 0)$ – отрицательные значения, на $(-\infty,\ -1)$, $(0,\ +\infty)$ – положительные значения.

Модуль 6. Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности

§1. А. **2.** б) $P(X)$ не имеет действительных корней; в) $\alpha_1=1$ – корень кратности 4, $\alpha_2=1$ – простой корень. **3.** а) 1; б) –0,5; в) –3. **4.** а) $f(t)=3600t+2400$; б) 15 часов. **5.** г) $S=\left\{-2\frac{2}{3}\right\}$; д) $S=\mathbb{R}$; е) $S=\{1\}$; ж) $S=\left\{0,\ 2\frac{2}{3}\right\}$; з) $S=\varnothing$; и) $S=\{-2,\ 2\}$. **6.** 210 см^2. **7.** 52 м, 40 м. **8.** $33\frac{2}{3}$ км/ч.

§1. Б. **10.** 160 г, 20%. **11.** $(2\sqrt{10}-5)$ км/ч. **13*.** а), б) *Указание.* $x_1=1$ – решение уравнения. **14*.** $S=\{1,\ 6,\ 3-\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2}\}$. **15*.** $S=\left\{\frac{m}{5}\right\}$, $m\in\mathbb{R}^*_-$.

§2. А. **1.** а), б) Да. **2.** а) $S=\{(1,\ -2)\}$; б) $S=\{(-1,-3),\ (-3,-1)\}$; в) $S=\{(-4,\ -5),\ (5,\ 4)\}$; г) $S=\{(2,\ 0),\ (0,\ -2)\}$. **3.** а) $S=\left\{\left(\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$; в) $S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{3}-1\right)\right\}$. **4.** $S=\{-2,\ 1,\ 2,\ 5\}$.
5. 24 км/ч, 18 км/ч. **6.** Один учебник – 30 леев, одна тетрадь – 20 леев. **7.** 20 столов, 45 посетителей. **8.** 6 дней, 12 дней. **9.** $S=\left\{0,\ 3,\ \frac{3-\sqrt{33}}{6},\ \frac{3+\sqrt{33}}{6}\right\}$.

§2. Б. **10.** а) *Указание.* Умножьте первое уравнение на 13, затем сложите со вторым уравнением; б) $S=\varnothing$. **11.** а) *Указание.* Выполните замены: $x+y=t,\ xy=z$; в) $S=\{(2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}),\ (2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}),\ (-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}),(-2+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2})\}$.
12. а) *Указание.* Перемножьте уравнения почленно; б) $S=\{(-3,\ -2),\ (3,\ 2)\}$;
в) $S=\left\{\left(2,\ \frac{1}{2}\right),\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\ \frac{2\sqrt{10}}{5}\right),\left(\frac{\sqrt{10}}{5},\ -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$; г) *Указание.* Примените определение модуля; д) $S=\varnothing$; е) *Указание.* Примените определение модуля. **15.** $m_{CH_3OH}=0{,}64$ g, $m_{C_2H_5OH}=0{,}46$ g, $W_{CH_3OH}\approx 0{,}5818$, $W_{C_2H_5OH}\approx 0{,}4182$.
16*. а) $S=\left\{\left(\frac{a^2+a+1}{a^2+1},\ \frac{a+1}{a^2+1}\right)\right\},\ a\in\mathbb{R}$; в) *Указание.* Перемножьте все три уравнения почленно.

§3. А. **1.** а) $S=(14{,}5;\ +\infty)$; б) $S=(-\infty;\ 0)$; в) $S=(-\infty;\ -2{,}4]$; г) $S=[0;\ +\infty)$. **2.** а) $S=(0,\ 1]$; б) $S=(-\infty,\ 0]\cup\left(\frac{1}{3},\ 2\right]$; в) $S=(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$; г) $S=(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$; д) $S=[-1,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$.

§3. Б. **3.** (12 м, 40 м). **5.** а) $S=(-\infty,\ -2]\cup(-1,\ 0]$; б) $S=(-1,\ +\infty)$; в) $S=(-8,\ -1]\cup\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$.

§4. А. **1.** а) Нет; б) да. **2.** а) $S=[0,\ 3]$; б) $S=[-1,\ 0)\cup(3,\ 4]$; в) $S=(-\infty,\ 0)\cup[3,\ +\infty)$.
3. а) $S=\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup(2{,}3)$; б) $S=(-6,\ 5)$; в) $S=\left(0,\ \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$. **4.** а) $S=(-\infty,\ 3)$; б) $S=(0,\ +\infty)$; в) $S=(-\infty,\ -2)\cup[-1,\ 0]\cup(5,\ +\infty)$. **5.** $x\in\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$. *Указание.* Используйте неравенства треугольника.

§4. Б. **6.** а) $S=\{3\}$. **7.** а) $S=[-8,\ -6{,}5)\cup[0,\ 5)$; б) $S=\left(-\infty,\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ +\infty\right)$.
8. $\left(4,\ \frac{8+\sqrt{61}}{3}\right)$ км/ч. **10*.** б) $S=(-\infty,\ -3]\cup(4,\ 5)\cup(5,\ +\infty)$. **11*.** $S=(-1,\ 1)\cup\{-3\}\cup\{2\}$.

Задачи и упражнения на повторение

А. **1.** б) $S=\left\{4\frac{9}{19}\right\}$; в) $S=\left\{1\frac{1}{14}\right\}$. **2.** а) 17, 27; б) 5, 50; в) 200 т, 320 т. **3.** 12 мотоциклов, 36 автомобилей. **5.** 18 лет. **6.** 90 000 леев, 135 000 леев, 225 000 леев. **7.** $x=-1,\ y=-1$.
8. а) $-1,\ -\frac{2}{3}$ – простые корни; 1 – двойной корень; б) 1 – простой корень. **9.** $a_1=-2,\ b_1=2$; $a_2=-\frac{2}{3},\ b_2=6$. **10.** а) Л; б) И.

Б. **11.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\{1,\ 8\}$. **12.** а) $S=\{(1{,}5;\ -2),\ (10,\ 15)\}$; б) $S=\{(70,\ -28),\ (4,\ 5)\}$; в) $S=\{(6,\ 8),\ (8,\ 6)\}$. **13.** а) $S=\{(3-3\sqrt{2},\ 3+3\sqrt{2}),\ (3+3\sqrt{2},\ 3-3\sqrt{2}),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}$; б) $S=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$. **14.** а) $m\in\{-\sqrt{10},\ \sqrt{10}\}$; б) $m\in(-\sqrt{10},\ \sqrt{10})$; в) $\mathbb{R}\setminus[-\sqrt{10},\ \sqrt{10}]$.

Проверочная работа

А. **2.** а) $-1,\ \frac{2}{3}$ – простые корни. **3.** а) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$; б) $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0]\cup(1,\ +\infty)$.
4. Один тюльпан – 8 леев, один нарцисс – 5 леев.

Б. **1.** $S=\{(-1,\ -2),\ (2,\ 1),\ (1-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2})\}$. **2.** а) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,\ 5\}$. **3.** 40 км/ч, 50 км/ч.

Модуль 7. Элементарные функции. Уравнения. Неравенства

§1. А. **1.** б) $S=\left\{\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$; в) $S=\left\{-\frac{53}{136}\right\}$. **2.** а) $S=\{(2,1)\}$; б) $S=\{(0,1)\}$. **3.** а) $S=\left(-\infty,-\frac{21}{2}\right)$; б) $S=(-\infty,-10)$. **4.** а) $f(18)=0$; $g\left(\frac{12}{5}\right)=0$; в) $\left(\frac{18}{13},\frac{33}{13}\right)$; г) $S=\left(-\infty,\frac{9}{7}\right)$; д) $S=\varnothing$.
5. а) $S=\left\{-2{,}4;\ \frac{1}{3}\right\}$; б) $S=\left\{-\frac{25}{8},\frac{6}{31}\right\}$. **6.** а) 10 рабочих; б) 3 гекталитра; 2,1 гекталитра. **8.** а) $S=\{5\}$; б) $S=\varnothing$.

§1. Б. **10.** а) $S=\varnothing$ при $a=1$, $S=\left\{\frac{2}{a-1}\right\}$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; б) $S=\mathbb{R}$ при $a=1$, $S=\varnothing$ при $a=-1$, $S=\left\{\frac{a+1{,}5}{a+1}\right\}$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; в) $S=\mathbb{R}$ при $a=0$, $S=\{1\}$ при $a\in\mathbb{R}^*$. **11.** б) $x\in(-1,+\infty)$. **12.** $a\in(-3,0]$. **14.** а) $S=\{7,8,9,\ldots\}$; б) $S=\{9,10,11,\ldots,15\}$. **15.** 1,5 кг. **16.** 40 т с содержанием никеля 5%, 100 т с содержанием никеля 40%. **17.** а) $S=\varnothing$ при $a=7{,}5$, $S=\left\{\frac{2-3a}{2a-15}\right\}$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{7{,}5;\pm\sqrt{5}\}$. **18*.** а) $a=1$; б) $a=-1$; в) не существуют такие значения a.

§2. А. **1.** а) $S=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{33}-1}{4},+\infty\right)$; г) $S=(-2,-1)$. **2.** а) $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$, $\left(\frac{1}{3},1\right)$; б) $\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$; в) $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$, $(-3,0)$. **3.** а) $[-3,1]$; б) $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}},+\infty\right)$; в) $(-\infty,-1]\cup[\sqrt{3},+\infty)$. **4.** 510 м. **5.** $a=b=5$. **6.** $(x-4)^2+(y-5)^2=\frac{36}{5}$. **7.** а) $S=\{6,10\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{0{,}5\}$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\left\{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2},2,3\right\}$. **8.** а) $S=[-1,5]$; б) $S=\mathbb{R}$; в) $S=\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right)\cup\left(-\frac{7}{3},+\infty\right)$; г) $S=[-4,4]$; д) $S=(-\infty,-4]\cup[5,+\infty)$.
9. а) $y_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=0$, $y_{\max}=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$; б) $y_{\min}=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{8}$, $y_{\max}=f(0)=1$.
10. а) $h(5)=237{,}3$ м; б) $\approx 14{,}7$ с. **11.** а) $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$; б) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; в) $[-3,-1]\cup[0,3]$; г) $(-\infty,-4)\cup(-4,-1]\cup[4,+\infty)$.

§2. Б. **13.** а) $(x-3{,}5)^2+(y-\sqrt{10})^2=12{,}25$; $(x-3{,}5)^2+(y+\sqrt{10})^2=12{,}25$; б) не пересекаются; в) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. **14.** в) *Указание*. Пусть $|3x-1|=t$, $t\geq 0$. **15.** а), б) *Указание*. Примените метод интервалов; в) $S=(-\infty,1)$; г) *Указание*. Примените метод интервалов; д) $S=\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; е) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{3},1\right\}$. **16.** *Указание*. Можно применить графический метод. **18.** *Указание*. Поставьте условия $a-1>0$ и $D=5a^2+2a-3>0$. **20.** $a\in[-1;-0{,}2]$.
21*. f^{-1}: $(-\infty,-2]\to(-\infty,-1]$, $f^{-1}(x)=-1-\sqrt{-2-x}$. **23*.** $a\in(-6,6)$. **24*.** $a\in(-\infty;0{,}5]$.

§3, 3.2. А. **1.** а) $[3,+\infty)$; б) $\mathbb{R}$. **3.** а) Четная; б) нечетная.

§3, 3.2. Б. **4.** а) $(f+g)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=x^4+x^5$; $(f\cdot g)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=x^9$; б) $(f+g)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; $(f\cdot g)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$.

5. а) $D(f)=[0, 2]$, $E(f)=[0, 1]$; б) $D(f)=(-\infty, 1]$, $E(f)=[0, +\infty)$; в) $D(f)=\mathbb{R}_+$, $E(f)=\left[0, \frac{1}{4}\right]$. **6.** а) $[0, +\infty)\nearrow$, $(-\infty, 0]\searrow$; б) $(-\infty, -2]\searrow$, $[-2, +\infty)\nearrow$; в) $(0, +\infty)\nearrow$; г) $(-4, +\infty)\nearrow$.

7. а) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_-$, $f^{-1}(x)=-\sqrt[4]{x}$; б) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x^2$; в) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=4x^3$.

8*. а) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x}+x^3$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x}\cdot x^3$; $(f\circ g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=x$; б) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$; $(f\circ g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=(\sqrt[3]{x})^2$.

§3, 3.3. А. **1.** а) $S=\{8\}$; б) $S=\{10\}$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{0\}$; д) $S=\{2\}$; е) $S=\{3\}$.
2. а) $S=\{2, 5\}$; б) $S=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$; в) $S=\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$; г) $S=\{-1; 1{,}5; 2; 3\}$. **4.** Л.

§3, 3.3. Б. **5.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\left\{\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})\right\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{2\}$; д) 36 соток, 4 сотки.

6. а) $S=\{2\}$; б) $S=\left\{\frac{1}{2}(5\sqrt{13}-13)\right\}$; в) $S=\{-3\}$; г) $S=\{1, 2, 10\}$. **7.** а) $S=\{1, 3, 4\}$; б) $S=\{-8, 8\}$. **8.** а) $S=\{-4, 2\}$; б) $S=\{4, 9\}$; в) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$; г) $S=\{7+\sqrt{1{,}75}\}$.

9. б) $S=\{-4, 4\}$. **10.** а) $S=\{1\}$. **11*.** а) $S=\left\{-\frac{47}{24}\right\}$; б) $S=\{12\}$; г) $S=[5, 10]$; д) $S=\{0\}$; е) $S=\{-7, 2\}$. **12*.** а) $S=\left\{\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}, \frac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}\right\}$; б) $S=\left\{-1, \frac{9}{16}\right\}$. **15*.** а) $S=\left\{0, \frac{63a}{65} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$;
б) $S=\{0\}$ при $a=0$, $S=\varnothing$ при $a\in(-\infty, 0)\cup(0, 1)$, $S=\left\{\frac{(a-1)^2}{4}\right\}$ при $a\in[1, +\infty)$.

§3, 3.4. Б. **1.** а) $a\in(-1, +\infty)$; б) $S=[-3, 1]$; в) $S=\varnothing$; г) $S=(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$; д) $S=\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right]$; е) $S=(-10, +\infty)$. **2.** а) $S=\left(-5, \frac{5}{9}\right)$; б) $S=[4;\ 4{,}5)$; г) $S=[4, +\infty)$; д) $S=(-\infty, 0]$; е) $S=\mathbb{R}$. **3.** а) $S=(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$; б) $S=[8, +\infty)$; в) $S=[0, 1]\cup[3, +\infty)$.
4. а) $S=\left[\frac{73}{16}, +\infty\right)$; в) $S=\left(-\infty, -\frac{19}{8}\right]\cup[4, +\infty)$. **6.** а) *Указание*. Решите неравенство $|1-x|-|2x-1|\le 2$; б) *Указание*. Решите неравенство $2+x-3|x-3|>x^2$; в) *Указание*. Решите неравенство $|t-1|+|3t+1|\le 2t$; г) *Указание*. Примените метод интервалов.
7. а) $S=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$; б) *Указание*. Замените $t=\sqrt{\frac{1-x}{2x+1}}$; в) *Указание*. Пусть $t=\sqrt{x^2-3x+5}$, $t\ge 0$. **8*.** б) *Указание*. $S=\varnothing$ при $a<0$. ОДЗ: $x\in[0, a^2]$. Возведем обе части неравенства в квадрат и получим $\sqrt{a^2-x}<1-a$. Исследуйте случаи $1-a>0$ и $1-a\le 0$, учитывая ОДЗ; в) *Указание*. Примените графический метод. График функции $y=\sqrt{1-x^2}$ – полуокружность, а график функции $f(x)=2x+a$ – прямая. Рассмотрите случаи: 1) прямая касательна к полуокружности; 2) прямая пересекает полуокружность в двух точках, в одной точке; 3) графики не пересекаются.

§3, 3.5. Б. **1.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\{(1, 1)\}$; в) $S=\{(2, -1)\}$; г) $S=\left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)\right\}$; д) $S=\{(1, 27), (27, 1)\}$.
2. а) $S=\{(2, 8), (8, 2)\}$; б) $S=\{(8, -1), (1, -8)\}$. **3.** а) $S=\{-1, 3, 4\}$; б) $S=\{-1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}, 3\}$.

4. б) $S=\{-7,\ 0,\ 2\}$. **8*.** а) $S=\varnothing$ при $a<0$, $S=\{(9a^2,\ a^2)\}$ при $a>0$, $S=\{(0,\ 0)\}$ при $a=0$; б) *Указание*. ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}_+$. Второе уравнение запишется $(x+1)^2-(y+2)^2=0$. Тогда $x=-1\pm(y+2)$. При $x=y+1$ первое уравнение примет вид $y-\sqrt{y}+1-a=0$. Полученное уравнение решается как уравнение II степени относительно неизвестного $\sqrt{y}$; в) *Указание*. ОДЗ: $xy\geq 0$. Первое уравнение примет вид $(x+y)^2-xy=a^2$ (1). Из второго уравнения находим $x+y=a-\sqrt{xy}$ и подставим в уравнение (1).

§3, 3.6. Б. **1.** а) $S=(7,+\infty)$; б) $S=[1,+\infty)$; в) $S=[3,+\infty)$; г) $S=\varnothing$. **2.** а) $S=[4,+\infty)$; б) $S=\varnothing$. **3.** а) $S=\mathbb{R}$; в) $S=(0,+\infty)$.

Проверочная работа I

А. **1.** а) $-1{,}5$; 1; б) $S=(-\infty;-1{,}5]\cup[1;+\infty)$; в) $(0,\ 3)$, $(-1{,}5;\ 0)$. **2.** $S=\{1\}$. **3.** 20 ч, 30 ч.

Б. **1.** а) $S=[0{,}5;\ 2{,}5)$; б) $x_1=1,\ x_2=2$. **2.** а) $a\in(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$; б) a^2-8a+9; в) -7; г) $a\in(9,+\infty)$.

§4, 4.2. А. **2.** а) $a>1$; б), в) $a\in(0,1)$. **3.** а) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}>(\sqrt{2})^{1,3}$; б) $(0{,}3)^{-\sqrt{3}}<(0{,}3)^{-1,8}$. **4.** а) $x\in(-\infty,0)$; б) $x\in(0,+\infty)$; в) $x\in(0,+\infty)$. **5.** а) $S=\left\{\dfrac{6}{\lg 11-1}\right\}$; б) $S=\{3\}$; в) $S=\{-3\}$; г) $S=\{-2\}$; д) $S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$; е) $S=\varnothing$; ж) $S=\{1\}$; з) $S=\varnothing$. **6.** а) $S=\{-8\}$; б) $S=\{\log_{12}1{,}25\}$; в) $S=\{4\}$. **7.** а) $S=\{-0{,}5;\ 0{,}5\}$; б) $S=\{-2,\ 1\}$; в) $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{43}}{3},\ \dfrac{1+\sqrt{43}}{3}\right\}$. **8.** а) $S=\{\log_2 28\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{-2\}$. **9.** а) $S=\{\log_3 16\}$; б) $S=\{0,\ \log_4 3\}$; в) $S=\varnothing$.

§4, 4.2. Б. **11.** $(\sqrt{3})^{0,1}$. **12.** а), б) Первое число меньше. **13.** $x=\dfrac{8}{5}$. **14.** а) $x\in(-\infty,0)$; б) $x\in(0,+\infty)$. **15.** а) $S=\{-2,\ 2\}$; б) $S=\{-2{,}5;\ 3\}$. **16.** а) $S=\{0\}$. **17.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\{1\}$. **18.** а) *Указание*. Пусть $(2+\sqrt{3})^{2x+1}=t$, тогда $(2-\sqrt{3})^{2x+1}=\dfrac{1}{t}$; б) *Указание*. Пусть $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}}=t$, тогда $(5-2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}}=\dfrac{1}{t}$. **19.** а) $S=\{0\}$; б) $S=\{-0{,}5;\ 0{,}5\}$; в) *Указание*. ОДЗ: $x\in\mathbb{N},\ x\geq 2$. Разделите уравнение на $4^{\frac{1}{x}}$. **20.** а) *Указание*. Примените метод интервалов; в) $S=\{0,\ 2\}$. *Указание*. Запишите уравнение в виде $|x-1|^{x^2-2x}=|x-1|^0$. **21.** а) $S=\{2\}$; б) $S=\{4\}$; в) $S=\varnothing$. *Указание*. Воспользуйтесь свойствами функций, представляющих правую и левую части уравнения. **22.** а) *Указание*. Запишите уравнение в виде $|x-3|^{x^2-3x}=|x-3|^4$; б) $S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$. **24.** а) *Указание*. Пусть $t=25^{|x+1|}$, $t>0$. Получим уравнение $t^2-2t+a=0$; б) $S=\varnothing$ при $a\in(-\infty,3]\cup[27,+\infty)$, $S=\left\{\log_4\dfrac{16(a-27)}{3-a}\right\}$ при $a\in(3,27)$; в) *Указание*. Пусть $2^x=t$, $t>0$. Получим уравнение $at^2-5t+1=0$.

§4, 4.3. Б. **1.** а) $S=(5,+\infty)$; б) $S=(-1,+\infty)$; в) $S=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$; г) $S=\mathbb{R}$; д) $S=\varnothing$; е) $S=[4,+\infty)$. **2.** а) $S=(-\infty,1]$; б) $S=(-\infty,-\log_5 10)$; в) $S=(-\infty,\log_{0,7}10]$. **3.** а) $S=[-1,15]$; б) $S=(3,+\infty)$; в) $S=\left(-\infty,\dfrac{7}{13}\right)$. **4.** б) $S=(-\infty,-1)$; в) $S=(2,+\infty)$; г) $S=[0,+\infty)$; д) *Указание*. Пусть $2^x=t$, $t>0$; е) *Указание*. Пусть $3^x=t$, $t>0$; и) *Указание*. Пусть $8^x=t$, $t>0$. **5.** а) $S=(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$; б) *Указание*. Пусть $3^x=t$, $t>0$. Примените метод интервалов; в) *Указание*. Разделите неравенство на $9^{|x|}$. **6.** а) $S=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$; б) *Указание*. Рассмотрите случаи $0<3x-1<1$ и $3x-1>1$; в) *Указание*. Рассмотрите случаи

$0<|2x^2-7|<1$, $|2x^2-7|=1$, $|2x^2-7|>1$. **9*.** а) $S=\varnothing$ при $a=0$. *Указание*. Решите неравенство $2\cdot 4^{x+1}+a\cdot 2^{x+1}-a^2<0$ как неравенство II степени относительно неизвестного 2^{x+1}, затем рассмотрите случаи $a>0$ и $a<0$.

§5, 5.1. А. 2. а) $0<\log_3 2<1$; б) $\log_3 0{,}2<0$; в) $0<\log_{\frac{1}{3}} 0{,}5<1$; г) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}2<0$. **3.** а), б), в) Первое число больше.

§5, 5.1. Б. 6. $\log_{\sqrt{3}} 6>\log_3 5$. **7.** $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **8.** а) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_2 x+3$; б) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to(2,+\infty)$, $f^{-1}(x)=3^x+2$. **9.** а) $x\in(0;\,0{,}2)$; б) $x\in(13,+\infty)$. **10.** а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{R}\setminus(2,+\infty)$; в) $(-\infty,0)$. **11.** а) $2>\log_3 8$; б) $3>(\sqrt{13})^{-0{,}1}$; в) $5^{\frac{2}{3}}>17^{-0{,}3}$; г) $3^{0{,}1}>\log_9 7$. **12.** в) $(1,2)\searrow$, $(2,+\infty)\nearrow$, ни четная, ни нечетная, $E(f)=\mathbb{R}_+$, $y_{\min}=f(2)=0$. **13.** а) $(-2,+\infty)\setminus\{0,\pm1\}$; б) $(0,10^{-4})\cup(1,10)$; в) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\setminus\{\pm3\}$.

§5, 5.2. А. 1. а) $S=\{16\}$; б) $S=\{1\}$; в) $S=\{100\}$; г) $S=\left\{3\frac{1}{3}\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; е) $S=\varnothing$. **2.** а) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; б) $S=\{-2\sqrt{2},\,2\sqrt{2}\}$; в) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{41}}{2},\,\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right\}$. **3.** а) $S=\{-1,2\}$; б) $S=\{1-\sqrt{6},\,1+\sqrt{6}\}$; в) $S=\{1\}$. **4.** а) $S=\{1+10\cdot\sqrt[4]{500}\}$; б) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **5.** а) $S=\{2,3\}$; б) $S=\left\{-1\frac{2}{3},\,79\right\}$; в) $S=\{10^{-4},\,10^3\}$.

§5, 5.2. Б. 6. б) $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\,\frac{1}{4}\right\}$; в) $S=\{3^{-3-\sqrt{15}},\,3^{-3+\sqrt{15}}\}$; г) $S=\{-16\}$; д) $S=\varnothing$; е) $S=\{10^{2-\sqrt{6}},\,10^{2+\sqrt{6}}\}$; ж) $S=\{4\}$; з) $S=\left\{\frac{\sqrt[3]{9}}{9},\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; и) $S=\left\{\frac{1}{3},9\right\}$; к) $S=\{1,4\}$; л) $S=\{\pm4\}$. **7.** а) $x_1\approx0{,}7$, $x_2\approx7$; в) $S=\{2\}$. *Указание*. Воспользуйтесь свойствами функций, представляющих правую и левую части уравнения. **8.** в) $S=\{2\}$. **11*.** а) $S=\varnothing$ при $a=1$, $S=\left\{\frac{1}{a},\,a^2\right\}$ при $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$; в) $S=\varnothing$ при $a\in(-\infty,0]\cup\{1\}$, $S=\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2},\,\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$ при $a=10$. *Указание*. При $a\in(0,1)\cup(1,10)\cup(10,+\infty)$ решите уравнение II степени $2x(2-x)=\lg a$.

§5, 5.3. Б. 1. а) $S=(-\infty,0)$; б) $S=[-3,3]$; в) $S=[1;\,1{,}5)$; г) $S=(-4,-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7},4)$; д) $S=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(2,\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **2.** а) $S=\left(-\frac{1}{3},0\right]\cup[3,+\infty)$; б) $S=\left(1{,}6;\,\frac{5}{3}\right]$; в) $S=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. **3.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\left(2,\,\frac{13+\sqrt{193}}{12}\right)$. **4.** в) $S=\left(0,\,\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$. **5.** а) $S=(-\infty,-2)$; б) $S=(0,1)\cup[2,+\infty)$; г) $S=\left(-\infty,\,\frac{1}{3}\right)$; е) *Указание*. Запишите все логарифмы по основанию 2; ж) *Указание*. В ОДЗ исходного неравенства решите неравенство $\log_{x+2}\dfrac{6}{10-x^2}<0$; и) *Указание*. Пусть $x^{\log_2 x}=t$; к) *Указание*. Рассмотрите случаи $x^2-1>1$ и $0<x^2-1<1$. **6.** а) *Указание*. Применив метод интервалов, решите в ОДЗ неравенство $|x+5|\cdot|x-1|\ge x$; б) $S=(4,+\infty)$; г) *Указание*. Рассмотрите случаи $|x|>1$ и $0<|x|<1$. **8*.** а) *Указание*. ОДЗ: $1-x^2>0$. Рассмотрите случаи $0<a<1$ и $a>1$; б) $S=\varnothing$ при $a\in(-\infty,0]\cup\{1\}$, $S=\left(a,\,\frac{1}{a}\right)$ при

$a \in (0, 1)$, $S = \left(0, \frac{1}{a}\right) \cup (a, +\infty)$ при $a \in (1, +\infty)$; в) *Указание*. Рассмотрите случаи $0 < a < 1$ и $a > 1$. **9*.** $a \in (0, 1)$.

§5, 5.4. А. **1.** а) $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$; б) $S = \{(2\log_5 9, 1)\}$; в) $S = \left\{\left(2, 5\frac{1}{3}\right)\right\}$; г) $S = \varnothing$; д) $S = \varnothing$; е) $S = \{(7, 3)\}$; ж) $S = \left\{\left(\frac{16}{9}, \frac{20}{9}\right)\right\}$; з) $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$. **2.** а) $S = \left\{-\frac{9}{10}, 10^{10} - 1\right\}$; б) $S = \left\{\frac{1}{10}, 2, 3, 10\right\}$; в) $S = \{-3, 0\}$; г) $S = \{\sqrt[3]{2}, \log_5 2\}$.

§5, 5.4. Б. **3.** а) $S = \{2, 1\}$; б) $S = \left\{\left(\frac{1}{81}, -3\right), (27, 4)\right\}$; в) $S = \{(5, 1), (5, -1)\}$; г) $S = \{(5; 1{,}5), (5^8; 0{,}5(5^8 - 0{,}25)\}$; д) $S = \{(27, 3), (3, 27)\}$; е) $S = \{(1, 7), (1, -9), (5, 3), (4, 4)\}$. **4.** а) $S = \{1, 2\}$; в) $S = \{\log_6 5, \log_5 \sqrt{6}\}$; г) $S = \{5\}$.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** а) 1) $x_0 = -\sqrt{5}(2 + \sqrt{3})$, 2) $[x_0, +\infty)$; б) 1) $x_0 = -7(\sqrt{3} + 2)$, 2) $(-\infty, x_0)$; в) 1) $x_0 = \frac{51}{106}$, 2) $(x_0, +\infty)$. **2.** а) $f(t) = 500 + 80t$; б) 18 месяцев. **3.** а) $f(x) = 20 + 35x$; б) 142,5°C. **4.** а) $f(x) = 23 + 0{,}18x$; б) 59 \$. **5.** а) $[1, +\infty)$; б) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. **6.** а) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$; б) $(-\infty, 2)$; в) $(-1, +\infty)$; г) $\left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$. **7.** а) $t = 0{,}25$ с; б) $t = 1{,}5$ с. **8.** $f(t) = 90 - 7{,}62t$ (см), ≈11,8 ч = 11 ч 48 мин. **9.** а), в) Второе число больше; б), г), д), е) первое число больше.

Б. **10.** а) Второе число больше; б), в), г), д) первое число больше. **11.** а) $S = \varnothing$; б) $S = \{\sqrt{2}\}$; в) $S = \varnothing$; г) $S = \left\{\frac{\sqrt[5]{21}}{3}\right\}$; е) $S = \varnothing$. **12.** а) $(-\infty, -1)$; б) $[0, 2) \cup (2, +\infty)$; в) $(-1, +\infty)$.

13. а) $x_1 = 1$, $x_2 = 3^{\frac{5}{6}}$, $x_3 = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^5}$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = 3^{\frac{5}{6}}$. **14.** *Указание.* $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$, $R_3 = 5\Omega$.

15. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$. **16.** а) 20 ед. длины.; б) 24 ед. длины. **17.** $f(x) = -\frac{3}{800}(x - 40)^2 + 18$.

18*. а) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; б) $f^{-1}: [-1, +\infty) \to [2, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1 + x}$.

Проверочная работа II

А. **2.** 43 года, 9 лет. **3.** $S = \{1 + \sqrt{2}\}$. **4.** $S = \{(4, 0)\}$.

Б. **2.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$. **3.** $S = \{(2, 1)\}$. **4.** $S = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right) \cup \{1\}$. **5.** *Указание.* Пусть $6^{|x|} = t$, $t \geq 0$.

Модуль 8. Элементы тригонометрии

§1. А. **1.** а) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{9}, \frac{11}{18}\pi$; б) $\frac{\pi}{3}, -\frac{13}{30}\pi, \frac{3}{2}\pi$. **2.** а) 60°, 90°, –135°; б) 30°, 108°, –360°. **3.** а) $\cos^2 15°$; б) $-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $5 - 2\sqrt{3}$; г) $4 + \frac{\sqrt{3}}{6}$. **4.** а), б) да; в), г) нет. **5.** а) Нет; б), в), г) да. **6.** а) $\sin^2\alpha + \sin\alpha$; б) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)$; в) -1; г) $\operatorname{ctg}\alpha$. **7.** а) 8 см, 30°, 60°; б) 2 см, 30°, 60°. **8.** 45°, 135°. **9.** ≈108 м.

§1. Б. **10.** а) $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.** Минус. **12.** а) 0;

б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{4}$. **13.** а), б), в) минус. **14.** а) Ни четная, ни нечетная; б) четная; в) нечетная. **15*.** а) $[-3, 3]$; б) $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$; в) $(-\infty, -4]\cup[4, +\infty)$.

§2. А. **1.** а) 1; б) –3; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{2}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; б) $\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$. **3.** а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **5.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) $\cos\frac{17\pi}{70}$. **6.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **7.** а) $\sin^2\alpha$; г) $-\sin^2\alpha$; д) $\frac{2}{\sin\alpha}$; е) $2(\cos\alpha+\sin\alpha)$. **8.** а) $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; б) $\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; в) $\frac{1}{2}(1+3\cos 2\alpha)$.

§2. Б. **9.** *Указание.* Примените соотношение $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=0{,}6^2$. **10.** *Указание.* Примените соотношение $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=(2{,}5)^2$. **14.** а) $5\frac{1}{3}$; б) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)$; в) *Указание.* $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. **15.** а) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **16.** в), г) *Указание.* Примените соотношение $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

§3. Б. **1.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$; в) $S=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
2. а) $S=\left\{\frac{\pi}{6}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $S=\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $S=\varnothing$. **3.** а) $S=\left\{-\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $S=\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}25+\frac{\pi n}{2}\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$; г) $S=\left\{-\frac{5\pi}{6}+5\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **4.** а) $S=\left\{\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{6}\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$; д) $S=\left\{-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. *Указание.* Разделите обе части уравнения на $\sqrt{2}$; е) *Указание.* Разделите обе части уравнения на 2, затем примените соотношение $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. а) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; г) $S=\left\{-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
6. а) $S=\left\{-\frac{3\pi}{4}+3\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $S=\{\operatorname{arctg}3+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$.
7. а) $S=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{8}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
8. а) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{\pi+2\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$; в) *Указание.* $1=\sin^2 x+\cos^2 x$; г) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; и) *Указание.* Разделите обе части уравнения на $\sqrt{2}$, затем примените соотношение $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** а) $S=\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\right\}$. **10.** $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{4}$. **11.** $\arcsin\frac{3}{7}$.
13. $\arcsin\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}$. **14.** $2\arccos\frac{(l+m)\cdot b}{2lm}$. **16*.** а) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$ при $a=0$. *Указание.* При $a\neq 0$ рассмотрите отдельно случаи $D=1+4a\geq 0$ и $D=1+4a<0$, учитывая, что $|\sin x|\leq 1$; г) *Указание.* Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3a-1}{2}$, учитывая условие $\left|\frac{3a-1}{2}\right|\leq 1$.

§4. Б. 1. а) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$; б) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$;

в) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$;

е) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$; ж) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$; з) $S=\mathbb{R}$;

и) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; к) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; л) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$;

м) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; н) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pi+\pi n\right)$; о) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ \pi+\pi n\right)$;

п) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$; р) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(\pi n,\ \pi-\operatorname{arcctg}3+\pi n)$; с) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[-\pi+2\pi n,\ 2\pi n]$;

т) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

2. а) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7\pi}{6}+4\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+4\pi n\right]$; б) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ \frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\right]$; в) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi n}{5},\ \frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}\right)$;

г) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi n}{3}\right)$; д) $S=\mathbb{R}$.

3. а) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+2\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$; в) $S=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}\right)$.

г) *Указание*. Решите неравенство $\sin 3x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д*) *Указание*. Введите вспомогательное неизвестное $t=|\cos x|$; е*) *Указание*. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. **4.** *Указание*. $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. **5.** *Указание*. Запишите заданное уравнение в виде $(\sin x-\sin 3x)(\sin x+\sin 3x)+\sin^2 2x=0$, затем преобразуйте в произведение выражения, записанные в скобках.

Упражнения и задачи на повторение

А. 1. а) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **2.** а) –0,28; б) 0,68. **3.** а) –3; б) 0. **4.** $2{,}4\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\approx 4{,}63$ м. **5.** $(20-10\sqrt{3})$ см. **6.** $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$. **8.** б) $\cos\alpha$. **9.** а) 1; б) 1. **11.** 5°; 150°; 720°; 1500°.

Б. 12. в) –3; г) 9. **13.** 18. **14.** 25. **15.** $k=\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **16.** Меньше 1. **17.** а) Плюс; б) плюс. **18.** а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная. **19.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{5\pi}{6}$. **20.** *Указание*. Используйте $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=m^2$. а) $m^2=2m$; б) $m(m^2-2m-1)$. **21.** а) Да; б) нет. **23.** а) 1; б) 0. **25.** –330°. **26.** $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$. **30.** 2 случая: 1) $\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – величина угла при основании, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – величина угла при вершине; 2) $\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – величина угла при основании, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – величина угла при вершине.

33. б) $\cos(\angle ADB)=\frac{13}{14}$, $\sin(\angle ADB)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\operatorname{tg}(\angle ADB)=\frac{3\sqrt{3}}{13}$, $\operatorname{ctg}(\angle ADB)=\frac{13\sqrt{3}}{9}$;

д) $\mathscr{A}=\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$; е) $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **34*.** а) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; б) 0,8.

35*. а) $S=\left\{\pi-\arcsin\frac{3\sqrt{20}}{20}-\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\arcsin\frac{3\sqrt{20}}{20}+\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$;

б) $S=\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$. **36*.** а) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Проверочная работа

А. **1.** D. **2.** $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$, $\frac{2+\sqrt{15}}{6}$, $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{15}-2}$, $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{15}+2}$. **4.** 2. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** $\arcsin\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

Б. **1.** Л. **2.** $-0{,}96$; $0{,}28$; $-3\frac{3}{7}$; $-\frac{7}{24}$. **4.** $S=\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **5.** $x\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Модуль 9. Геометрические фигуры на плоскости

§1. А. **4.** а), б), в) И; г) Л.

§1. Б. **10.** а) 1)$\Rightarrow$2) (Л), 1)$\Rightarrow$3) (И), 1)$\Rightarrow$4) (И); б) 2)$\Rightarrow$1) (Л), 3)$\Rightarrow$1) (И), 4)$\Rightarrow$1) (Л). **11.** а) $a\cap b=\{A\}$, $a\cap P=a$, $b\cup P=P$; б) P, $\{A\}$.

§2. А. **1.** 12 см. **2.** 8 см. **3.** 30 см. **4.** 100 см. **5.** 16 см, 12 см. **6.** 18 см, 18 см, 20 см. **7.** 3 см. **9.** $EF=FD=3$ см.

§2. Б. **10.** *Указание*. Примените признак ГУ. **11.** *Указание*. Примените признак УСУ. **12.** *Указание*. Примените признак СУС. **13.** *Указание*. Примените признак ГК. **14.** *Указание*. Примените признак ГУ. **15.** *Указание*. Примените признак СУС. **16.** а) *Указание*. На $[AM$ и $[A_1M_1$ отметьте точки D и D_1 так, что $AM=MD$ и $A_1M_1=M_1D_1$. Из $\Delta AMC\equiv\Delta MBD$ и $\Delta A_1M_1C_1\equiv\Delta M_1B_1D_1$ следует, что $\angle ABD\equiv\angle A_1B_1D_1\overset{(СУС)}{\Rightarrow}\Delta ABD\equiv\Delta A_1B_1D_1$; б) $\Delta ALC\overset{(УСУ)}{\equiv}\Delta A_1L_1C_1$. **17.** $\Delta ABM\overset{(ССС)}{\equiv}\Delta A_1B_1M_1\Rightarrow\angle ABC\equiv\angle A_1B_1C_1\equiv\Delta ABC\overset{(СУС)}{\equiv}\Delta A_1B_1C_1$. **18.** *Указание*. На $[AM$ и $[A_1M_1$ отметьте точки D и D_1 так, что $AM=MD$ и $A_1M_1=M_1D_1$. $\Delta ABD\overset{(ССС)}{\equiv}\Delta A_1B_1D_1\Rightarrow$ $\Rightarrow\angle BAM\equiv\angle B_1A_1M_1$, а $\Delta ADC\overset{(ССС)}{\equiv}\Delta A_1D_1C_1\Rightarrow\angle MAC\equiv\angle M_1A_1C_1$. Значит, $\angle BAC\equiv\angle B_1A_1C_1\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta ABC\overset{(СУС)}{\equiv}\Delta A_1B_1C_1$. **19.** *Указание*: $\Delta AMC\overset{(СУС)}{\equiv}\Delta A_1M_1C_1\Rightarrow AC=A_1C_1$; $\Delta AMB\equiv\Delta A_1M_1B_1\Rightarrow$ $\Rightarrow AB=A_1B_1$. Значит, $\Delta ABC\overset{(ССС)}{\equiv}\Delta A_1B_1C_1$. **20.** *Указание*. На медиане AM отметьте точку D так, что $AM=MD$. $\Delta BMD\equiv\Delta AMC\Rightarrow BD=AC$, а в ΔABD имеем $AB+BD>AD$ или $AB+AC>2AM$. **21.** *Указание*. Из задачи 20 следует, что $2m_a<b+c$, $2m_b<a+c$, $2m_c<a+b$. Сложив эти неравенства, получим $m_a+m_b+m_c<\mathscr{P}$. Сложив неравенства $m_a>c-\frac{a}{2}$, $m_b>a-\frac{b}{2}$, $m_c>b-\frac{c}{2}$, получим $m_a+m_b+m_c>\frac{1}{2}\mathscr{P}$. **22.** *Указание*. См. задачу 18. **23.** *Указание*. $\Delta ABL\overset{(СУС)}{\equiv}\Delta A_1B_1L_1\Rightarrow\angle ALC\equiv\angle A_1L_1C_1\Rightarrow\Delta ALC\overset{(УСУ)}{\equiv}\Delta A_1L_1C_1\Rightarrow AC=A_1C_1\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta ABC\overset{(СУС)}{\equiv}\Delta A_1B_1C_1$. **24.** $\frac{2\mathscr{P}_1-\mathscr{P}}{2}$. **25.** 15 см, 20 см, 25 см. **26.** в) *Указание*. Постройте $\angle MAN\equiv\angle A$ и точку $C\in[AM$ так, что $AC=b$. $\mathscr{C}(C, a)\cap[AN=\{B\}$. Треугольник ABC – искомый. **28.** ж) $\{A\}=CM\cap BN$, где $\angle BCM\equiv\angle CBN$. **29.** *Указание*. На $[AM$ отметьте точку D так, что $AM=MD$. В ΔACD имеем $AD=2m_a$, $\angle ADC\equiv\angle BAM$, значит, ΔACD может быть построен (УСУ). Вершина $B\in[CM$ так, чтобы $CM=MB$. **30.** б) *Указание*. В ΔABC имеем $BC=a$, $AD=h_a$, $AM=m_a$. ΔADM может быть построен как прямоугольный (ГК). Вершины B и C являются точками пересечения окружности $\mathscr{C}\left(M, \frac{a}{2}\right)$ и прямой DM;

г) *Указание*. В ΔABC имеем $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Отметьте точку $D \in [BA$ так, что $AD = AC$. Значит, ΔCBD может быть построен (СУС). Вершина A – это точка пересечения прямой BD и медиатрисы отрезка DC; д) *Указание*. В ΔABC отметьте точку $D \in AC$ так, что $AD = AB = c$. ΔBDC может быть построен (СУС). $DC = b - c$, $BC = a$, $\angle BDD \equiv \angle C$. ΔABD равнобедренный; е) *Указание*. В ΔABC отметьте точку $D \in [CA$ так, что $AD = AB = c$. $\text{m}(\angle ADB) = \frac{1}{2}\text{m}(\angle A)$, значит, ΔDCB может быть построен. Вершина A – это пересечение CD и медиатрисы отрезка BD; ж) *Указание*. В ΔABC на дополнении полупрямой $[BA$ отметьте точку B_1 так, что $CB = BB_1$, а на дополнении полупрямой $[AB$ отметьте точку A_1 так, что $AC = A_1A$. ΔCA_1B_1 может быть построен, поскольку $\text{m}(\angle CA_1B_1) = \frac{1}{2}\text{m}(\angle A)$, $\text{m}(\angle CB_1A_1) = \frac{1}{2}\text{m}(\angle B)$ и $A_1B_1 = a + b + c$ (УСУ). Вершины A и B являются пересечениями медиатрис отрезков A_1C и B_1C и прямой A_1B_1; з) *Указание*. В ΔABC отметьте точку $D \in AC$ так, что $AB = AD \Rightarrow DC = b - c$. Докажите, что $2\text{m}(\angle CBD) = \text{m}(\angle B - \angle C)$, откуда следует, что ΔBDC может быть построен. Вершину A найдите из равнобедренного треугольника ABD.

§3. А. **1.** 44 см. **2.** 12 см. **3.** 50°, 130°. **4.** 70°, 110°. **5.** 40°, 50°. **6.** 20°, 70°. **7.** 75°, 105°. **8.** 24 см, 40 см. **9.** 56 см, 84 см. **10.** 20 см.

§3. Б. **11.** $\angle DAE \equiv \angle AEB$ как внутренние накрест лежащие углы. **12.** *Указание*. Через вершины острых углов постройте прямые, параллельные катетам, и получите прямоугольник. **13.** *Указание*. Пусть медиана $CM = 0{,}5AB$, тогда треугольники CMA и BMC – равнобедренные. Значит, $\text{m}(\angle MAC) = \text{m}(\angle ACM) = \alpha$, $\text{m}(\angle MBC) = \text{m}(\angle MCB) = \beta$. Тогда $\text{m}(\angle A) + \text{m}(\angle B) + \text{m}(\angle C) = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \text{m}(\angle ACB) = 90°$. **14.** *Указание*. См. решение задачи 11. **15.** *Указание*. Если построить высоты, исходящие из вершин тупых углов, получите два конгруэнтных треугольника. **16.** $d_1 + d_2$. **17.** 1 : 6. **18.** *Указание*. Постройте угол, конгруэнтный заданному, а также его биссектрису. На биссектрисе отметьте отрезок, конгруэнтный заданному, и проведите прямые, параллельные сторонам ромба. **19.** *Указание*. Постройте ромб $AMNL$, у которого $\angle MAL$ конгруэнтен заданному. На $[AN$ отметьте точку Q так, что $AN + NQ = AN + ML$. На $[AN$ отметьте точку C так, что $AC = d_1 + d_2$. Через C постройте прямую, параллельную MQ, и найдите третью вершину. **20.** *Указание*. Примените признак ССС. **21.** *Указание*. Примените признак ССС. **24.** *Указание*. Постройте ΔABE, где $AE = a - b$, $\angle BAE \equiv \angle A$, $\angle AEB \equiv \angle D$. На $[AE$ отметьте точку D так, чтобы $AD = a$. Вершина C – это пересечение прямой, параллельной AD и проходящей через B, с прямой, параллельной BE и проходящей через D. **25.** *Указание*. Постройте ΔBED, где $BE = h$, $BD = d_1$ $\text{m}(\angle BED) = 90°$, затем $[BM \parallel DE$. Вершины C и A – это пересечение окружности $\mathscr{C}\left(O, \frac{1}{2}d_2\right)$ и полупрямых $[BM$ и $[DA$, где O – середина $[BD]$. **26.** *Указание*. См. задачу 25.

§4. А. **1.** 2 см. **2.** 36 см, 9 см. **3.** 30 см, 40 см, 50 см. **4.** 6 см. **5.** 30 см, 36 см. **6.** 7,2 м.

§4. Б. **7.** *Указание*. $2\text{m}(\angle B) = \pi - \text{m}(\angle A) = \pi - \text{m}(\angle A_1) = 2\text{m}(\angle B_1)$. Примените признак УСУ. **9.** *Указание*. $\Delta ABM \sim \Delta A_1B_1M_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1M_1 : AM$. **10.** *Указание*. $\Delta ABL \overset{(\text{УСУ})}{\sim} \Delta A_1B_1L_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1L_1 : AL$. **11.** $AE \cdot BE = CE \cdot DE \Rightarrow AE : CE = DE : BE \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta CBE \Rightarrow \angle DAE \equiv \angle BCE \Rightarrow BC \parallel AD$. **12.** *Указание*. $\Delta BHA_1 \sim \Delta AHB_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow AH : BH = B_1H : A_1H \Rightarrow AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$ и т. д. **13.** *Указание*. Дано трапеция $ABCD$

$(BC \parallel AD)$, $\{O\} = AC \cap BD$, M – середина стороны BC и $\{N\} = AD \cap MO$, тогда в силу теоремы 30 $AN : ND = BM : MC = 1 \Rightarrow AN = ND$. Значит, M, O, N – коллинеарные точки. Если $\{O_1\} = AB \cap CD$, то $BM : MC = AN : ND$, значит, точки O_1, M_1, N – коллинеарные. **14.** *Указание*. В ΔBLM, $\angle BLM$ – тупой угол, а $\angle BML$ – острый. Тогда $BL < BM$. **15.** $\Delta BMC \sim \Delta AMD$. **16.** 12 см, 24 см, 30 см. **17.** $AC = 48$ см, $A_1C_1 = 36$ см, $B_1C_1 = 30$ см. **18.** 56 см. **19.** 9 см. **20.** *Указание*. На сторонах угла, конгруэнтного с $\angle A$, отметьте точки A_1 и B_1 так, что $AC_1 : AB_1 = m : n$. На $[AC_1$ постройте $AC = b$, затем $CD \parallel C_1B_1$. Точка $\{B\} = [AB_1 \cap CD$. **21.** *Указание*. Постройте $\Delta A_1B_1C_1$, у которого $\angle B_1A_1C_1 = \angle A$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle C$ и $[B_1D_1]$ – его высота. На $[A_1C_1$ отметьте точку $E_1 \notin [A_1C_1]$ так, что $C_1E_1 = B_1D_1$. На $[A_1C_1$, отметьте точку E так, что $A_1E = b + h_b$, и постройте $[ED \parallel B_1E_1$, $\{B\} = [ED \cap AB_1$ и $B_1C_1 \parallel BC$. **22.** *Указание*. Постройте квадрат $M_1N_1P_1Q_1$ так, что $N_1 \in AB$, $M_1 \in AC$, $Q_1 \in AC$. Точка $\{P\} = [AP_1 \cap BC$ – вершина квадрата. **23.** *Указание*. См. задачу 21.

§5. А. **1.** $2\sqrt{5}$ см. **2.** $\frac{1}{3}\sqrt{142}$ см, $\frac{1}{3}\sqrt{58}$ см, $\frac{5}{3}\sqrt{7}$ см. **3.** 6 см. **4.** $\frac{45}{7}$ см. **5.** 42 см, 56 см. **6.** $\sqrt{73}$ см, $2\sqrt{13}$ см, 5 см. **7.** 5 см, $5\sqrt{3}$ см, 10 см. **8.** $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ см, $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ см. **9.** 24 см.

§5. Б. **10.** 10 см. **11.** 1 см. **12.** 30°, 60°, 90°. **13.** 3 см, 4 см, 5 см, 1 см. **14.** 11 : 7. **16.** 0,4R. **17.** 8 см.

Проверочная работа I

А. **1.** 400×300 м. **2.** 4,8 м. **3.** 144,3 мм. **4.** $AB = 12$ см, $BC = 15$ см. **5.** $AB = 1{,}5$ м, $CD = 2$ м, $EF = 2{,}5$ м.

B. **1.** $\frac{d\sqrt{13}}{12}$. **2.** $a(\sqrt{2} - 1)$. **3.** 40 дисков, 44 диска. **4.** Только квадратные детали.

§6, 6.1. А. **1.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см. **2.** 3 см, 7,5 см. **3.** 60°, 30°. **4.** $2\sqrt{13}$ см и $3\sqrt{13}$ см. **5.** $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ см. **6.** 8 см, 15 см. **7.** 15 см, 9 см.

§6, 6.1. Б. **8.** $\sqrt{5}$ см. **9.** 18 см, 24 см, 30 см. **10.** $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. **11.** $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. **13.** 9 см, 12 см, 15 см. **14.** 5,6 см, 4,2 см; $r = 2{,}4$ см. **15.** $\sqrt{2}$ м, $\sqrt{3}$ м. **16.** $\frac{n^2+m^2}{n}$, $\frac{n^2+m^2}{m}$.

§6, 6.2. Б. **1.** 4 см. **2.** $25\sqrt{3}$ см². **3.** 4 м или $\sqrt{10}$ м. **4.** $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$. $\frac{9}{4}$ м, $\frac{15}{4}$ м. **6.** 5 см. **7.** $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. **8.** 10 см, 5 см, $5\sqrt{3}$ см. **9.** 3 см, 5 см, 7 см. **10.** $\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. **11.** $\frac{5\sqrt{29}}{4}$ см.

§6, 6.3. А. **1.** 40 см. **2.** 12 см. **3.** 18 см. **4.** 50°. **5.** 16 см. **6.** 40°.

§6, 6.3. Б. **7.** *Указание*. Середина гипотенузы – это центр окружности, описанной около треугольника. **8.** *Указание*. $m(\angle CBD) = \pi - m(\angle BDA) - m(\angle BCA)$. Углы BDA и BCA вписаны в окружность и им соответствуют дуги, не зависящие от прямой CD. **9.** *Указание*. Рассматриваются два подобных равнобедренных треугольника, вершины которых совпадают с центрами окружности. **10.** *Указание*. $\angle BCA \equiv \angle ADE$. **11.** *Указание*. Пусть T – точка касания. Тогда $CC_1 = C_1T$ и $BB_1 = B_1T$, откуда $AC_1 + C_1B_1 + B_1A = AC_1 + C_1T_1 + TB_1 + B_1A = AC_1 + C_1C + BB_1 + B_1A = AC + AB = 2AB$. **12.** а) *Указание*. $m(\angle AA_1B) = m(\angle AB_1B)$. б) *Указание*. Из а) получаем, что $m(\angle A_1B_1C) = m(\angle CBA)$. $\angle CBA$ конгруэнтен углу, образованному AC и касательной к окружности в точке C. Значит, касательная параллельна A_1B_1. Тогда $OC \perp A_1B_1$. **13.** *Указание*. Общая касательная в A проходит через середину отрезка BC. **14.** *Указание*. См. задачу 12 б). **15.** *Указание*. $CE^2 = CA \cdot CB = CD^2$. **16.** $2\arcsin\dfrac{R-r}{R+r}$. **17.** $\dfrac{1}{2}(b-a)$. **18.** $2\sqrt{R \cdot r}$. **19.** *Указание*. Постройте прямую CB так, чтобы $m(\angle ABC) = \varphi$, $BD \perp CB$. Пересечение медиатрисы отрезка AB с BD – это точка O. Одна из дуг окружности $\mathscr{C}(O, OB)$, а также и симметричная ей дуга, являются искомыми. **20.** *Указание*. Постройте множество точек M так, чтобы $\angle BMC \equiv \angle A$ (см. задачу 19). Тогда точка пересечения дуги и прямой, параллельной BC (расстояние между ними равно h_a), является третьей вершиной. **21.** *Указание*. Постройте в окружности $\mathscr{C}(O, R)$ хорду $BC = a$. Третья вершина – это пересечение окружности $\mathscr{C}(O, R)$ и прямой, параллельной BC, расстояние между которыми равно h_a. **22.** *Указание*. См. задачу 2 с решением. **23.** *Указание*. Если I – центр вписанной окружности, то $m(\angle BIC) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}m(\angle A)$. **24.** *Указание*. $[AC]$, $[BC]$ – хорды окружности $\mathscr{C}(O, R)$.

§7. А. **1.** а) 12 сторон; б) 18 сторон. **2.** а) 10 сторон; б) 15 сторон. **3.** 0,5R. **4.** $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

§7. Б. **5.** $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, $r = \dfrac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$. **6.** $3\sqrt{3}$ м, $4\sqrt{2}$ м, 6 м, $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ м, $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ м.

7. $\dfrac{9\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6}$ м^2. **8.** $2\sqrt{6}$ м.

§8. А. **1.** 600 см^2. **2.** 60 см^2. **3.** 12 см^2. **4.** 60 см^2. **5.** 157,5 см^2. **6.** 144 см^2. **7.** 4π см^2.

§8. Б. **8.** $\dfrac{d^2-4a^2}{4}$. **9.** $5\sqrt{35}$ см^2. **10.** $\dfrac{9}{4}$ м^2, $\dfrac{15}{4}$ м^2. **11.** $20\sqrt{21}$ см^2. **12.** $18\sqrt{3}$ см^2. **13.** $\dfrac{ab}{4}$. **14.** $\mathscr{A}_{ABE} = 2$ (кв. ед.), $\mathscr{A}_{\Delta AED} = 4$ (кв. ед.). **15.** $\dfrac{3d^2}{4}$. **16.** 3,6 дм^2.

Упражнения и задачи на повторение

А. **1.** 840 см^2. **2.** 15. **3.** 9 см, 12 см, 15 см. **4.** $\sqrt{10}$ см. **5.** $\sqrt{2}-1$. **6.** $\dfrac{136\sqrt{2}}{5}$ см. **7.** 60°, 120°. **8.** 7,5 см. **9.** 4 : 1. **10.** 150°. **11.** 12 см. **12.** 3 см. **13.** 8 см. **14.** 28 см^2. **15.** 24 см. **16.** 7 см. **17.** $\sqrt{114}$ см.

Б. **18.** 0,5 см. **19.** $\dfrac{25}{3}$ см. **20.** 25 см, 25 см, 30 см. **21.** 2,4 см, 5,6 см, 4,2 см, 7 см. **22.** $r(2R+r)$. **23.** 5 см. **24.** 3 : 4. **25.** 5 см, 5 см, 6 см. **26.** $\dfrac{9a}{4}$. **27.** 73 : 70. **28.** 30°, 30°, 120° или 75°, 75°, 30°. **29.** $\dfrac{a-b}{2}$. **30.** $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. **31.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. **32.** 30°, 60°. **33.** 5 : 10 : 13. **34.** Равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами $\sqrt{2\mathscr{A}}$. **35.** Равнобедренные треугольники с углом α при вершине. **36.** а) $\approx 9{,}42$ мм; б) $\approx 226{,}08$ мм. **37.** а) $\approx 18{,}84$ дм; б) $\approx 226{,}08$ дм; в) $\approx 452{,}16$ дм. **38.** ≈ 5 мин и 1,44 с. **39.** $\approx 7{,}536$ м.

Проверочная работа II

А. **1.** 6π см^2. **2.** *Указание*. Возможны 3 вершины. **3.** $(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ см. **4.** 90°. **5.** 30 см, $15\sqrt{21}$ см. **6.** 288 см^2.

Б. **1.** $\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$ см^2. **2.** $18\sqrt{3}$ см^2. **3.** 84 (кв. ед.). **4.** *Указание*. Докажите, что эта величина равна высоте треугольника. **5.** 4 см, $\dfrac{5\sqrt{41}}{4}$ см. **6.** $\dfrac{R^2}{12}(7\pi+6+3\sqrt{3})$ (кв. ед.).

Содержание

Предисловие 3

Модуль 1. **Действительные числа. Повторение и дополнения**

§ 1. Рациональные, иррациональные, действительные числа 4

§ 2. Изображение действительных чисел на числовой оси. Сравнение действительных чисел 6

§ 3. Арифметические операции над действительными числами 7

Задачи и упражнения 10

Проверочная работа 12

Модуль 2. **Элементы математической логики и теории множеств**

§ 1. Элементы теории множеств. Повторение и дополнения 13

§ 2. Элементы математической логики 18

Упражнения и задачи на повторение 24

Проверочная работа 25

Модуль 3. **Корни. Степени. Логарифмы**

§ 1. Корни 27

§ 2. Степень с действительным показателем 32

§ 3. Логарифмы 38

Упражнения и задачи на повторение 42

Проверочная работа 43

Модуль 4. **Элементы комбинаторики. Бином Ньютона**

§ 1. Элементы комбинаторики 46

§ 2. Бином Ньютона 57

Упражнения и задачи на повторение 62

Проверочная работа 64

Модуль 5. **Числовые функции. Основные свойства**

§ 1. Понятие функции. Повторение и дополнения 66

§ 2. Основные свойства числовых функций 71

Упражнения и задачи на повторение 82

Проверочная работа 82

Модуль 6. **Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности**

§ 1. Уравнения. Повторение и дополнения 85

§ 2. Системы и совокупности алгебраических уравнений 88

§ 3. Неравенства с одним неизвестным. Повторение и дополнения 95

§ 4. Системы и совокупности неравенств с одним неизвестным. Повторение и дополнения 99

Упражнения и задачи на повторение .. 102

Проверочная работа 104

Модуль 7. **Элементарные функции. Уравнения. Неравенства**

§ 1. Функция I степени. Уравнения I степени. Неравенства I степени 106

§ 2. Функция II степени. Уравнения II степени. Неравенства II степени ... 111

§ 3. Функция радикал. Степенная функция. Иррациональные уравнения. Иррациональные неравенства 120

Проверочная работа I 137

§ 4. Показательная функция. Показательные уравнения. Показательные неравенства 138

§ 5. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения. Логарифмические неравенства 146

Упражнения и задачи на повторение .. 159

Проверочная работа II 161

Модуль 8. **Элементы тригонометрии**

§ 1. Тригонометрические функции 163

§ 2. Преобразования тригонометрических выражений 175

§ 3. Тригонометрические уравнения 181

§ 4. Тригонометрические неравенства .. 195

Упражнения и задачи на повторение .. 202

Проверочная работа 205

Модуль 9. **Геометрические фигуры на плоскости**

§ 1. Элементы дедуктивной геометрии ... 209

§ 2. Треугольники. Конгруэнтность треугольников. Классификации 219

§ 3. Параллелограмм и его свойства. Трапеция 225

§ 4. Подобие фигур. Подобие треугольников. Теорема Фалеса 229

§ 5. Замечательные линии и точки треугольника 233

Проверочная работа I 236

§ 6. Метрические соотношения в треугольнике и окружности 237

§ 7. Многоугольники. Правильные многоугольники 250

§ 8. Площади плоских фигур 254

Задачи на повторение 258

Проверочная работа II 261

Ответы и указания 263

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК
X
класс

Editura
PRUT INTERNAȚIONAL
ISBN 978-9975-54-052-0

КОММЕРЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ